УДК 514.76

Рустанов А.Р.[1], Герасименко С.А.[2], Щипкова Н.Н.[2]
[1]Московский педагогический государственный университет
E-mail: aligadzhi@yandex.ru
[2]Оренбургский государственный университет,
E-mail: gsa_57@mail.ru ; ningeom@pochtamt.ru

ГЕОМЕТРИЯ ТЕНЗОРА КОНГАРМОНИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ *АС*-МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА C_{11}

Основной целью работы является изучение геометрии тензора конгармонической кривизны почти контактных метрических многообразий класса C_{11}. С этой целью решены следующие задачи:

1. Подсчитать основные существенные компоненты тензора конгармонической кривизны на пространстве присоединенной G-структуры.

2. Исследовать конгармонически плоские многообразия класса C_{11}.

3. Получить тождества, которым удовлетворяет тензор конгармонической кривизны *АС*-многообразий класса C_{11}.

4. Выделить и изучить некоторые подклассы *АС*-многообразий класса C_{11} по дифференциально-геометрическим инвариантам второго порядка.

В работе решены эти задачи. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Конгармонически плоское *АС*-многообразие класса C_{11} является риччи-плоским многообразием.

Теорема 2. Конгармонически плоское *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием Эйнштейна.

Теорема 3. Конгармонически плоское *АС*-многообразие класса C_{11} является плоским многообразием.

Теорема 4. *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса K_1 тогда и только тогда, когда *АС*-многообразие класса C_{11} является риччи-плоским многообразием.

Теорема 5. *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса K_2 тогда и только тогда, когда *АС*-многообразие класса C_{11} является риччи-плоским многообразием.

Теорема 6. *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса K_3 тогда и только тогда, когда *АС*-многообразие класса C_{11} является плоским многообразием.

Теорема 7. *АС*-многообразие класса C_{11}, являющееся многообразием класса K_4 является многообразием Эйнштейна с космологической константой равной $f\tilde{A} = \frac{f\hat{O}}{2(n-2)}$. В частности, в случае полноты и связности оно компактно и имеет конечную фундаментальную группу.

Теорема 8. *АС*-многообразие класса C_{11} размерности больше 5 является K_4-многообразием тогда и только тогда, когда оно является Риччи плоским многообразием.

Ключевые слова. Тензор римановой кривизны, тензор Риччи, тензор конгармонической кривизны, конгармонически плоское многообразие, плоское многообразие.

Конформные преобразования римановой структуры являются важным объектом изучения в дифференциальной геометрии. Значительный интерес представляет специальный тип конформных преобразований – конгармонические преобразования, т. е. конформные преобразования, сохраняющие свойство гармоничности гладких функций. Этот тип преобразований был введен в рассмотрение Иши [7] в 1957 году и в настоящее время изучается с различных точек зрения [8]–[15]. Известно, что такие преобразования имеют тензорный инвариант – так называемый тензор конгармонической кривизны. Этот тензор является алгебраическим тензором кривизны, т. е. он обладает классическими свойствами симметрии тензора римановой кривизны. Пополнение римановой структуры до почти контактной метрической структуры позволяет выделить еще несколько конгармонических инвариантов – элементов спектра тензора конгармонической кривизны, а также дополнительные свойства симметрии тензора конгармонической кривизны.

В настоящей работе изучаются связи между этими инвариантами и дополнительными свойствами симметрии тензора конгармонической кривизны почти контактных метрических многообразий класса C_{11}, а также геометрический смысл обращения в нуль этих инвариантов.

Почти контактные метрические многообразия (короче, *АС*-многообразия) класса C_{11} в классификации Чинья и Гонзалеза [6] исследовались в работах [2]–[5]. Данный класс многообразий обобщает наиболее хорошо изученный класс косимплектических многообразий. В данной работе мы продолжим изучение данного класса многообразий и изучим некоторые вопросы геометрии тензора конгармонической кривизны.

Пусть M^{2n+1} – *AC*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$. Тензор конгармонической кривизны *AC*-структуры в терминах компонент вычисляется по формуле [7]:

$$\mathrm{K}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \frac{1}{2n-1}\left(\delta^i_k S_{jl} - \delta^i_l S_{jk} + g_{jl} S^i_k - g_{jk} S^i_l\right), \qquad (1)$$

где R^i_{jkl} – компоненты тензора римановой кривизны, S^i_k – компоненты тензора Риччи, g_{jl} – компоненты метрического тензора.

Как легко показать из (1), тензор конгармонической кривизны обладает всеми классическими свойствами симметрии тензора Римана-Кристоффеля.

Компоненты тензора Римана-Кристоффеля $\{R^i_{jkl}\}$ на пространстве присоединенной G-структуры *AC*-многообразия класса $\boldsymbol{C}_{11}$ имеют вид [2]:

$$1)\, R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc}; \quad 2)\, R^{\hat{a}}_{\hat{b}c\hat{d}} = -A^{bd}_{ac}, \qquad (2)$$

а остальные компоненты нулевые. Компоненты тензора Риччи имеют вид:

$$S_{a\hat{b}} = S_{\hat{b}a} = A^{bc}_{ac}, \qquad (3)$$

остальные компоненты нулевые. В частности, скалярная кривизна с вычисляется по формуле [2]

$$\chi = g^{ij} r_{ij} = 2A^{ab}_{ab} = 2S_{a\hat{a}}. \qquad (4)$$

На пространстве присоединенной *G*-структуры матрица метрического тензора имеет вид:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где I_n – единичная матрица порядка *n*.

Расписав компоненты тензора конгармонической кривизны на пространстве присоединенной *G*-структуры с учетом (2), (3), (5), получим, что на пространстве присоединенной *G*-структуры тензор конгармонической кривизны *AC*-многообразия класса $\boldsymbol{C}_{11}$ имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned}
&1)\, K_{0a0b} = \frac{1}{2n-1} S_{ab}; \\
&2)\, K_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2n-1}\left(S_{bd}\delta^a_c + S_{ac}\delta^d_b\right) = \\
&= A^{ad}_{bc} + \frac{1}{2n-1}\left(\delta^a_c A^{dh}_{bh} + \delta^d_b A^{ah}_{ch}\right); \\
&3)\, K_{abcd} = \frac{1}{2n-1}\left(S_{bd}\delta^a_c - S_{bc}\delta^a_d + S_{ac}\delta^b_d - S_{ad}\delta^b_c\right) = \\
&= \frac{1}{2n-1}\left(\delta^a_c A^{bh}_{dh} - \delta^a_d A^{bh}_{ch} + \delta^b_d A^{ah}_{ch} - \delta^b_c A^{ah}_{dh}\right),
\end{aligned} \qquad (6)$$

плюс соотношения, полученные с учетом вещественности и свойств симметрии этого тензора как алгебраического тензора кривизны. Остальные компоненты тензора конгармонической кривизны равны нулю. Эти выражения (и им сопряженные) задают компоненты ненулевых основных конгармонических инвариантов *AC*-многообразия класса $\boldsymbol{C}_{11}$.

Скажем, что псевдориманово многообразие (M, g) называется *конгармонически плоским*, если метрика g в некоторой окрестности каждой точки $m \in M$ допускает конгармоническое преобразование в плоскую метрику [7]. Хорошо известен геометрический смысл обращения в нуль тензора конгармонической кривизны псевдориманова многообразия размерности свыше 3 – это равносильно конгармонической плоскости многообразия [7].

Пусть $\left(M^{2n+1}, \xi, \eta, f^3, g\right)$ – конгармонически плоское *AC*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$, т. е. компоненты его тензора конгармонической кривизны обращаются в нуль.

а) Поскольку

$$\mathrm{K}_{0a0\hat{b}} = \frac{1}{2n-1} S_{a\hat{b}} = \frac{1}{2n-1} A^{bc}_{ac} = 0, \quad \text{то}$$

$S_{a\hat{b}} = A^{bc}_{ac} = 0$. Таким образом, получили, что конгармонически плоское *AC*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ является риччи-плоским многообразием.

То есть, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Конгармонически плоское *AC*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ является риччи-плоским многообразием.

б) Свернем равенство

$$\mathrm{K}_{\hat{a}\hat{b}cd} = \frac{1}{2n-1}\left(S_{\hat{b}d}\delta^a_c - S_{\hat{b}c}\delta^a_d + \delta^b_d S_{\hat{a}c} - \delta^b_c S_{\hat{a}d}\right) = 0 \quad \text{по}$$

индексам *a* и *c*. Тогда после необходимых преобразований получим $S_{\hat{b}d} = -\dfrac{\chi}{2(n-2)}\delta_d^b$, т. е. *AC*-многообразие класса C_{11} является многообразием Эйнштейна с космологической константой

$\varepsilon = -\dfrac{\chi}{2(n-2)}$.

Теорема 2. Конгармонически плоское *AC*-многообразие класса C_{11} является многообразием Эйнштейна.

в) Так как

$$K_{\hat{a}bc\hat{d}} = R_{\hat{a}bc\hat{d}} + \frac{1}{2n-1}\left(S_{\hat{b}d}\delta_c^a + \delta_b^d S_{a\hat{c}}\right) = = A_{bc}^{ad} + \frac{1}{2n-1}\left(\delta_c^a A_{bh}^{dh} + \delta_b^d A_{ch}^{ah}\right) = 0$$

, в силу риччи-плоскости многообразия, получим $R_{\hat{a}bc\hat{d}} = A_{bc}^{ad} = 0$.

Теорема 3. Конгармонически плоское *AC*-многообразие класса C_{11} является плоским многообразием.

Исследуем геометрический смысл обращения в нуль основных конгармонических инвариантов *AC*-многообразия класса C_{11}.

Сначала рассмотрим некоторые тождества на тензор конгармонической кривизны *AC*-многообразия класса C_{11}.

1) Применим процедуру восстановления тождества [1] к равенствам

$$K_{00a}^{0} = -\frac{1}{2n-1}A_{ac}^{0c} = 0;\quad K_{00a}^{b} = -\frac{1}{2n-1}A_{ac}^{bc};\quad K_{00a}^{\hat{b}} = -\frac{1}{2n-1}A_{ac}^{\hat{b}c} = 0$$

т. е. $K_{00a}^{i} = -\dfrac{1}{2n-1}A_{ac}^{ic}$,

получим $K(\xi,\varepsilon_a)\xi = -\dfrac{1}{2n-1}A(\varepsilon_a)$, где отображение $A: X(M) \to X(M)$ задается формулой $A(X) = A_b^a X^b \varepsilon_a + A_a^b X_b \varepsilon_{\hat{a}}$, $A_a^b = A_{ac}^{bc}$. Заметим, что оператор $A: X(M) \to X(M)$ обладает свойствами:

$$1)\ A(\xi) = 0;\ 2)\ \eta \circ A = 0;\ 3)\ A(f^3 X) = f^3 A(X);\ 4)\ f^{3^2} A(X) = -A(X);\ \forall X \in X(M).$$

Т. к. $\{\varepsilon_a\}$ является базисом подмодуля $D_{f^3}^{\sqrt{-1}}$, а проектором на этот подмодуль является эндоморфизм $\pi = \sigma \circ l = -\dfrac{1}{2}\left(f^{3^2} + \sqrt{-1}f^3\right)$ [1], то

$$K\left(\xi, f^{3^2}X + \sqrt{-1}f^3X\right)\xi = = -\frac{1}{2n-1}A\left(f^{3^2}X + \sqrt{-1}f^3X\right), \forall X \in X(M).$$

Выделяя действительную и мнимую части данного тождества, получим эквивалентные равенства. Поэтому выпишем только действительную часть, т. е.

$$K\left(\xi, f^{3^2}X\right)\xi = -\frac{1}{2n-1}A\left(f^{3^2}X\right) = = \frac{1}{2n-1}A(X), \forall X \in X(M). \tag{7}$$

Тождество (7) равносильно следующему тождеству

$$K(\xi, X)\xi = \frac{1}{2n-1}A(X), \forall X \in X(M). \tag{8}$$

Определение 1. Скажем, что *AC*-многообразие класса C_{11} удовлетворяет ***первому дополнительному тождеству конгармонической кривизны*** или является ***многообразием класса*** $\boldsymbol{K_1}$, если тензор конгармонической кривизны удовлетворяет тождеству

$$K\left(\xi, f^{3^2}X\right)\xi = 0, \forall X \in X(M). \tag{9}$$

Пусть *AC*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса K_1, тогда согласно определению 1 имеет место равенство $K\left(\xi, f^{3^2}X\right)\xi = 0, \forall X \in X(M)$. Поскольку $f^{3^2} = -id + \eta \otimes \xi$, то тождество (9) равносильно тождеству $K(\xi, X)\xi = 0, \forall X \in X(M)$, которое на пространстве присоединенной *G*-структуры $K_{0i0}^{j}X^i = 0$. С учетом (6) последнее равенство запишется в виде: $K_{00b}^{a}X^b + K_{00\hat{b}}^{a}X^{\hat{b}} = 0$. Полученное равенство выполнено тогда и только тогда, когда $K_{00b}^{a} = K_{00\hat{b}}^{a} = 0$. Согласно (6:1) последнее равенство равносильно соотношению $A_{bc}^{ac} = 0$. С учетом (3) последнее равенство означает, что тензор Риччи равен нулю, т. е. многообразие является Риччи плоским.

Обратно, для Риччи плоского *АС*-многообразия класса $\boldsymbol{C}_{11}$ имеем, что $\mathsf{K}^{a}_{00b} = \mathsf{K}^{a}_{00\hat{b}} = 0$. т. е. многообразие является многообразием класса K_1.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ является многообразием класса K_1 тогда и только тогда, когда *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ является риччи-плоским многообразием.

2) Аналогично, применяя процедуру восстановления тождества к равенствам:

а) $\mathsf{K}^{0}_{0ab} = 0, \mathsf{K}^{c}_{0ab} = 0, \mathsf{K}^{\hat{c}}_{0ab} = 0$;

б) $\mathsf{K}^{0}_{0a\hat{b}} = 0, \mathsf{K}^{c}_{0a\hat{b}} = 0, \mathsf{K}^{\hat{c}}_{0a\hat{b}} = 0$;

в) $\mathsf{K}^{0}_{a0b} = 0, \mathsf{K}^{c}_{a0b} = 0, \mathsf{K}^{\hat{c}}_{a0b} = 0$,

получим тождества:

$$\begin{aligned}&\mathsf{K}\left({f^3}^2 X, {f^3}^2 Y\right)\xi = \mathsf{K}\left(f^3 X, f^3 Y\right)\xi = 0;\\ &\mathsf{K}\left(\xi, {f^3}^2 X\right){f^3}^2 Y - \mathsf{K}\left(f\grave{\mathrm{I}} f^3 X\right)f^3 Y = 0;\\ &\forall X, Y \in \mathsf{X}(M)\end{aligned} \quad . \qquad (10)$$

3) Теперь распишем соотношения:

$$\begin{aligned}&\mathsf{K}^{0}_{a0\hat{b}} = \frac{1}{2n-1} A^{bc}_{ac}\xi^{0};\\ &\mathsf{K}^{c}_{a0\hat{b}} = \frac{1}{2n-1} A^{bc}_{ac}\xi^{c} = 0;\\ &\mathsf{K}^{\hat{c}}_{a0\hat{b}} = \frac{1}{2n-1} A^{bc}_{ac}\xi^{\hat{c}} = 0\end{aligned} ,$$

т. е. $\mathsf{K}^{i}_{a0\hat{b}} = \dfrac{1}{2n-1} A^{bc}_{ac}\xi^{i}$.

Последнее равенство запишем в виде

$$\mathsf{K}\left(\xi, \varepsilon_{\hat{b}}\right)\varepsilon_a = \frac{1}{2n-1} A(\varepsilon_a), \varepsilon_{\hat{b}}\xi .$$

Так как $\{\varepsilon_a\}, \{\varepsilon_{\hat{a}}\}$ образуют базис подпространств $D^{\sqrt{-1}}_{f^3}$ и $D^{-\sqrt{-1}}_{f^3}$, а проекторами модуля $\mathsf{X}(M)$ на эти подпространства являются эндоморфизмы

$$\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}\left({f^3}^2 + \sqrt{-1} f^3\right)$$

и $\pi = \sigma \circ l = \dfrac{1}{2}\left(-{f^3}^2 + \sqrt{-1} f^3\right)$,

то

$$\begin{aligned}&\mathsf{K}\left(\xi, -{f^3}^2 X + \sqrt{-1} f^3 X\right)\left({f^3}^2 Y + \sqrt{-1} f^3 Y\right) =\\ &= \frac{1}{2n-1}\left\langle \overline{A}\left(-{f^3}^2 X + \sqrt{-1} f^3 X\right), {f^3}^2 Y + \sqrt{-1} f^3 Y\right\rangle \xi;\\ &\forall X, Y \in \mathsf{X}(M)\end{aligned} .$$

Полученное тождество равносильно следующему тождеству:

$$\begin{aligned}&\mathsf{K}\left(\xi, {f^3}^2 X\right){f^3}^2 Y + \mathsf{K}\left(\xi, f^3 X\right)f^3 Y =\\ &= \frac{2}{2n-1}\left\langle \overline{\mathsf{A}}(X), Y\right\rangle \xi; \forall X, Y \in \mathsf{X}(M).\end{aligned} \qquad (11)$$

С учетом (10) последнее тождество запишется в виде:

$$\begin{aligned}&\mathsf{K}\left(\xi, {f^3}^2 X\right){f^3}^2 Y = \mathsf{K}\left(\xi, f^3 X\right)f^3 Y =\\ &= \frac{2}{2n-1}\left\langle \overline{\mathsf{A}}(X), Y\right\rangle \xi; \forall X, Y \in \mathsf{X}(M).\end{aligned} \qquad (12)$$

Назовем тождество (12) ***вторым дополнительным тождеством конгармонической кривизны АС-многообразия класса*** $\boldsymbol{C}_{11}$.

Определение 2. Скажем, что *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ удовлетворяет ***второму дополнительному тождеству конгармонической кривизны*** или является ***многообразием класса*** K_2, если тензор конгармонической кривизны удовлетворяет тождеству.

$$\mathsf{K}\left(\xi, {f^3}^2 X\right){f^3}^2 Y = \mathsf{K}\left(\xi, f^3 X\right)f^3 Y = 0 . \qquad (13)$$

Пусть *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ является многообразием класса K_2. Тогда, по определению 2, имеет место равенство $\mathsf{K}\left(\xi, f^3 X\right)f^3 Y = 0$. Последнее равенство на пространстве присоединенной *G*-структуры запишется в виде $\mathsf{K}^{i}_{j0k}\left(f^3 X\right)^{k}\left(f^3 Y\right)^{j} = 0$. С учетом (6) и вида матрицы Ф, последнее равенство запишется в виде: $\mathsf{K}^{0}_{a0\hat{b}} X^{\hat{b}} Y^{a} + \mathsf{K}^{0}_{\hat{a}0b} X^{b} Y^{\hat{a}} = 0$. Полученное равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathsf{K}^{0}_{a0\hat{b}} = \mathsf{K}^{0}_{\hat{a}0b} = 0$. Согласно (6:1) полученные равенства равносильны соотношению $A^{bc}_{ac} = 0$. Полученные соотношения согласно (3) означают, что многообразие является Риччи плоским.

Обратно, для Риччи плоского *АС*-многообразия класса $\boldsymbol{C}_{11}$ имеем, что $\mathsf{K}^{0}_{a0\hat{b}} = \mathsf{K}^{0}_{\hat{a}0b} = 0$. т.

е. многообразие является многообразием класса K_2.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 5. *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса K_2 тогда и только тогда, когда *АС*-многообразие класса C_{11} является риччи-плоским многообразием.

Замечание 1. Из теорем 4 и 5 следует, что *АС*-многообразия класса K_1 являются многообразиями класса K_2.

4) Применяя процедуру восстановления тождества к соотношениям $\mathsf{K}^0_{bcd}=0, \mathsf{K}^a_{bcd}=0, \mathsf{K}^{\hat a}_{bcd}=0$, получим тождество

$$\begin{aligned}&\mathsf{K}\left(f^{32}X,f^{32}Y\right)f^{32}Z-\mathsf{K}\left(f^{32}X,f^{3}Y\right)f^{3}Z-\\&-\mathsf{K}\left(f^{3}X,f^{32}Y\right)f^{3}Z-\mathsf{K}\left(f^{3}X,f^{3}Y\right)f^{32}Z=0;\\&\forall X,Y,Z\in \mathrm{X}(M)\end{aligned} \quad (14)$$

5) Рассмотрим соотношения: , т. е.

$$\mathsf{K}^i_{bc\hat d}=A^{id}_{bc}+\frac{1}{2n-1}\left(\delta^i_c A^{dh}_{bh}+\delta^d_b A^{ih}_{ch}\right).$$

Последнее соотношение запишем в виде:

$$\mathsf{K}\left(\varepsilon_c,\varepsilon_{\hat d}\right)\varepsilon_b=A\left(\varepsilon_b,\varepsilon_c,\varepsilon_{\hat d}\right)+\frac{1}{2n-1}\left\{\varepsilon_c\, A(\varepsilon_b),\varepsilon_{\hat d}+\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat d}\, A(\varepsilon_c)\right\}.$$

Так как $\{\varepsilon_a\},\{\varepsilon_{\hat a}\}$ образуют базис подпространств $D^{\sqrt{-1}}_{f^3}$ и $D^{-\sqrt{-1}}_{f^3}$, а проекторами модуля $\mathrm{X}(M)$ на эти подпространства являются эндоморфизмы

$$\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}\left(f^{32}+\sqrt{-1}f^{3}\right) \text{ и } \pi=\sigma\circ l=\frac{1}{2}\left(-f^{32}+\sqrt{-1}f^{3}\right), \text{ то}$$

$$\begin{aligned}&K\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right)=\\&=\mathrm{A}(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z,\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y)+\\&+\frac{1}{2\mathrm{n}-1}\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right)\left\langle\overline{\mathrm{A}}(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z),-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right\rangle+\\&+\frac{1}{2\mathrm{n}-1}\overline{\mathrm{A}}\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right)\left\langle(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z),-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right\rangle;\forall X,Y,Z\in \mathrm{X}(M).\end{aligned}$$

Раскрывая по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим, что последнее тождество равносильно следующему тождеству:

$$\begin{aligned}&K\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+K\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z-K\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z+K\left(\Phi X,\Phi Y\right)\Phi^2Z=\\&=\mathrm{A}(\Phi^2Z,\Phi^2X,\Phi^2Y)+\mathrm{A}(\Phi^2Z,\Phi X,\Phi Y)+\mathrm{A}(\Phi Z,\Phi^2X,\Phi Y)-\mathrm{A}(\Phi Z,\Phi X,\Phi^2Y)+\\&+\frac{1}{2\mathrm{n}-1}\left\{\Phi^2X\left\langle\overline{\mathrm{A}}(\Phi^2Z),\Phi^2Y\right\rangle+\Phi^2X\left\langle\overline{\mathrm{A}}(\Phi Z),\Phi Y\right\rangle+\Phi X\left\langle\overline{\mathrm{A}}(\Phi^2Z),\Phi Y\right\rangle\right\}+\\&+\frac{1}{2\mathrm{n}-1}\left\{-\Phi X\left\langle\overline{\mathrm{A}}(\Phi Z),\Phi^2Y\right\rangle+\overline{\mathrm{A}}\left(\Phi^2X\right)\left\langle(\Phi^2Z),\Phi^2Y\right\rangle+\overline{\mathrm{A}}\left(\Phi^2X\right)\left\langle(\Phi Z),\Phi Y\right\rangle\right\}\\&+\frac{1}{2\mathrm{n}-1}\left\{\overline{\mathrm{A}}\left(\Phi X\right)\left\langle(\Phi^2Z),\Phi Y\right\rangle-\overline{\mathrm{A}}\left(\Phi X\right)\left\langle(\Phi Z),\Phi^2Y\right\rangle\right\}\ \forall X,Y,Z\in \mathrm{X}(M).\end{aligned}$$

Используя свойства тензора A [3] и равенство $\left\langle f^{32}Z,f^{32}Y\right\rangle=\left\langle f^{3}Z,f^{3}Y\right\rangle$, последнее тождество можно переписать в виде:

$$K\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z + K\left(\Phi^2 X,\Phi Y\right)\Phi Z - K\left(\Phi X,\Phi^2 Y\right)\Phi Z + K\left(\Phi X,\Phi Y\right)\Phi^2 Z =$$
$$= -4\mathrm{A}(Z,X,Y) + \frac{2}{2\mathrm{n}-1}\left\{\left\langle\overline{\mathrm{A}}(Z),Y\right\rangle\Phi^2 X - \Omega\left(\overline{\mathrm{A}}(Z),Y\right)\Phi X - \overline{\mathrm{A}}(X)\left\langle\Phi Z,\Phi Y\right\rangle - \Phi\overline{\mathrm{A}}(X)\Omega(Z,Y)\right\}$$
$$\forall X,Y,Z \in \mathrm{X}(M).$$

Полученное тождество с учетом (14) запишется в виде:

$$K\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z - K\left(\Phi X,\Phi^2 Y\right)\Phi Z =$$
$$= -4\mathrm{A}(Z,X,Y) + \frac{2}{2\mathrm{n}-1}\left\{\left\langle\overline{\mathrm{A}}(Z),Y\right\rangle\Phi^2 X - \Omega\left(\overline{\mathrm{A}}(Z),Y\right)\Phi X - \overline{\mathrm{A}}(X)\left\langle\Phi \mathrm{Z},\Phi Y\right\rangle - \Phi\overline{\mathrm{A}}(X)\Omega(Z,Y)\right\}$$
$$\forall X,Y,Z \in \mathrm{X}(M). \tag{15}$$

Назовем тождество (15) ***третьим дополнительным тождеством конгармонической кривизны АС-многообразия класса C_{11}***.

Определение 3. Скажем, что *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ удовлетворяет ***третьему дополнительному тождеству конгармонической кривизны*** или является ***многообразием класса $\mathbf{K}_3$***, если тензор конгармонической кривизны удовлетворяет тождеству

$$\mathrm{K}\left(f^{3\,2} X, f^{3\,2} Y\right)f^{3\,2} Z - \mathrm{K}\left(f^3 X, f^{3\,2} Y\right)f^3 Z = 0;\quad \forall X,Y,Z \in \mathrm{X}(M) \tag{16}$$

Пусть $\left(M^{2n+1},\xi,\eta,f^3,g\right)$ является *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$, удовлетворяющее третьему дополнительному тождеству конгармонической кривизны, т. е. является многообразием класса $\mathbf{K}_3$. Тогда согласно определения 3 имеем

$$\mathrm{K}\left(f^{3\,2} X, f^{3\,2} Y\right)f^{3\,2} Z - \mathrm{K}\left(f^3 X, f^{3\,2} Y\right)f^3 Z = 0;\quad \forall X,Y,Z \in \mathrm{X}(M).$$

На пространстве присоединенной *G*-структуры это равенство, с учетом (6) и вида матрицы эндоморфизма Φ, примет вид: $\mathrm{K}^a_{bc\hat{d}} = 0$, т. е. $A^{ad}_{bc} + \frac{1}{2n-1}\left(\delta^a_c A^{dh}_{bh} + \delta^d_b A^{ah}_{ch}\right) = 0$. Свернем последнее равенство по индексам *c* и *d*, тогда получим: $\frac{2n+1}{2n-1}A^{ac}_{bc} = 0$. Отсюда, $A^{ac}_{bc} = 0$. С учетом полученного равенства имеем: $A^{ad}_{bc} = 0$. Таким образом, многообразие класса $\mathbf{K}_3$ является плоским многообразием. И поскольку для плоского многообразия выполнено равенство $\mathrm{K}^a_{bc\hat{d}} = 0$, то доказана следующая теорема.

Теорема 6. *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ является многообразием класса $\mathbf{K}_3$ тогда и только тогда, когда *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ является плоским многообразием.

6) Наконец рассмотрим соотношения: , т. е.

$$\mathrm{K}^i_{b\hat{c}\hat{d}} = \frac{1}{2n-1}\left(\delta^i_{\hat{c}} A^{dh}_{bh} - \delta^c_b A^{ih}_{\hat{d}h} + \delta^d_b A^{ih}_{\hat{c}h} - \delta^i_{\hat{d}} A^{ch}_{bh}\right).$$

Полученное соотношение перепишем в форме:

$$\mathrm{K}\left(\varepsilon_{\hat{c}},\varepsilon_{\hat{d}}\right)\varepsilon_b = \frac{1}{2n-1}\left\{\varepsilon_{\hat{c}}\left\langle A(\varepsilon_b),\varepsilon_{\hat{d}}\right\rangle - A\left(\varepsilon_{\hat{d}}\right)\left\langle\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}}\right\rangle + A\left(\varepsilon_{\hat{c}}\right)\left\langle\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{d}}\right\rangle - \varepsilon_{\hat{d}}\left\langle A(\varepsilon_b),\varepsilon_{\hat{c}}\right\rangle\right\}.$$

Так как $\{\varepsilon_a\},\{\varepsilon_{\hat a}\}$ образуют базис подпространств $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $D_{f^3}^{-\sqrt{-1}}$, а проекторами модуля $\mathrm{X}(M)$ на эти подпространства являются эндоморфизмы $\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}\left(f^{3^2}+\sqrt{-1}f^3\right)$ и $\pi=\sigma\circ l=\frac{1}{2}\left(-f^{3^2}+\sqrt{-1}f^3\right)$, то

$$
\begin{gathered}
K\left(-\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right)=\\
=\frac{1}{2n-1}\left(-\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right)\left\langle\overline{A}\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right),-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right\rangle-\\
-\frac{1}{2n-1}\left(-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\left\langle\overline{A}\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right),-\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right\rangle+\\
+\frac{1}{2n-1}\overline{A}\left(-\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right)\left\langle\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right),-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right\rangle-\\
-\frac{1}{2n-1}\overline{A}\left(-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\left\langle\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right),-\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right\rangle;\\
\forall X,Y,Z\in X(M).
\end{gathered}
$$

Раскрывая по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим, что последнее тождество равносильно следующему тождеству:

$$
\begin{gathered}
K\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\left(\Phi^2Z\right)+K\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\left(\Phi Z\right)+K\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\left(\Phi Z\right)-K\left(\Phi X,\Phi Y\right)\left(\Phi^2Z\right)=\\
=\frac{1}{2n-1}\left\{\Phi^2X\left\langle\overline{A}\left(\Phi^2Z\right),\Phi^2Y\right\rangle+\Phi^2X\left\langle\overline{A}\left(\Phi Z\right),\Phi Y\right\rangle-\Phi X\left\langle\overline{A}\left(\Phi^2Z\right),\Phi Y\right\rangle\right\}+\\
+\frac{1}{2n-1}\left\{\Phi X\left\langle\overline{A}\left(\Phi Z\right),\Phi^2Y\right\rangle-\overline{A}\left(\Phi^2Y\right)\left\langle\Phi^2Z,\Phi^2X\right\rangle-\overline{A}\left(\Phi^2Y\right)\left\langle\Phi Z,\Phi X\right\rangle\right\}+\\
+\frac{1}{2n-1}\left\{\overline{A}\left(\Phi Y\right)\left\langle\Phi^2Z,\Phi X\right\rangle-\overline{A}\left(\Phi Y\right)\left\langle\Phi Z,\Phi^2X\right\rangle+\overline{A}\left(\Phi^2X\right)\left\langle\Phi^2Z,\Phi^2Y\right\rangle\right\}+\\
+\frac{1}{2n-1}\left\{\overline{A}\left(\Phi^2X\right)\left\langle\Phi Z,\Phi Y\right\rangle-\overline{A}\left(\Phi X\right)\left\langle\Phi^2Z,\Phi Y\right\rangle\right\}+\\
+\frac{1}{2n-1}\left\{\overline{A}\left(\Phi X\right)\left\langle\Phi Z,\Phi^2Y\right\rangle-\Phi^2Y\left\langle\overline{A}\left(\Phi^2Z\right),\Phi^2X\right\rangle-\Phi^2Y\left\langle\overline{A}\left(\Phi Z\right),\Phi X\right\rangle\right\}+\\
+\frac{1}{2n-1}\left\{\Phi Y\left\langle\overline{A}\left(\Phi^2Z\right),\Phi X\right\rangle-\Phi Y\left\langle\overline{A}\left(\Phi Z\right),\Phi^2X\right\rangle\right\}\forall X,Y,Z\in X(M).
\end{gathered}
$$

Согласно (15), свойств тензора $\overline{A}$ и равенства $\left\langle f^{3^2}Z,f^{3^2}Y\right\rangle=\left\langle f^3Z,f^3Y\right\rangle$, последнее тождество можно переписать в виде:

$$
\begin{gathered}
K\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\left(\Phi^2Z\right)-K\left(\Phi X,\Phi Y\right)\left(\Phi^2Z\right)=\\
=\frac{2}{2n-1}\left\{\Phi^2X\left\langle\overline{A}(Z),Y\right\rangle-\Phi^2Y\left\langle\overline{A}(Z),X\right\rangle+\Phi X\Omega\left(\overline{A}(Z),Y\right)-\Phi Y\Omega\left(\overline{A}(Z),X\right)\right\}+\\
+\frac{2}{2n-1}\left\{\overline{A}(Y)\left\langle\Phi Z,\Phi X\right\rangle-\overline{A}(X)\left\langle\Phi Z,\Phi Y\right\rangle+\overline{A}\left(\Phi^2X\right)\left\langle\Phi^2Z,\Phi^2Y\right\rangle\right\}+\\
+\frac{2}{2n-1}\left\{\Phi\overline{A}(Y)\Omega(X,Z)-\Phi\overline{A}(X)\Omega(Y,Z)\right\}\forall X,Y,Z\in X(M).
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Назовем тождество (17) ***четвертым дополнительным тождеством конгармонической кривизны AC-многообразия класса*** $\boldsymbol{C}_{11}$.

Определение 4. Скажем, что AC-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ удовлетворяет ***четвертому дополнительному тождеству конгармонической кривизны*** или является ***многообразием класса*** $\mathbf{K}_4$, если тензор конгармонической кривизны удовлетворяет тождеству

$$\mathrm{K}\left(f^{3^2}X, f^{3^2}Y\right)f^{3^2}Z - \mathrm{K}\left(f^3X, f^3Y\right)f^{3^2}Z = 0; \quad \forall X, Y, Z \in \mathrm{X}(M) \tag{18}$$

Пусть $\left(M^{2n+1}, \xi, \eta, f^3, g\right)$ является AC-многообразием класса $\boldsymbol{C}_{11}$ удовлетворяющее четвертому дополнительному тождеству конгармонической кривизны, т. е. является многообразием класса $\mathbf{K}_4$. Тогда его тензор конгармонической кривизны удовлетворяет тождеству (18), которое на пространстве присоединенной G-структуры запишется в виде:

$$\mathrm{K}^i_{jkl}\left(f^{3^2}X\right)^k\left(f^{3^2}Y\right)^l\left(f^{3^2}Z\right)^j - \mathrm{K}^i_{jkl}\left(f^3X\right)^k\left(f^3Y\right)^l\left(f^{3^2}Z\right)^j = 0.$$

С учетом (6) и вида матрицы Φ, последнее равенство запишется в виде:

$$\mathrm{K}^d_{\hat{a}bc}X^bY^cZ_a + \mathrm{K}^{\hat{d}}_{a\hat{b}\hat{c}}X_bY_cZ^a = 0.$$

Полученное равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{K}^d_{\hat{a}bc} = \mathrm{K}^d_{a\hat{b}\hat{c}} = 0$. Согласно (6),

$$\mathrm{K}_{\hat{a}\hat{b}cd} = \frac{1}{2n-1}\left(S_{\hat{b}d}\delta^a_c - S_{\hat{b}c}\delta^a_d + \delta^b_d S_{\hat{a}c} - \delta^b_c S_{\hat{a}d}\right) = 0.$$

Последнее равенство свернем сначала по индексам a и c, тогда

$$\frac{1}{2n-1}\left\{S_{\hat{b}d}(n-2) + \delta^b_d S_{\hat{a}a}\right\} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$S_{\hat{b}d} = -\frac{\chi}{2(n-2)}\delta^b_d,$$

т. е. многообразие является многообразием Эйнштейна с космологической константой равной

$$\varepsilon = \frac{\chi}{2(n-2)}.$$

Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 7. AC-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$, являющееся многообразием класса $\mathbf{K}_4$ является многообразием Эйнштейна с космологической константой равной $\varepsilon = \dfrac{\chi}{2(n-2)}$. В частности, в случае полноты и связности оно компактно и имеет конечную фундаментальную группу.

Теперь свернем равенство $\dfrac{1}{2n-1}\left\{S_{\hat{b}d}(n-2) + \delta^b_d S_{\hat{a}a}\right\} = 0$, т. е. $S_{\hat{b}d}(n-2) + \delta^b_d S_{\hat{a}a} = 0$ по индексам b и d, тогда получим $2(n-1)S_{\hat{a}a} = 0$. Из последнего равенства имеем: а) $n = 1$, т. е. $dimM = 3$; б) $S_{\hat{a}a} = 0$. Из равенств $S_{\hat{b}d}(n-2) + \delta^b_d S_{\hat{a}a} = 0$ и $S_{\hat{a}a} = 0$ следует, что либо $n = 2$, т. е. $dimM = 5$, либо $S_{\hat{a}b} = 0$, т. е. многообразие является Риччи плоским многообразием.

Обратно, если AC-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ размерности больше 5 является Риччи плоским многообразием, то $\mathrm{K}_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$, т. е. многообразие является $\mathbf{K}_4$-многообразием.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 8. AC-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ размерности больше 5 является $\mathbf{K}_4$-многообразием тогда и только тогда, когда оно является Риччи плоским многообразием.

Замечание 2. Поскольку тензор конгармонической кривизны обладает свойствами тензора кривизны, в частности, $\mathrm{K}^a_{\hat{b}cd} + \mathrm{K}^a_{\hat{c}db} + \mathrm{K}^a_{\hat{d}cb} = 0$, то из $\mathrm{K}^a_{\hat{b}cd} = 0$ следует, что $\mathrm{K}^a_{\hat{d}cb} = 0$, т. е. многообразие класса $\mathbf{K}_3$ является многообразием класса $\mathbf{K}_4$.

Кроме того, мы имеем следующую теорему.

Теорема 9. Тензор конгармонической кривизны AC-многообразий класса $\boldsymbol{C}_{11}$ обладает следующими тождествами:

$$1)\ K(\xi, f^{32}X)\xi = -\frac{1}{2n-1}A(f^{32}X) = \frac{1}{2n-1}A(X);$$

$$2)\ K(\Phi^2X, \Phi^2Y)\xi - K(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;$$

$$3)\ K(\Phi^2X, \Phi^2Y)\xi + K(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;$$

$$4)\ K(\xi, \Phi^2X)\Phi^2Y - K(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;$$

$$5)\ K(\xi, \Phi^2X)\Phi^2Y + K(\xi, \Phi X)\Phi Y = \frac{2}{2n-1}\left\langle \overline{A}(X), Y\right\rangle \xi;$$

$$6)\ K(\xi, \Phi^2X)\Phi^2Y = K(\xi, \Phi X)\Phi Y = \frac{2}{2n-1}\left\langle \overline{A}(X), Y\right\rangle \xi;$$

$$7)\ K(f^{32}X, f^{32}Y)f^{32}Z - K(f^{32}X, f^{3}Y)f^{3}Z - K(f^{3}X, f^{32}Y)f^{3}Z - K(f^{3}X, f^{3}Y)f^{32}Z = 0;$$

$$8)\ K(\Phi^2X, \Phi^2Y)\Phi^2Z - K(\Phi X, \Phi^2Y)\Phi Z = -4\mathrm{A}(Z, X, Y) +$$

$$+\frac{2}{2\mathrm{n}-1}\left\{\left\langle \overline{\mathrm{A}}(Z), Y\right\rangle \Phi^2X - \Omega(\overline{\mathrm{A}}(Z), Y)\Phi X - \overline{\mathrm{A}}(X)\langle \Phi \mathrm{Z}, \Phi Y\rangle - \Phi\overline{\mathrm{A}}(X)\Omega(Z, Y)\right\}$$

$$9)\ K(\Phi^2X, \Phi^2Y)(\Phi^2Z) - K(\Phi X, \Phi Y)(\Phi^2Z) =$$

$$= \frac{2}{2n-1}\left\{\Phi^2X\left\langle \overline{A}(Z), Y\right\rangle - \Phi^2Y\left\langle \overline{A}(Z), X\right\rangle + \Phi X\Omega(\overline{A}(Z), Y) - \Phi Y\Omega(\overline{A}(Z), X)\right\} +$$

$$+\frac{2}{2n-1}\left\{\overline{A}(Y)\langle \Phi Z, \Phi X\rangle - \overline{A}(X)\langle \Phi Z, \Phi Y\rangle + \overline{A}(\Phi^2X)\langle \Phi^2Z, \Phi^2Y\rangle\right\} +$$

$$+\frac{2}{2n-1}\left\{\Phi\overline{A}(Y)\Omega(X, Z) - \Phi\overline{A}(X)\Omega(Y, Z)\right\}\ \forall X, Y, Z \in \mathrm{X}(M).$$

Список литературы

1. Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. *Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий.* // Математический сборник, т. 193, №8, 71–100.
2. Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н. *Дифференциальная геометрия почти контактных метрических многообразий класса* $\boldsymbol{C}_{11}$. // Вестник ОГУ, №9 (115), сентябрь 2010, с. 65–68.
3. Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н. *Тождества кривизны многообразий класса* $\boldsymbol{C}_{11}$. // Вестник ОГУ, № 6 (125), июнь 2011, с. 169–171.
4. Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н. *Геометрия тензора конциркулярной кривизны АС-многообразий класса* C_{11}. // Вестник ОГУ, № 9 (170), сентябрь 2014, с. 114–120.
5. Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н. *Геометрия тензора Вейля конформной кривизны АС-многообразий класса* C_{11}. // Актуальные проблемы математики и смежные вопросы. Материалы международной научной конференции «Мухтаровские чтения». 22-23 апреля. Махачкала, 2014, с. 89-96.
6. Chinea D., Gonzalez C. *Classification of almost contact metric structures.* // Annali di Matematica pura ed applicata (IV), v. CLVI, 1990, p. 15–36.
7. Ishii Y. *On conharmonic transformations.* // Tensor, 7(2), 1957, 73-80.
8. U.C. De, R.N. Singh, Shravan K. Pandey. *On the Conharmonic Curvature Tensor of Generalized Sasakian-Space-Forms.* // International Scholarly Research Network ISRN Geometry. Volume 2012, Article ID 876276, 14 pages doi:10.5402/2012/876276.
9. V.F. Kirichenko, A.A. Shihab. *On the geometry of conharmonic curvature tensor for nearly Kahler manifolds.* // Journal of Mathematical Sciences, September 2011, Volume 177, Issue 5, pp 675-683.
10. Mohit Kumar *Dwivedi, Jeong-Sik Kim. On Conharmonic Curvature Tensor in K-contact and Sasakian Manifolds.* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 34(1) (2011), 171–180. http://math.usm.my/bulletin
11. V. F. Kirichenko, A. R. Rustanov, A. A. Shikhab, *Geometry of the Conharmonic Curvature Tensor of Almost Hermitian Manifolds*, Mat. Zametki, 2011, Volume 90, Issue 1, 87–103. http://www.mathnet.ru/eng/agreement
12. Ali Akbar, Avijit Sarkar, *On the Conharmonic and Concircular curvature tensors of almost C(?) manifolds*, International Journal of Advanced Mathematical Sciences (IJMSEA), **1**:3 (2013), 134-138.
13. Ali A. Shihab. *On the geometry of conharmonic curvtuar tensor of nearly kahler manifold.* // Journal of Basrah Researches ((Sciences)) Volume 37. Number 4 C ((2011)), 39 – 48.

14. Ghosh Sujit; De U.C.; Taleshian A. *Conharmonic Curvature Tensor on N(K)-Contact Metric Manifolds* // ISRN Geometry;2011, Special section p1.
15. Харитонова С.В. Тензор конгармонической кривизны нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий // ВЕСТНИК ОГУ №12 (161)/декабрь"2013, 182 – 186.

Сведения об авторах:

Рустанов Алигаджи Рабаданович, доцент кафедры теории и истории социологии Московского педагогического государственного университета, кандидат физико-математических наук
142735, г. Москва, пр-т Вернадского, дом 88, тел.: (495) 4381845, e-mail: tsi@mpgu.edu

Герасименко Сергей Алексеевич, декан математического факультета Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, дом 13, корп. 20, тел.: (3532) 372530, e-mail: mf@mail.osu.ru

Щипкова Нина Николаевна, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, дом 13, корп. 1, тел.: (3532) 372539, e-mail: ais@mail.osu.ru