УДК 514.76

Герасименко С.А.[1], Рустанов А.Р.[2], Щипкова Н.Н.[1]
[1]Оренбургский государственный университет,
E-mail: gsa_57@mail.ru ; ningeom@pochtamt.ru
[2]Московский педагогический государственный университет
E-mail: aligadzhi@yandex.ru

АНАЛОГИ ТОЖДЕСТВ ГРЕЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА КОНГАРМОНИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ *AC*-МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА C_{11}

Основной целью работы является изучение геометрии тензора конгармонической кривизны *AC*-многообразий класса C_{11}. С этой целью решаются следующие две задачи:

1. Получить контактные аналоги тождеств Грея для тензора конгармонической кривизны, введенного в рассмотрение Иши.

2. На основе этих тождеств выделить и изучить подклассы *AC*-многообразий класса C_{11}.

В работе определены три класса почти контактных метрических многообразий класса C_{11}, названных как $G\mathrm{K}_1-, G\mathrm{K}_2-$ è $G\mathrm{K}_3$ – многообразиями. В теореме 1 получены условия на компоненты тензора конгармонической кривизны на пространстве присоединенной *G*-структуры при которых почти контактная метрическая структура класса C_{11} принадлежит выделенным классам.

В теореме 2 доказано, что *AC*-многообразие класса C_{11} является $G\mathrm{K}_3$ -многообразием и $G\mathrm{K}_2$ -многообразием.

В теореме 3 доказано, что *AC*-многообразие класса C_{11}, являющееся $G\mathrm{K}_1$ -многообразием, является многообразием Эйнштейна с космологической константой равной $f\tilde{A} \frac{f\hat{O}}{2(n-2)}$. В частности, в случае полноты и связности оно компактно и имеет конечную фундаментальную группу.

И наконец, в теореме 4 доказано, что *AC*-многообразие класса C_{11} размерности больше 5 является $G\mathrm{K}_1$ -многообразием тогда и только тогда, когда оно является Риччи плоским многообразием.

Ключевые слова. Тождества Грея, тензор Римана-Кристоффеля, тензор Риччи, тензор конгармонической кривизны.

Конформные преобразования римановой структуры являются важным объектом изучения в дифференциальной геометрии. Значительный интерес представляет специальный тип конформных преобразований – конгармонические преобразования, т. е. конформные преобразования, сохраняющие свойство гармоничности гладких функций. Этот тип преобразований был введен в рассмотрение Иши [7] в 1957 году и в настоящее время изучается с различных точек зрения [8]–[15]. Известно, что такие преобразования имеют тензорный инвариант – так называемый тензор конгармонической кривизны. Этот тензор является алгебраическим тензором кривизны, т. е. он обладает классическими свойствами симметрии тензора римановой кривизны. Пополнение римановой структуры до почти контактной метрической структуры позволяет выделить еще несколько конгармонических инвариантов – элементов спектра тензора конгармонической кривизны.

Широко известно высказывание А. Грея о том, что ключом к геометрии почти эрмитовых многообразий являются тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны [6].

В настоящей работе изучаются контактные аналоги тождеств Грея, которым удовлетворяет тензор конгармонической кривизны почти контактных метрических многообразий класса C_{11} в классификации Чинья и Гонзалеза [5]. Интерес к данному классу многообразий объясняется тем, что является обобщением хорошо изученного класса косимплектических многообразий.

Данный класс многообразий изучался в работах [1]–[4]. Здесь же мы продолжим изучение данного класса многообразий и изучим некоторые вопросы геометрии тензора конгармонической кривизны. В дальнейшем почти контактные метрические многообразия будем обозначать как *AC*-многообразия.

Пусть M^{2n+1} – *AC*-многообразие класса C_{11}. Тензор конгармонической кривизны *AC*-структуры в терминах компонент вычисляется по формуле [7]:

$$\mathrm{K}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + \frac{1}{2n-1}\left(\delta^i_k S_{jl} - \delta^i_l S_{jk} + g_{jl} S^i_k - g_{jk} S^i_l\right), \quad (1)$$

где R^i_{jkl} – компоненты тензора римановой кривизны, S^i_k – компоненты тензора Риччи, g_{jl} – компоненты метрического тензора.

Как легко показать из (1) тензор конгармонической кривизны обладает всеми классическими свойствами симметрии тензора Римана-Кристоффеля.

Компоненты тензора Римана-Кристоффеля $\{R^i_{jkl}\}$ на пространстве присоединенной G-структуры AC-многообразия класса $\boldsymbol{C}_{11}$ имеют вид [1]:

$$1)\, R^a_{bc\hat d} = A^{ad}_{bc};\quad 2)\, R^{\hat a}_{\hat b c\hat d} = -A^{bd}_{ac}, \qquad (2)$$

а остальные компоненты нулевые. Компоненты тензора Риччи имеют вид:

$$S_{a\hat b} = S_{\hat b a} = A^{bc}_{ac}, \qquad (3)$$

остальные компоненты нулевые. В частности, скалярная кривизна с вычисляется по формуле [1] $\chi = g^{ij} r_{ij} = 2A^{ab}_{ab} = 2S_{a\hat a}$. На пространстве присоединенной G-структуры матрица метрического тензора имеет вид:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где I_n – единичная матрица порядка n.

Расписав компоненты тензора конгармонической кривизны на пространстве присоединенной G-структуры с учетом (2), (3), (4), получим, что на пространстве присоединенной G-структуры тензор конгармонической кривизны AC-многообразия класса $\boldsymbol{C}_{11}$ имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned}
&1)\, K_{0a0b} = \frac{1}{2n-1} S_{ab};\\
&2)\, K_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2n-1}\left(S_{bd}\delta^a_c + S_{ac}\delta^d_b\right) =\\
&\quad = A^{ad}_{bc} + \frac{1}{2n-1}\left(\delta^a_c A^{dh}_{bh} + \delta^d_b A^{ah}_{ch}\right), \qquad (5)\\
&3)\, K_{abcd} = \frac{1}{2n-1}\left(S_{bd}\delta^a_c - S_{bc}\delta^a_d + S_{ac}\delta^b_d - S_{ad}\delta^b_c\right) =\\
&\quad = \frac{1}{2n-1}\left(\delta^a_c A^{bh}_{dh} - \delta^a_d A^{bh}_{ch} + \delta^b_d A^{ah}_{ch} - \delta^b_c A^{ah}_{dh}\right),
\end{aligned}$$

плюс соотношения, полученные с учетом вещественности и свойств симметрии этого тензора как алгебраического тензора кривизны. Остальные компоненты тензора конгармонической кривизны равны нулю.

Контактными аналогами тождеств А.Грея [6] $R_1, R_2\, u\, R_3$ кривизны почти эрмитовых многообразий для тензора конгармонической кривизны являются тождества кривизны $G\mathrm{K}_1, G\mathrm{K}_2\, u\, G\mathrm{K}_3$ для почти контактных метрических многообразий:

$$G\mathrm{K}_1 : \mathrm{K}\left(f^3X, f^3Y\right)f^3Z, f^3W = \mathrm{K}\left(f^{3^2}X, f^{3^2}Y\right)f^3Z, f^3W;$$

$$\begin{aligned}
G\mathrm{K}_2 : \mathrm{K}\left(f^3X, f^3Y\right)f^3Z, f^3W &= \mathrm{K}\left(f^{3^2}X, f^{3^2}Y\right)f^3Z, f^3W +\\
+\mathrm{K}\left(f^{3^2}X, f^3Y\right)f^{3^2}Z, f^3W &+ \mathrm{K}\left(f^{3^2}X, f^3Y\right)f^3Z, f^{3^2}W;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&G\mathrm{K}_3 : \mathrm{K}\left(f^3X, f^3Y\right)f^3Z, f^3W =\\
&= \mathrm{K}\left(f^{3^2}X, f^{3^2}Y\right)f^{3^2}Z, f^{3^2}W;\ X, Y, Z \in \mathrm{X}(M).
\end{aligned}$$

Назовем AC-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$, обладающее тождествами $G\mathrm{K}_1, G\mathrm{K}_2\, u\, G\mathrm{K}_3$, соответственно, $G\mathrm{K}_1, G\mathrm{K}_2\, u\, G\mathrm{K}_3$ – многообразием.

Исследуем эти тождества.

Теорема 1. Пусть $S = \left(\xi, \eta, f^3, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ – AC-структура. Тогда:

(1) $S = \left(\xi, \eta, f^3, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ структура класса $G\mathrm{K}_1$ тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $\mathrm{K}_{abcd} = \mathrm{K}_{\hat a bcd} = \mathrm{K}_{\hat a\hat b cd} = 0$;

(2) $S = \left(\xi, \eta, f^3, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ структура класса $G\mathrm{K}_2$ тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $\mathrm{K}_{abcd} = \mathrm{K}_{\hat a bcd} = 0$;

(3) $S = \left(\xi, \eta, f^3, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ структура класса $G\mathrm{K}_3$ тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $\mathrm{K}_{\hat a bcd} = 0$.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы для тензора римановой кривизны и мы опускаем его.

Из теоремы 1 и (5) следует следующая теорема.

Теорема 2. AC-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ является $G\mathrm{K}_3$-многообразием и $G\mathrm{K}_2$-многообразием.

Пусть M является AC-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$, являющееся $G\mathrm{K}_1$-многообразием. Тогда согласно Теореме 1 имеет место равенство

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_{\hat a\hat b cd} &= \frac{1}{2n-1}\left(S_{\hat b d}\delta^a_c - S_{\hat b c}\delta^a_d + \delta^b_d S_{\hat a c} - \delta^b_c S_{\hat a d}\right) =\\
&= \frac{1}{2n-1}\left(\delta^a_c A^{bh}_{dh} - \delta^a_d A^{bh}_{ch} + \delta^b_d A^{ah}_{ch} - \delta^b_c A^{ah}_{dh}\right) = 0
\end{aligned}.$$

Свернем равенство $S_{\hat b d}\delta^a_c - S_{\hat b c}\delta^a_d + \delta^b_d S_{\hat a c} - \delta^b_c S_{\hat a d} = 0$ по индексам a и c, тогда $S_{\hat b d}(n-2) + \delta^b_d S_{\hat a a} = 0$. Из последнего равенства следует, что $S_{\hat b d} = -\frac{\chi}{2(n-2)}\delta^b_d$, т. е. многообразие является многообразием Эйнштейна с космологической константой равной $\varepsilon = \frac{\chi}{2(n-2)}$.

Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 3. AC-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$, являющееся $G\mathrm{K}_1$-многообразием, является многообразием Эйнштейна с космологической константой равной $\varepsilon=\frac{\chi}{2(n-2)}$. В частности, в случае полноты и связности оно компактно и имеет конечную фундаментальную группу.

Свернем равенство

$$K_{\hat{a}\hat{b}cd}=\frac{1}{2n-1}\left(\delta_c^a A_{dh}^{bh}-\delta_d^a A_{ch}^{bh}+\delta_d^b A_{ch}^{ah}-\delta_c^b A_{dh}^{ah}\right)=0$$

по индексам a и c, тогда

$$(n-2)A_{dh}^{bh}+\delta_d^b A_{ah}^{ah}=0. \quad (6)$$

Свернем полученное равенство по индексам b и d, тогда получим

$$(n-1)A_{ab}^{ab}=0. \quad (7)$$

Из последнего равенства имеем: а) $n=1$, т. е. $dimM=3$; б) $A_{ab}^{ab}=0$. С учетом последнего равенства, тождество (6) примет вид $(n-2)A_{dh}^{bh}=0$. т. е. либо $n=2$, т. е. $dimM=5$, либо $A_{dh}^{bh}=0$, т. е. многообразие в размерности больше 5 является Риччи плоским многообразием.

Обратно, если многообразие размерности больше 5 является Риччи плоским многообразием, то $K_{\hat{a}\hat{b}cd}=0$, т. е. многообразие является GK_1-многообразием.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *AC*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ размерности больше 5 является GK_1-многообразием тогда и только тогда, когда оно является Риччи плоским многообразием.

Список литературы:

1. Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н. *Дифференциальная геометрия почти контактных метрических многообразий класса* $\boldsymbol{C}_{11}$. // Вестник ОГУ, №9 (115), сентябрь 2010, с. 65–68.
2. Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н. *Тождества кривизны многообразий класса* $\boldsymbol{C}_{11}$. // Вестник ОГУ, № 6 (125), июнь 2011, с. 169–171.
3. Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н. *Геометрия тензора концциркулярной кривизны АС-многообразий класса* C_{11}. // Вестник ОГУ, № 9 (170), сентябрь 2014, с. 114–120.
4. Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н. *Геометрия тензора Вейля конформной кривизны АС-многообразий класса* C_{11}. // Актуальные проблемы математики и смежные вопросы. Материалы международной научной конференции «Мухтаровские чтения». 22-23 апреля. Махачкала, 2014, с. 89-96.
5. Chinea D., Gonzalez C. *Classification of almost contact metric structures.* // Annali di Matematica pura ed applicata (IV), v. CLVI, 1990, p. 15–36.
6. Gray A. *Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds.* // Tohoku Math. J., 1976, v.28, p. 601-612.
7. Ishii Y. *On conharmonic transformations.* // Tensor, 7(2), 1957, 73-80.
8. U.C. De, R.N. Singh, Shravan K. Pandey. *On the Conharmonic Curvature Tensor of Generalized Sasakian-Space-Forms.* // International Scholarly Research Network ISRN Geometry. Volume 2012, Article ID 876276, 14 pages doi:10.5402/2012/876276.
9. V.F. Kirichenko, A.A. Shihab. *On the geometry of conharmonic curvature tensor for nearly Kahler manifolds.* // Journal of Mathematical Sciences, September 2011, Volume 177, Issue 5, pp 675-683.
10. Mohit Kumar *Dwivedi, Jeong-Sik Kim. On Conharmonic Curvature Tensor in K-contact and Sasakian Manifolds.* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 34(1) (2011), 171–180. http://math.usm.my/bulletin
11. V. F. Kirichenko, A. R. Rustanov, A. A. Shikhab, *Geometry of the Conharmonic Curvature Tensor of Almost Hermitian Manifolds*, Mat. Zametki, 2011, Volume 90, Issue 1, 87–103. http://www.mathnet.ru/eng/agreement
12. Ali Akbar, Avijit Sarkar, *On the Conharmonic and Concircular curvature tensors of almost C(?) manifolds*, International Journal of Advanced Mathematical Sciences (IJMSEA), **1**:3 (2013), 134-138.
13. Ali A. Shihab. *On the geometry of conharmonic curvtuar tensor of nearly kahler manifold.* // Journal of Basrah Researches ((Sciences)) Volume 37. Number 4 C ((2011)), 39 – 48.
14. Ghosh Sujit; De U.C.; Taleshian A. *Conharmonic Curvature Tensor on N(K)-Contact Metric Manifolds* // ISRN Geometry;2011, Special section p1.
15. Харитонова С.В. Тензор конгармонической кривизны нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий // ВЕСТНИК ОГУ №12 (161)/декабрь"2013, 182 – 186.

Сведения об авторах:

Герасименко Сергей Алексеевич, декан математического факультета Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, дом 13, корп. 20, тел.: (3532) 37 25 30, e-mail: mf@mail.osu.ru

Рустанов Алигаджи Рабаданович, доцент кафедры теории и истории социологии Московского педагогического государственного университета, кандидат физико-математических наук
142735, г. Москва, пр-т Вернадского, дом 88, тел.: (495) 438 18 45, e-mail: tsi@mpgu.edu

Щипкова Нина Николаевна, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, дом 13, корп. 1, тел.: (3532) 37 25 39, ais@mail.osu.ru