УДК 372.853+53.088

Павленко А.Н., Пихтилькова О.А., Четверикова А.Г.
Оренбургский государственный университет
E-mail: pavlenko-a-n@mail.ru

К ВОПРОСУ ОБ ОРГАНИЗАЦИИ ВВОДНОГО КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ»

В статье рассмотрены различные подходы к введению курса «Математическая обработка экспериментальных данных». Отмечено, что применение традиционного статистического подхода имеет ряд существенных недостатков. Обоснована возможность экспериментального нахождения необходимого количества прямых измерений физической величины, достаточного для получения заданной предельной абсолютной погрешности. Имитировать результаты прямых измерений предложено с помощью компьютерного математического пакета MathCAD, генерируя случайную величину, имеющую нормальное распределение. В результате неоднократных измерений находится несмещенная оценка S среднего квадратичного отклонения σ, обеспечивающая предельную абсолютную погрешность результата Δ_x. Доказана целесообразность нахождения абсолютных погрешностей результатов косвенных измерений с помощью метода границ, для которого не требуется знаний, далеко выходящих за пределы школьной программы. Особенности применения данного подхода к обработке результатов косвенных измерений проиллюстрированы на двух примерах. Отмечается целесообразность использования интерактивных методических указаний, интегрированных с компьютерным математическим пакетом MathCAD, для повышения эффективности усвоения данного курса студентами естественнонаучных и инженерных направлений. В этом случае оперативный контроль правильности математической обработки экспериментальных данных в аудитории приводит к резкому увеличению мотивации студентов к изучению рассматриваемого материала.

Ключевые слова: математическая обработка экспериментальных данных, точность многократных прямых измерений, нормальное распределение, MathCAD, косвенные измерения, метод границ.

Вводный курс «Математическая обработка экспериментальных данных» изучается студентами естественнонаучных и инженерных направлений уже в начале первого семестра первого курса. Данный материал необходим для выполнения лабораторных работ по дисциплинам естественнонаучного цикла. Например, в каждой лабораторной работе общефизического практикума измеряется определенная величина, характеризующая изучаемое явление или свойство. Экспериментальное исследование зачастую состоит из нескольких (иногда сотен) измерений [1, стр. 3-5]. В традиционном изложении [2, стр. 15-25] данный курс базируется на разделах математики «Теория вероятностей», «Математическая статистика» и «Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных», которые изучаются студентами значительно позже. Очевидно, что изучение основ математической обработки экспериментальных данных вызывает у студентов серьезные трудности из-за необходимости использования еще не изученных понятий, свойств и методов.

Для повышения эффективности усвоения материала по математической обработке экспериментальных данных желательно, чтобы он был как-то обоснован, а не представлял собой перечень формул и алгоритмов, вводимых постулативно. Отсюда следует целесообразность использования других способов как для оценки необходимого количества прямых измерений для достижения достаточной точности результата, так и для нахождения предельной абсолютной погрешности косвенных измерений.

Традиционный способ [2, стр. 15-25] оценки необходимого количества измерений физической величины для получения заданной точности результата базируется на использовании статистических таблиц коэффициентов Стьюдента. Во введении уже было отмечено, что применение данного подхода имеет ряд существенных недостатков, с целью преодоления которых предлагается новый подход к методике изложения основных понятий теории погрешностей [3, стр. 114-116] и новый экспериментальный способ нахождения искомого числа прямых измерений [4, стр. 308]. Он включает следующие этапы.

1. Повторение изученных в средней школе понятий: приближенное число, абсолютная и относительная погрешность, значащая цифра числа.

2. Введение понятия систематической и случайной погрешностей и грубой ошибки.

Приведение примеров, иллюстрирующих эти виды погрешностей.

3. Подтверждение того, что среднее арифметическое большого числа измерений x_1, x_2, ..., x_n, вычисляемое по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

менее подвержено влиянию случайных погрешностей, чем единичное измерение, поэтому в качестве оценки измеряемой величины следует использовать величину $\overline{x}$. Для иллюстрации данного утверждения целесообразно приведение нескольких профессионально ориентированных примеров.

4. Объяснение с помощью рисунка 1 [5, стр. 168]) того факта, что наличие большого числа случайных погрешностей, не оказывающих на результат измерения определяющего влияния, приближают результаты измерений к истинному значению искомой величины. Причем, чем больше абсолютная погрешность конкретных измерений, тем такие результаты будут получены реже.

Степень «рассеивания» результатов измерений вокруг истинного значения измеряемой величины определяется так называемым средним квадратическим отклонением σ, которое будет оцениваться величиной s по формуле:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}.$$

5. Указание целесообразности экспериментального нахождения необходимого числа измерений, которое для данного значения среднего квадратического отклонения σ гарантирует необходимую абсолютную погрешность Δ_x при заданной доверительной вероятности.

Имитировать результаты измерений с заданной величиной σ удобно с помощью компьютерного математического пакета MathCAD [6], применив оператор rnorm, который генерирует случайную величину, имеющую нормальное распределение. В результате неоднократных измерений находится несмещенная оценка s среднего квадратичного отклонения σ, обеспечивающая предельную абсолютную погрешность результата Δ_x. Тогда, согласно алгоритму, приведенному на рисунке 2, находим подбором количество необходимых измерений n.

При выполнении лабораторных работ и экспериментальных исследований в рамках курсовых работ по естественнонаучным дисциплинам для нахождения предельных абсолютных погрешностей результатов косвенных измерений, как правило, применяется метод, базирующийся на использовании понятия дифференциала функции нескольких переменных [2, стр. 22]. Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных изучается в курсе математического анализа (математики) на вторых-третьих курсах. Таким образом, целесообразно применение других методов оценки погрешностей косвенных измерений, в рамках которых не требуется знаний, далеко выходящих за пределы школьной программы.

Элементарная теория погрешностей косвенных измерений представляет собой доста-

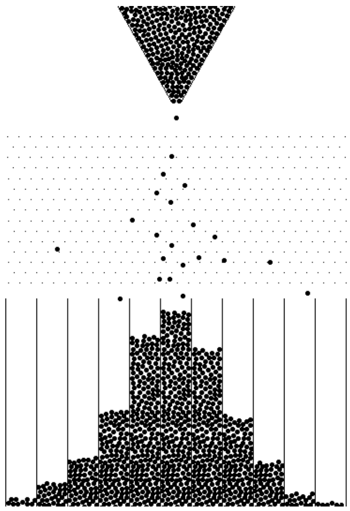

Рисунок 1. Иллюстрация распределения результатов многократных измерений

$$\sigma := 0.4 \quad \Delta := 0.3$$

$$n := 15$$

$$N := 10000 \quad i := 1, 2 .. N$$

$$x_i := \mathrm{rnorm}(n, 0, \sigma) \qquad X_i := \mathrm{mean}(x_i)$$

$$M := \sum_{i=1}^{N} \left[(X_i < \Delta)\cdot(X_i > -\Delta)\right]$$

$$\frac{M}{N}\cdot 100 = 99.63$$

Рисунок 2. Алгоритм нахождения необходимого количества измерений в среде MathCAD точно трудный для освоения материал ([7] и приведенная там литература) в разделе «Математическая обработка экспериментальных данных». Поэтому актуально [3, 4, 8] использование метода границ [9]. Не смотря на то, что метод не является новым, он, по-прежнему редко применяется в ходе выполнения и обработки результатов лабораторных и курсовых работ по естественнонаучным дисциплинам. Для этого существует очевидная причина: необходимость вычислений границ с большим запасом точности, что без средств вычислительной техники вызывает значительно большие трудности по сравнению с использованием понятия дифференциала функции нескольких переменных. В настоящие время, в связи с широкой доступностью средств вычислительной техники, уместно внедрение метода границ.

Данный метод и особенности его применения удобнее объяснить с помощью демонстрации на конкретных примерах.

Пример 1. Пусть имеются результаты прямых измерений двух величин с заданными погрешностями: $x = 9{,}641 \pm 0{,}003$, $y = 4{,}032 \pm 0{,}002$. Необходимо найти величину

$$A = \frac{x-y}{x+y}$$

с оценкой предельной абсолютной погрешности.

Решение.

Найдем наибольшее и наименьшее значения искомой величины A:

$$A_{\max} = \frac{x_{\max} - y_{\min}}{x_{\min} + y_{\min}} = \frac{9{,}644 - 4{,}030}{9{,}638 + 4{,}030} = 0{,}410740...,$$

$$A_{\min} = \frac{x_{\min} - y_{\max}}{x_{\max} + y_{\max}} = \frac{9{,}638 - 4{,}034}{9{,}644 + 4{,}034} = 0{,}409709... .$$

Рассчитаем предельную абсолютную погрешность, округлив результат до одной-двух значащих цифр с избытком:

$$\Delta_A = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2} = \frac{0{,}410740... - 0{,}409709...}{2} \approx 0{,}0006.$$

Вычисляем среднее значение искомой величины:

$$\overline{A} = \frac{A_{\max} + A_{\min}}{2} = \frac{0{,}410740... + 0{,}409709...}{2} \approx 0{,}4102.$$

Наконец, получаем величину A:

$$A = \overline{A} \pm \Delta_A = 0{,}4102 \pm 0{,}0006.$$

При объяснении метода границ следует обратить внимание студентов, что максимальная и минимальная границы искомой величины могут достигаться не только на границах интервалов, которым могут принадлежать величины, полученные прямыми измерениями, но и внутри данных интервалов. Для иллюстрации такой возможности целесообразно привести второй пример, раскрывающий данный особый случай.

Пример 2. Пусть известны две стороны треугольника и угол между ними: a=(8,27±0,02) см, b=(2,86±0,01) см и γ=(89,8±0,3), соответственно. Требуется найти площадь данного треугольника S с оценкой предельной абсолютной погрешности.

Решение.

В данном случае максимальное значение площади треугольника будет достигаться при $\gamma_{\max}=90^{o}$, то есть внутри интервала допустимых значений для угла γ, а минимальное значение – при $\gamma_{\min}=89{,}5^{o}$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения площади треугольника:

$$S_{max} = \frac{1}{2} a_{max} b_{max} \sin\gamma_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 8{,}74 \cdot 2{,}87 \cdot \sin 90^{o} = 12{,}5419 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{\min} = \frac{1}{2} a_{\min} b_{\min} \sin\gamma_{\min} = \frac{1}{2} \cdot 8{,}70 \cdot 2{,}85 \cdot \sin 89^{o}{,}5 = 12{,}3970... \text{(см}^2\text{)}.$$

Рассчитываем предельную абсолютную погрешность, округлив результат до одной-двух значащих цифр с избытком:

$$\Delta_S = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2} = \frac{12{,}5419... - 12{,}3970...}{2} \approx 0{,}072 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Вычисляем приближенное значение площади треугольника:

$$\overline{S} = \frac{S_{\max} + S_{\min}}{2} = \frac{12{,}5419... + 12{,}3970...}{2} \approx 12{,}469 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тогда

$$S = \overline{S} \pm \Delta_S = (12{,}469 \pm 0{,}072) \text{ см}^2.$$

Следует отметить, что данный метод вполне доступен студентам для самостоятельного изучения.

Для реализации основных этапов изучения математической обработки экспериментальных данных предполагается рассмотрение данного материала в ходе аудиторной и домашней самостоятельной работы [10-12] с помощью интерактивных методических указаний. Для них оптимальна структура, состоящая из мультимедийных файлов и генераторов типовых заданий.

Мультимедийные файлы с объяснением и конкретизациями рассматриваемых методов необходимы для освоения теоретического материала. Имея форматы *.avi, *.mp4 и т.д., они обеспечивают текстовые и звуковые пояснения.

Не вызывает сомнений, что оперативный контроль правильности решения задач в аудитории приводит к резкому увеличению мотивации студентов к изучению рассматриваемого материала.

Очевидно, что интерактивные методические указания должны обязательно содержать генераторы однотипных заданий [13-17]. В данном случае генератор типовых заданий должен работать как в интерактивном, так и в неинтерактивном режимах.

В первом случае выполняется следующая последовательность действий: генерация условия одной задачи, ввод студентом полученного им ответа, вывод результата проверки правильности решения, дальнейшее действие, определяемое результатом проверки правильности решения этой (и возможно предыдущих задач), автоматическое выставление баллов студенту в случае использования бально-рейтинговой системы и занесение результата в базу данных.

Во втором случае последовательность действий такова: генерирование и печать необходимого количества вариантов однотипного задания с ответами, генерирование и печать ведомостей для занесения результатов решения студентами предложенных заданий и/или внесение преподавателем результатов проверки в базу данных, выставление преподавателем баллов студенту в случае использования бально-рейтинговой системы и занесение результата в базу данных.

Списки рекомендуемых к решению задач выдается преподавателем и/или приводятся в методических указаниях.

Следует отметить, что изложение вводного курса «Математическая обработка экспериментальных данных» на основе приведенных авторами рекомендаций практически целиком базируется на школьном курсе математики.

26.05.2015

Список литературы:

1. Гринкруг, М.С. Лабораторный практикум по физике: Учебное пособие / М.С. Гринкруг, А.А. Вакулюк. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2012. – 480 с.: ил.
2. Физический практикум: Механика и молекулярная физика / Под. ред. В.И. Ивероновой. - Москва: Наука, 1967. – 352 с.
3. Павленко, А.Н. О целесообразности проведения вводной лабораторной работы «Математическая обработка экспериментальных данных» в среде MATHCAD Математическое и компьютерное моделирование в сложных системах: сборник научных трудов регионального научно-практического семинара. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. – С. 114-117.
4. Павленко, А.Н. Применение методов границ и статистических испытаний (среда MATHCAD) при изложении вводного курса теории погрешностей / Математика. Информационные технологии. Образование: Материалы региональной научно-практической конференции в двух частях. Часть 2. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. – С. 307-308.
5. Солодовников, А.С. Теория вероятностей: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по матем. спец. – М.: Просвещение, 1983. – 207 с.
6. Дьяконов, В.П. Mathcad 11/12/13 в математике: справочник / В.П. Дьяконов. - М.: Горячая линия-Телеком, 2007. - 958 с.: ил. + 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - Прил.: с. 905-931. - Библиогр.: с. 932-935. - ISBN 5-93517-332-8.
7. Ляхов, А.Ф. Элементарная теория погрешностей // Математическое образование. – 1998. - №3-4 – С. 6-7.
8. Павленко А.Н. Метод границ и целесообразность его использования для оценки погрешностей косвенных измерений / Материалы ежегодной научной конференции преподавателей и студентов БГПИ 2001 года. – Борисоглебск: БГПИ, 2002. – С. 80-81.
9. Пулькин, С.П. Вычислительная математика / С.П. Пулькин, Л.Н. Никольская, А.С. Дьячков. – Москва: Просвещение, 1980. – 176 с.
10. Павленко, А. Н. О некоторых аспектах организации самостоятельной работы студентов с использованием интерактивных технологий в условиях многоуровневой системы высшего профессионального образования / А. Н. Павленко, О. А. Пихтилькова // депонировано в ВИНИТИ № 374-В2012. – Оренбург: ОГУ, 2012.
11. Павленко, А.Н Об использовании информационных технологий при организации самостоятельной работы студентов в курсе математического анализа / А. Н. Павленко, О. А. Пихтилькова. Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы всерос. науч.-практич. конф. – Оренбург: ООО ИПК «Университет», 2013. – С. 1272-1276.
12. Павленко, А.Н. О целесообразности использования информационных технологий для повышения эффективности самостоятельной работы на аудиторных занятиях математического цикла / А.Н. Павленко, О.А. Пихтилькова О.А. Павленко А.Н., Пихтилькова О.А. Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы всерос. науч.-практич. конф. – Оренбург: ООО ИПК «Университет», 2014. – С. 1610-1612.
13. Павленко, А.Н. Применение ПК для составления большого количества вариантов однотипных заданий по курсу математического анализа / А.Н. Павленко. Совершенствование преподавания физико-математических дисциплин в педвузе и школе: Сб. науч. тр. – Вып. 2. – Борисоглебск: Борисоглебский госпединститут, 1999, ил., С. 43-46.
14. Павленко, А. Н. Составление большого количества вариантов заданий для самостоятельных работ по высшей математике в среде EXCEL: материалы VI региональной научно-практической конференции «Информационные и коммуникационные технологии в образовании» – Борисоглебск: БГПИ, 2003. – С. 69-73.
15. Кручинин, В.В. Использование деревьев И/ИЛИ для генерации вопросов и задач // Вестник Томского государственного университета. - 2004. - №284. - С. 183 – 186.

16. Лаптев, в. В. Генерация вариантов заданий для лабораторных работ по программированию / в. В. Лаптев, в. В. Толасова // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. - 2010. - № 1. - С. 127-131.
17. Зорин, Ю.А. Использование алгоритмов комбинаторной генерации при построении генераторов тестовых заданий // Дистанционное и виртуальное обучение. - 2013. - №6. - С. 54 – 59.

Сведения об авторах:

Павленко Алексей Николаевич, доцент кафедры математического анализа
Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 20515, тел. (3532) 37-25-30, e-mail: pavlenko-a-n@mail.ru

Пихтилькова Ольга Александровна, заведующая кафедрой алгебры и математической кибернетики
Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 1410, e-mail: opikhtilkova@yandex.ru

Четверикова Анна Геннадиевна, заведующая кафедрой общей физики
Оренбургского государственного университета; кандидат физико-математических наук, доцент

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 1302, тел. (3532) 37-24-39, e-mail: KR-727@mail.ru