УДК 514.76

Рустанов А.Р.[1], Казакова О.Н.[2], Харитонова С.В.[2]
[1]Московский педагогический государственный университет, aligadzhi@yandex.ru
[2]Оренбургский государственный университет,
olnikka@yandex.ru, hcb@yandex.ru

АКСИОМА Ф-ГОЛОМОРФНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ *LcACs*-МНОГООБРАЗИЙ

Почти контактные метрические структуры обладают богатой геометрией, а также многочисленными приложениями в различных областях математики и теоретической физики. Достаточно важным аспектом почти контактной геометрии является изучение почти контактных многообразий, удовлетворяющих аксиоме Ф-голоморфных плоскостей.

Определение. (2n+1)-мерное почти контактное метрическое многообразие M удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных (2r+1)-плоскостей, $1 \le r \le n$, если через каждую точку $p \in M$ для всякого (2r+1)-мерного подпространства $L \subset T_p(M)$, инвариантного относительно действия структурного оператора Φ_p, проходит (2r+1)-мерное вполне геодезическое Ф-инвариантное подмногообразие $N \subset M$ такое, что $T_p(N) = L$.

В работе получены условия, при которых нормальное локально конформно почти косимплектическое многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных плоскостей. А именно, доказаны теоремы.

Теорема 1. Нормальное *lcACs*-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных (2r+1) плоскостей тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры компоненты тензора голоморфной кривизны удовлетворяют соотношениям

$$A_{bc}^{ad} = \frac{1}{(n+1)n} A \tilde{\delta}_{bc}^{ad}$$

Теорема 2. Нормальное lcACs-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных (2r+1) плоскостей тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной кривизны.

Теорема 3. Нормальное lcACs-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных (2*r*+1) плоскостей тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной кривизны, в случае глобального постоянства Ф-голоморфной секционной кривизны *c*, оно или является косимплектическим (в этом случае $c = 0$), или имеет Ф-голоморфную секционную кривизну $c = -\sigma_0^2 - \sigma_{00} = const$.

Ключевые слова: аксиома Ф-голоморфных плоскостей, почти контактные структуры, локально конформные структуры.

Почти контактные метрические структуры обладают богатой геометрией, а также многочисленными приложениями в различных областях математики и теоретической физики. Нормальные локально конформно почти косимплектические многообразия являются одним из интересных, на наш взгляд, классов почти контактных метрических структур.

Исследование почти контактных многообразий, полученных при конформных преобразованиях, а также конформных инвариантов таких многообразий в последнее время ведется достаточно активно. Об этом свидетельствуют работы [1]-[10]. Обусловлено это тем, что конформные отображения нашли свое применение не только в геометрии, но и в теории электромагнетизма, теории фильтрации, механике сплошных сред и других областях.

Среди проблематик, связанных с исследованием почти контактных структур, особый интерес представляют исследования свойств, характеризующих свойства изотропности многообразий, т.е. одинаковости их свойств в различных направлениях. К таким свойствам относятся: постоянство Ф-голоморфной секционной кривизны и аксиома Ф-голоморфных плоскостей [11]-[14].

Определение [11], [12]. (2*n*+1)-мерное почти контактное метрическое многообразие *M удовлетворяет аксиоме* Ф-*голоморфных* (2*r*+1)-*плоскостей*, $1 \le r \le n$, если через каждую точку $p \in M$ для всякого (2*r*+1)-мерного подпространства $L \subset T_p(M)$, инвариантного относительно действия структурного оператора Φ_p, проходит (2r+1)-мерное вполне геодезическое Ф-инвариантное подмногообразие $N \subset M$ такое, что $T_p(N) = L$.

Пусть M – (2n+1)-мерное нормальное локально конформно почти косимплектическое ($lcACs$-) многообразие, удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных (2r+1)-плоскостей, для любой точки $p \in M, L \subset T_p(M)$ – (2r+1)-мерное Ф-инвариантное подпространство, $N \subset M$ – соответствующее вполне геодезическое Ф-инвариантное подмногообразие. В силу нечетномерности N модуль $X(M)$ содержит ненулевой элемент ядра эндоморфизма $\Phi|_N$, а значит, и векторное поле $\xi|_N$, которое мы по-прежнему будем обозначать через ξ.

Фиксируем $p \in N$. Пусть $\rho = (p, \beta_0 = \xi_p, \beta_1, ..., \beta_r, \beta^1, ..., \beta^r)$ – A-репер комплексификации пространства $T_p(N)$. Если $j : N \to M, N \subset M$ – естественное вложение, то, отождествляя векторы с их образами при отображении $(j_*)_p$ – дифференциале отображения j в точке p, получаем в произвольном A-репере пространства $T_p(M)$ с учетом вещественности j

$$\beta^\alpha = C^\alpha_a \varepsilon^a,\ \beta_\alpha = C^a_\alpha \varepsilon_a,\ \overline{C^a_\alpha} = C^\alpha_a .$$

Здесь и далее греческие индексы пробегают значения от 1 до r, латинские – от 1 до n.

Двойственные соотношения задаются уравнениями

$$1)\ \omega^a = C^a_\alpha \theta^\alpha;\quad 2)\ \omega_a = C^\alpha_a \theta_\alpha;\quad 3)\ \omega = \theta, \quad (1)$$

где $\rho = (p, \theta, \theta^1, ..., \theta^r, \theta_1, ..., \theta_r)$ – корепер, дуальный реперу r.

Продифференцируем внешним образом (1.1)

$$d\omega^a = dC^a_\alpha \wedge \theta^\alpha + C^a_\alpha d\theta^\alpha$$

с учетом первой группы структурных уравнений нормальных $lcACs$-многообразий [15], полученное равенство перепишем в виде:

$$d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b + \delta^a_b \sigma_0 \omega \wedge \omega^a =$$
$$= -\omega^a_b \wedge (C^b_\alpha \theta^\alpha) + \delta^a_b \sigma_0 \theta \wedge C^a_\alpha \theta^\alpha =$$
$$= -C^b_\alpha \omega^a_b \wedge \theta^\alpha - C^a_\alpha \sigma_0 \theta \wedge \theta^\alpha =$$
$$= dC^a_\alpha \wedge \theta^\alpha + C^a_\alpha d\theta^\alpha ,$$
$$-C^b_\alpha \omega^a_b \wedge \theta^\alpha - C^a_\alpha \sigma_0 \theta \wedge \theta^\alpha =$$
$$= dC^a_\alpha \wedge \theta^\alpha + C^a_\alpha d\theta^\alpha .$$

Таким образом,

$$-C^a_\alpha d\theta^\alpha = (dC^a_\alpha + C^b_\alpha \omega^a_b + \sigma_0 C^a_\alpha \theta) \wedge \theta^\alpha \quad (2)$$

Поскольку

$$C^a_\alpha C^\gamma_a = \langle C^a_\alpha \varepsilon_a, C^\gamma_b \varepsilon_b \rangle = \langle \beta_\alpha, \beta^\gamma \rangle = \delta^\gamma_\alpha ,$$

свертывая (2) с C^γ_a получим

$$-C^\gamma_a C^a_\alpha d\theta^\alpha = (C^\gamma_a dC^a_\alpha + C^\gamma_a C^b_\alpha \omega^a_b + \sigma_0 C^\gamma_a C^a_\alpha \theta) \wedge \theta^\alpha ,$$

т.е. $$d\theta^\alpha = -\theta^\gamma_\alpha \wedge \theta^\alpha + \delta^\gamma_\alpha \sigma_0 \theta \wedge \theta^\alpha , \quad (3)$$

где $\theta^\gamma_\alpha = C^\gamma_a dC^a_\alpha + C^\gamma_a C^b_\alpha \omega^a_b$.

Теперь продифференцируем внешним образом соотношение $C^a_\alpha C^\beta_a = \delta^\beta_\alpha$, тогда

$$C^\beta_a dC^a_\alpha + C^a_\alpha dC^\beta_a = 0 . \quad (4)$$

Теперь продифференцируем внешним образом (1.2):

$$d\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + \delta^b_a \sigma_0 \omega \wedge \omega_b =$$
$$= dC^\alpha_a \wedge \theta_\alpha + C^\alpha_a d\theta_\alpha ,$$

$$-C^\alpha_a d\theta_\alpha = dC^\alpha_a \wedge \theta_\alpha - \omega^b_a \wedge (C^\alpha_b \theta_\alpha) -$$
$$- \sigma_0 \delta^b_a \theta \wedge (C^\alpha_b \theta_\alpha).$$

Таким образом,

$$-C^\alpha_a d\theta_\alpha = (dC^\alpha_a - C^\alpha_b \omega^b_a) \wedge \theta_\alpha - \sigma_0 C^\alpha_a \theta \wedge \theta_\alpha . (5)$$

Свернем полученное равенство с C^a_β, тогда

$$-C^a_\beta C^\alpha_a d\theta_\alpha = (C^a_\beta dC^\alpha_a - C^a_\beta C^\alpha_b \omega^b_a) \wedge \theta_\alpha -$$
$$- \sigma_0 C^a_\beta C^\alpha_a \theta \wedge \theta_\alpha ,$$

$$-d\theta_\alpha = (C^a_\beta dC^\alpha_a - C^a_\beta C^\alpha_b \omega^b_a) \wedge \theta_\alpha - \sigma_0 \delta^\alpha_\beta \theta \wedge \theta_\alpha =$$
$$= -(C^\alpha_a dC^a_\beta + C^a_\beta C^\alpha_b \omega^b_a) \wedge \theta_\alpha - \sigma_0 \delta^\alpha_\beta \theta \wedge \theta_\alpha .$$

Итак,

$$d\theta_\alpha = \theta^\alpha_\beta \wedge \theta_\alpha + \sigma_0 \delta^\alpha_\beta \theta \wedge \theta_\alpha . \quad (6)$$

Перепишем соотношение (2) с учетом (3)

$$-C^a_\alpha (\theta^\alpha_\beta \wedge \theta_\alpha - \sigma_0 \delta^\alpha_\beta \theta \wedge \theta_\alpha) =$$
$$= (dC^a_\alpha + C^b_\alpha \omega^a_b + \sigma_0 C^a_\alpha \theta) \wedge \theta^\alpha ,$$

т.е.

$$\left(dC^a_\alpha + C^b_\alpha\omega^a_b - C^a_\beta\theta^\beta_\alpha + 2\sigma_0 C^a_\alpha\theta\right)\wedge\theta^\alpha = 0. \quad (7)$$

По лемме Картана [8] находим, что

$$dC^a_\alpha + C^b_\alpha\omega^a_b - C^a_\beta\theta^\beta_\alpha + 2\sigma_0 C^a_\alpha\theta = C^a_{\alpha\beta}\theta^\beta, \quad (8)$$

где $C^a_{\alpha\beta} = C^a_{\beta\alpha}$ – система функций на пространстве присоединенной G-структуры, служащих компонентами второй квадратичной формы вложения $N \subset M$. Поскольку N – вполне геодезическое подмногообразие, имеем $C^a_{\alpha\beta} = 0$, а значит, (8) примет вид:

$$dC^a_\alpha + C^b_\alpha\omega^a_b - C^a_\beta\theta^\beta_\alpha + 2\sigma_0 C^a_\alpha\theta = 0. \quad (9)$$

Продифференцируем внешним образом (9):

$$dC^b_\alpha \wedge \omega^a_b + C^b_\alpha d\omega^a_b - dC^a_\beta \wedge \theta^\beta_\alpha -$$
$$- C^a_\beta d\theta^\beta_\alpha + 2C^a_\alpha d\sigma_0 \wedge \theta + 2\sigma_0 dC^a_\alpha \wedge \theta = 0,$$

$$\left(-C^c_\alpha\omega^a_c + C^a_\beta\theta^\beta_\alpha - 2\sigma_0 C^b_\alpha\theta\right)\wedge\omega^a_b +$$
$$+ C^b_\alpha\left(-\omega^a_c \wedge \omega^c_b + A^{ad}_{bc}\omega^c \wedge \omega_d\right)$$
$$-\left(-C^b_\gamma\omega^a_b + C^a_\beta\theta^\beta_\gamma - 2\sigma_0 C^a_\gamma\theta\right)\wedge\theta^\beta_\alpha - C^a_\beta d\theta^\beta_\alpha +$$
$$+ 2\sigma_0\left(-C^b_\gamma\omega^a_b + C^a_\beta\theta^\beta_\gamma - 2\sigma_0 C^a_\gamma\theta\right)\wedge\theta = 0,$$

т.е.

$$C^a_\gamma d\theta^\gamma_\alpha = -C^a_\beta\theta^\beta_\gamma \wedge \theta^\gamma_\alpha + A^{ad}_{bc}C^b_\alpha C^c_\beta C^\gamma_d \theta^\beta \wedge \theta_\gamma. \quad (10)$$

Теперь продифференцируем внешним образом (3):

$$-d\theta^\gamma_\alpha \wedge \theta^\alpha - \theta^\gamma_\alpha \wedge d\theta^\alpha + \delta^\gamma_\alpha d\sigma_0 \wedge \theta \wedge \theta^\alpha +$$
$$+ \delta^\gamma_\alpha\sigma_0 d\theta \wedge \theta^\alpha - \delta^\gamma_\alpha\sigma_0\theta \wedge d\theta^\alpha = 0 \quad ,$$

$$-d\theta^\beta_\alpha \wedge \theta^\alpha - \theta^\beta_\alpha \wedge \left(-\theta^\alpha_\gamma \wedge \theta^\gamma + \delta^\alpha_\gamma\sigma_0\theta \wedge \theta^\gamma\right) -$$
$$- \delta^\beta_\alpha\sigma_0\theta \wedge \left(-\theta^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta + \delta^\alpha_\beta\sigma_0\theta \wedge \theta^\beta\right) = 0,$$

т.е.

$$\left(d\theta^\beta_\alpha + \theta^\beta_\gamma \wedge \theta^\gamma_\alpha\right)\wedge\theta^\alpha = 0. \quad (11)$$

Разложим 2-форму $\left(d\theta^\beta_\alpha + \theta^\beta_\gamma \wedge \theta^\gamma_\alpha\right)$ по базисным формам пространства 2-форм:

$$d\theta^\beta_\alpha + \theta^\beta_\gamma \wedge \theta^\gamma_\alpha = \lambda^{\beta\varphi\psi}_{\alpha\gamma\tau}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta^\tau_\psi +$$
$$+ \lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma\tau}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta^\tau + \lambda^{\beta\varphi\tau}_{\alpha\gamma}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta_\tau +$$
$$+ \lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma0}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta + \lambda^\beta_{\alpha\gamma\varphi}\theta^\gamma \wedge \theta^\varphi +$$
$$+ \lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta_\varphi + \lambda^{\beta\gamma\varphi}_\alpha\theta_\gamma \wedge \theta_\varphi +$$
$$+ \lambda^\beta_{\alpha\gamma0}\theta^\gamma \wedge \theta + \lambda^{\beta\gamma0}_\alpha\theta_\gamma \wedge \theta.$$

$$+ \lambda^\beta_{\alpha\gamma\varphi}\theta^\gamma \wedge \theta^\varphi + \lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta_\varphi +$$
$$+ \lambda^{\beta\gamma\varphi}_\alpha\theta_\gamma \wedge \theta_\varphi + \lambda^\beta_{\alpha\gamma0}\theta^\gamma \wedge \theta + \lambda^{\beta\gamma0}_\alpha\theta_\gamma \wedge \theta. \quad (12)$$

Подставим (12) в (11), тогда получим:

$$\lambda^{\beta\varphi\psi}_{\alpha\gamma\tau}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta^\tau_\psi \wedge \theta^\alpha + \lambda^{\beta\varphi}_{[\alpha|\gamma|\tau]}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta^\tau \wedge \theta^\alpha +$$
$$+ \lambda^{\beta\varphi\tau}_{\alpha\gamma}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta_\tau \wedge \theta^\alpha + \lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma0}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta \wedge \theta^\alpha +$$
$$+ \lambda^\beta_{[\alpha\gamma\varphi]}\theta^\gamma \wedge \theta^\varphi \wedge \theta^\alpha + \lambda^{\beta\varphi}_{[\alpha\gamma]}\theta^\gamma \wedge \theta_\varphi \wedge \theta^\alpha +$$
$$+ \lambda^{\beta\gamma\varphi}_\alpha\theta_\gamma \wedge \theta_\varphi \wedge \theta^\alpha + \lambda^\beta_{[\alpha\gamma]0}\theta^\alpha \wedge \theta^\gamma \wedge \theta +$$
$$+ \lambda^{\beta\gamma0}_\alpha\theta_\gamma \wedge \theta \wedge \theta^\alpha = 0.$$

Отсюда, в силу линейной независимости базисных форм получим:

$$1)\ \lambda^{\beta\varphi\psi}_{\alpha\gamma\tau} = 0;\ 2)\ \lambda^{\beta\varphi}_{[\alpha|\gamma|\tau]} = 0;\ 3)\ \lambda^{\beta\varphi\tau}_{\alpha\gamma} = 0;$$
$$4)\ \lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma0} = 0;\ 5)\ \lambda^\beta_{[\alpha\gamma\varphi]} = 0;\ 6)\ \lambda^{\beta\varphi}_{[\alpha\gamma]} = 0;$$
$$7)\ \lambda^{\beta\gamma\varphi}_\alpha = 0;\ 8)\ \lambda^\beta_{[\alpha\gamma]0} = 0;\ 9)\ \lambda^{\beta\gamma0}_\alpha = 0. \quad (13)$$

Согласно, полученным равенствам (13), разложения (12) примут вид:

$$d\theta^\beta_\alpha + \theta^\beta_\gamma \wedge \theta^\gamma_\alpha = \lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma\tau}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta^\tau +$$
$$+ \lambda^\beta_{\alpha\gamma\varphi}\theta^\gamma \wedge \theta^\varphi + \lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta_\varphi + \lambda^\beta_{\alpha\gamma0}\theta^\gamma \wedge \theta. \quad (14)$$

Далее продифференцируем внешним образом соотношение (6):

$$d\theta^\alpha_\beta \wedge \theta_\alpha - \theta^\alpha_\beta \wedge d\theta_\alpha + \delta^\alpha_\beta d\sigma_0 \wedge \theta \wedge \theta_\alpha +$$
$$+ \delta^\alpha_\beta\sigma_0 d\theta \wedge \theta_\alpha - \delta^\alpha_\beta\sigma_0\theta \wedge d\theta_\alpha =$$
$$= d\theta^\alpha_\beta \wedge \theta_\alpha - \theta^\alpha_\beta \wedge \left(\theta^\gamma_\alpha \wedge \theta_\gamma + \sigma_0\delta^\gamma_\alpha\theta \wedge \theta_\gamma\right) -$$
$$- \delta^\alpha_\beta\sigma_0\theta \wedge \left(\theta^\gamma_\alpha \wedge \theta_\gamma + \sigma_0\delta^\gamma_\alpha\theta \wedge \theta_\gamma\right) = 0,$$

$$d\theta^\alpha_\beta \wedge \theta_\alpha - \theta^\gamma_\alpha \wedge \theta^\alpha_\beta \wedge \theta_\gamma = 0,$$

$$\left(d\theta^\alpha_\beta + \theta^\alpha_\gamma \wedge \theta^\gamma_\beta\right)\wedge\theta_\alpha = 0.$$

Подставим сюда разложения (14), тогда получим

$$\lambda^{\alpha\varphi}_{\beta\gamma\tau}\theta^\gamma_\varphi \wedge \theta^\tau \wedge \theta_\alpha + \lambda^\alpha_{\beta\gamma\varphi}\theta^\gamma \wedge \theta^\varphi \wedge \theta_\alpha +$$
$$+ \lambda^{[\alpha\varphi]}_{\beta\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta_\varphi \wedge \theta_\alpha + \lambda^\alpha_{\beta\gamma0}\theta^\gamma \wedge \theta \wedge \theta_\alpha = 0.$$

Отсюда

$$1)\ \lambda^{\alpha\varphi}_{\beta\gamma\tau}=0;\ 2)\ \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\varphi}=0;$$
$$3)\ \lambda^{[\alpha\varphi]}_{\beta\gamma}=0;\ 4)\ \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma 0}=0. \qquad (15)$$

Согласно (15) разложения (14) примут вид:

$$d\theta^{\beta}_{\alpha}+\theta^{\beta}_{\gamma}\wedge\theta^{\gamma}_{\alpha}=\lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma}\theta^{\gamma}\wedge\theta_{\varphi}. \qquad (16)$$

Подставим (16) в (10), тогда

$$C^{a}_{\beta}\left(\lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma}\theta^{\gamma}\wedge\theta_{\varphi}-\theta^{\beta}_{\gamma}\wedge\theta^{\gamma}_{\alpha}\right)=$$
$$=-C^{a}_{\beta}\theta^{\beta}_{\gamma}\wedge\theta^{\gamma}_{\alpha}+A^{ad}_{bc}C^{b}_{\alpha}C^{c}_{\beta}C^{\gamma}_{d}\theta^{\beta}\wedge\theta_{\gamma},$$

т.е.

$$C^{a}_{\varphi}\lambda^{\varphi\gamma}_{\alpha\beta}=A^{ad}_{bc}C^{b}_{\alpha}C^{c}_{\beta}C^{\gamma}_{d}. \qquad (17)$$

Далее рассуждаем, так же как и в [16]. Из единственности определения вполне геодезического подмногообразия по его начальным условиям в какой-либо точке следует, что из выполнимости аксиомы Ф-голоморфных (2*r*+1)-плоскостей (*r*i1) на данном многообразии вытекает выполнимость на нем аксиомы 3-плоскостей. Но тогда (17) примет вид:

$$C^{a}\lambda=A^{ad}_{bc}C^{b}C^{c}C_{d}. \qquad (18)$$

Из (18) видно, что l является однородной функцией первой степени по переменным C^{h}. Продифференцируем (18) по этим переменным:

$$\lambda\delta^{a}_{h}+C^{a}\frac{\partial\lambda}{\partial C^{h}}=A^{ad}_{bc}\delta^{b}_{h}C^{c}C_{d}+A^{ad}_{bc}C^{b}\delta^{c}_{h}C_{d}.$$

Полученное равенство свернем по индексам a и h, тогда

$$\lambda n+C^{a}\frac{\partial\lambda}{\partial C^{a}}=A^{ad}_{bc}\delta^{b}_{a}C^{c}C_{d}+A^{ad}_{bc}C^{b}\delta^{c}_{a}C_{d}=$$
$$=A^{ad}_{ac}C^{c}C_{d}+A^{ad}_{ba}C^{b}C_{d},$$

т.е. с учетом теоремы Эйлера об однородных функциях и соотношений $A^{ad}_{bc}=A^{ad}_{cb}$, имеем

$$\lambda(n+1)=2A^{ad}_{ac}C^{c}C_{d},\ \text{т. е.}\ \lambda=\frac{2}{n+1}A^{d}_{c}C^{c}C_{d},$$

где $A^{ad}_{ac}=A^{d}_{c}$.

Подставим полученное соотношение в (18), тогда

$$C^{a}\frac{2}{n+1}A^{d}_{c}C^{c}C_{d}=A^{ad}_{bc}C^{b}C^{c}C_{d},$$

$$\frac{2}{n+1}\delta^{a}_{b}A^{d}_{c}C^{b}C^{c}C_{d}=A^{ad}_{bc}C^{b}C^{c}C_{d},$$

$$\left(A^{ad}_{bc}-\frac{2}{n+1}\delta^{a}_{b}A^{d}_{c}\right)C^{b}C^{c}C_{d}=0.$$

В силу произвола в выборе C^{b},C_{d} находим отсюда, что

$$A^{ad}_{bc}=\frac{1}{n+1}\left(\delta^{a}_{b}A^{d}_{c}+\delta^{a}_{c}A^{d}_{b}\right).$$

Свернем это равенство по индексам a и b:

$$A^{d}_{c}=\frac{1}{n}A\delta^{d}_{c},\ \text{где}\ A^{a}_{a}=A,\ \text{а значит,}$$

$$A^{ad}_{bc}=\frac{1}{n+1}\left(A^{a}_{b}\delta^{d}_{c}+A^{a}_{c}\delta^{d}_{b}\right)=$$
$$=\frac{1}{(n+1)n}A\left(\delta^{a}_{b}\delta^{d}_{c}+\delta^{a}_{c}\delta^{d}_{b}\right)=\frac{1}{(n+1)n}A\tilde{\delta}^{ad}_{bc},$$

т.е.

$$A^{ad}_{bc}=\frac{1}{(n+1)n}A\tilde{\delta}^{ad}_{bc}. \qquad (19)$$

Обратное очевидно: система Пфаффа, задающая Ф-голоморфную (2*r*+1)-плоскость, при выполнении соотношений (19) вполне интегрируема, а ее интегральные многообразия суть вполне геодезические подмногообразия. Таким образом, доказана

Теорема 1. Нормальное *lcACs*-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных (2*r*+1) плоскостей тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры компоненты тензора голоморфной кривизны удовлетворяют соотношениям (19).

Согласно Теореме 4 из [15] нормальное *lcACs*-многообразие является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны *c* тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры выполняется соотношение

$$A^{ad}_{bc}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{0}{}^{2}+c\right)\tilde{\delta}^{ad}_{bc}. \qquad (20)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. Нормальное *lcACs*-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных (2r+1) плоскостей тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной кривизны.

В работе [15] также была доказана теорема 5, согласно которой если нормальное *lcACs*-многообразие является многообразием глобально постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны c, то оно или является косимплектическим (в этом случае $c=0$), или имеет Ф-голоморфную секционную кривизну $c=-\sigma_0^2-\sigma_{00}=const$.

С учетом этого результата теорема 2 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 3. Нормальное *lcACs*-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных (2r+1) плоскостей тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной кривизны, в случае глобального постоянства Ф-голоморфной секционной кривизны c, оно или является косимплектическим (в этом случае $c=0$), или имеет Ф-голоморфную секционную кривизну $c=-\sigma_0^2-\sigma_{00}=const$.

16.02.2015

Список литературы:

1. Olszak Z. Locally conformal almost cosymplectic manifolds // Colloq. Math. - 57:1. – 1989. – c.73–87.
2. D. Chinea Conformal changes of almost contact metric structures / D. Chinea, J.C.Marrero. - Riv. Mat. Univ. Parma. (5), 1. – 1992. – p.19–31.
3. D. Chinea, J. C. Morrero, “Conformal changes of almost cosymplectic manifolds”, Rend. Mat. Appl. (7), 12:4 (1992), 849–867.
4. Gouli-Andreou F. Conformally Flat Contact Metric Manifolds with Qx=rx / F.Gpouli-Andreou, N. Tsolakidou // Beitr?age zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Geometry. - Vol 45. - 2004, No. 1, p.103-115
5. Кириченко В.Ф. О геометрии L-многообразий/ В. Ф. Кириченко, В. А. Левковец, Матем. заметки, 79:6. – 2006. – с.854–869.
6. De U.C. A Note on Conformally Flat Contact Manifolds / U.C. De, S. Biswas \\ Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 29(1) (2006). – p.51–57.
7. Кириченко В.Ф. Геометрия контактной формы Ли и контактный анаглог теоремы Икуты / В.Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова // Матем. Заметки. - 82:3. – 2007. - . с.347–360.
8. Кириченко, В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Издание второе, дополненное. – Одесса: «Печатный Дом». – 2013. – 458с.
9. Кириченко В.Ф. Инварианты конформного преобразования почти-контактных метрических структур / В. Ф. Кириченко, И. В. Ускорев // Матем. Заметки. – 2008. - 84:6. – с.838–850.
10. Харитонова С.В. Тензор конгармонической кривизны нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий // Вестник ОГУ. - №12 (161), декабрь. – 2013. – с.182-186.
11. Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space forms // Kodai Math. J. – 1979. - vol.2. - p. 171-186.
12. Ogiue K. On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility // Kodai Math. Semin. Repts. – 1964. - vol. 16. - p. 223—232.
13. Кириченко В.Ф. Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Известия АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №4. С. 711-739.
14. Волкова Е. С. Аксиома ?-голоморфных плоскостей для нормальных многообразий киллингова типа // Матем. Заметки. – 2002. – т.71, выпуск 3. – с.364–372.
15. Кириченко В. Ф. О геометрии нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий / В. Ф. Кириченко, С. В. Харитонова // Матем. заметки. – 2012. - **91**:1. – с. 40–53.
16. Кириченко В. Ф. Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий. / В.Ф. Кириченко, А.Р. Рустанов // Математический сборник, том 193, №8, 2002, 71-100.

Сведения об авторах

Рустанов Алигаджи Рабаданович, доцент кафедры теории и истории социологии Московского педагогического государственного университета, кандидат физико-математических наук
142735, г. Москва, ул. Усачева 64, подъезд 6; тел.: (499) 245 45 60; e-mail: tis@mpgu.edu

Харитонова Светлана Владимировна, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 1503; тел.: (3532)37-25-39; e-mail: ais@mail.osu.ru.

Казакова Ольга Николаевна, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, кандидат педагогических наук наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 1503; тел.: (3532)37-25-39; e-mail: ais@mail.osu.ru.