УДК 621.396, 621.391.1

Шевеленко В.Д. , Лукоянов В.А.
Оренбургский государственный университет
E-mail: tjer2006@yandex.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АБЕЛЯ ДЛЯ СУММИРОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В настоящее время для спектрального анализа сигналов широко применяются цифровые фильтра на основе цифрового процессора с входным АЦП (аналого-цифровым преобразователем), реализующие алгоритмы обычного или быстрого дискретного преобразования Фурье. Быстродействие цифрового фильтра предопределяет анализируемую ширину спектра частот измеряемого процесса и возможность обработки данных в реальном масштабе времени. Наибольшее быстродействие характерно для цифровых фильтров на основе специализированных процессоров быстрого Фурье-преобразования, содержащих матричные множительные с параллельной конвейерной обработкой данных. Однако, распараллеливание операций вычислений приводит к нелинейному возрастанию объема аппаратуры. Поэтому, несмотря на довольно существенный процесс в повышении быстродействия цифровой элементной базы, скорость вычислений из-за необходимости параллельно-последовательного выполнения сравнительно число умножений возрастает существенно меньше, что и приводит к неэффективному использованию элементной базы.

Верхняя граничная частота спектра сигнала, которая может быть проанализирована не превышает нескольких десятков килогерц, при числе точек 1024, и, соответственно, числе гармоник, равном 512.

При решении задач фильтрации, требующих большого числа умножений, для увеличения скорости обработки сигнала путем дискретного преобразования Фурье необходим переход к аналоговым и цифро-аналоговым умножителям при максимальном распараллеливании операций кодирования и обработки сигналов, и реализации этих операций по возможности в устройствах.

Такая необходимость вызывается и тем, что с расширением анализируемого спектра частот габаритные размеры, ток потребления и стоимость цифровых «Фурье-процессоров» резко возрастает.

В данной статье рассмотрена возможность использования преобразования Абеля для суммирования тригонометрических функций. Показаны некоторые из часто встречающихся суммы коэффициентов. Приведены заключения, согласно которым возможно существование таких случаев, при которых использование второй формы записи преобразования Абеля для суммирования тригонометрических функции будет более целесообразным.

Ключевые слова: преобразование Абеля, суммируемость рядов, равенство Парсеваля, тригонометрические функции, энергетические и информационные свойства сумм рядов.

В настоящее время для спектрального анализа сигналов широко применяются цифровые фильтра на основе цифрового процессора с входным АЦП (аналого-цифровым преобразователем), реализующие алгоритмы обычного или быстрого дискретного преобразования Фурье. Быстродействие цифрового фильтра предопределяет анализируемую ширину спектра частот измеряемого процесса и возможность обработки данных в реальном масштабе времени. Наибольшее быстродействие характерно для цифровых фильтров на основе специализированных процессоров быстрого Фурье-преобразования, содержащих матричные множительные с параллельной конвейерной обработкой данных. Однако, распараллеливание операций вычислений приводит к нелинейному возрастанию объема аппаратуры. Поэтому, несмотря на довольно существенный процесс в повышении быстродействия цифровой элементной базы, скорость вычислений из-за необходимости параллельно-последовательного выполнения сравнительно число умножений возрастает существенно меньше, что и приводит к неэффективному использованию элементной базы [1].

Верхняя граничная частота спектра сигнала, которая может быть проанализирована не превышает нескольких десятков килогерц, при числе точек 1024, и, соответственно, числе гармоник, равном 512.

При решении задач фильтрации, требующих большого числа умножений, для увеличения скорости обработки сигнала путем дискретного преобразования Фурье необходим переход к аналоговым и цифро-аналоговым умножителям при максимальном распараллеливании операций кодирования и обработки сигналов, и реализации этих операций по возможности в устройствах.

Такая необходимость вызывается и тем, что с расширением анализируемого спектра частот габаритные размеры, ток потребления и стоимость цифровых «Фурье-процессоров» резко возрастает.

Преобразованием Абеля называют выражение, представленное в виде формулы 1:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n = \sum_{n=1}^{N} U_n (v_n - v_{n+1}) + U_n v_n\,, \qquad (1)$$

где $U_n = u_1 + u_2 + ... + u_k$, для k = 1,2,3…N.

Обозначая u_n и v_n соответственно тригонометрические функции и коэффициенты, получим первую форму записи полинома, а при «переставленных» обозначениях – вторую форму записи полинома.

Первая форма записи полинома соответствует формулам 2 и 3:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx = \sum_{n=1}^{N-1}\left[(A_n - A_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right] + A_n \sum_{k=1}^{N}\cos kx\,, \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \sin nx = \sum_{n=1}^{N-1}\left[(B_n - B_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right] + B_n \sum_{k=1}^{N}\sin kx\,. \qquad (3)$$

Суммы $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ и $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ выражаются в замкнутом виде, что позволяет правые части выражений в вид новых полиномов с разностными коэффициентами.

Получаемые при этом результаты нельзя считать конструктивными с позиции задачи представления полиномов в замкнутом виде; эти результаты могут быть полезны для численных расчетов.

Перейдем ко второй форме записи полинома: здесь положим $u_n = A_n, B_n$; $v_n = \cos nx,\ \sin nx$. Применяя преобразование Абеля, получим выражения 4 и 5 [2]:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx = \sum_{n=1}^{N-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k\left[\cos nx - \cos(n+1)x\right]\right\} + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos Nx\,, \qquad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \sin nx = \sum_{n=1}^{N-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} B_k\left[\sin nx - \sin(n+1)x\right]\right\} + \sum_{k=1}^{N} B_k \sin Nx\,. \qquad (5)$$

Введя обозначения 6:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \alpha_n \text{ и } \sum_{k=1}^{n} B_k = \beta_n\,, \qquad (6)$$

выражения 4 и 5 запишутся в виде выражений 6 и 7:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx = \sum_{n=1}^{N-1}\left[\alpha_n\left(\cos nx - \cos(n+1)x\right)\right] + \alpha_N \cos Nx\,, \qquad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \sin nx = \sum_{n=1}^{N-1}\left[\beta_n\left(\sin nx - \sin(n+1)x\right)\right] + \beta_N \sin Nx \qquad (8)$$

В конкретных задачах могут встретиться условия, при которых полиномы вида $\sum_{n=1}^{N-1}\alpha_n \cos nx$ и $\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n \sin nx$ суммируются лучше, чем исходные полиномы вида $\sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx$ и $\sum_{n=1}^{N} B_n \sin nx$. При этих условиях использование преобразования Абеля во второй записи помогает решению задачи. Для успешной работы по этому методу необходимо располагать таблицей сумм коэффициентов $\sum_{k=1}^{n} A_k = \alpha_n$ и $\sum_{k=1}^{n} B_k = \beta_n$. Некоторые из часто встречающихся сумм коэффициентов приведены ниже (формулы 9–15):

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{2}N(N+1); \qquad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1); \qquad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \left[\frac{1}{2}N(N+1)\right]^2; \qquad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{N}(2n-1) = N^2 \qquad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}; \qquad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{N} v^n = \frac{v - v^{N-1}}{1-v}; \qquad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}. \qquad (15)$$

Основное значение второй записи состоит в том, что на ее основе можно получить ряд полезных неравенств для оценки свойств полиномов.

Прежде всего, рассмотрим вопрос об энергетических и информационных свойствах сумм рядов полиномов. Понятие «энергетические свойства» адресуется к функциям времени и должны пониматься как свойства результата интегрирования квадрата функции, соответствующей сумме ряда полинома [3], [4].

Основным здесь является равенство Парсеваля (формула 16):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^2 + B_n^2\right), \qquad (16)$$

где f(x) – сумма тригонометрического ряда с коэффициентами A_n и B_n.

Для усеченного ряда справедливо неравенство Бесселя (17):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(A_n^2 + B_n^2\right), \qquad (17)$$

которое при $N \to \infty$ переходит в равенство Парсеваля.

Если функция $f_N(x)$ представляет собой сумму ряда, у которого все коэффициенты, начиная с (N+1)-го, равны нулю, то равенство Парсеваля сохраняет свою силу, и в этом случае записывается в виде (формула 18):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(A_n^2 + B_n^2\right). \qquad (18)$$

Равенство Парсеваля обобщается на произведение функций f(x)и g(x) с коэффициентами A_n, B_n, a_n и b_n соответственно, как показано в формуле 19:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n a_n + B_n b_n\right), \qquad (19)$$

а при условии равенства нулю всех коэффициентов, начиная с (N+1)-го, и на полиномы (формула 20):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)g_N(x)dx = \frac{A_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(A_n a_n + B_n b_n\right). \qquad (20)$$

Из вышесказанного будет целесообразным сделать следующие выводы:

1) преобразование Абеля в первой форме записи полезно для проведения численных расчетов;

2) вторая форма записи преобразования Абеля создает предпосылки, при которых полиномы вида $\sum_{n=1}^{N-1}\alpha_n \cos nx$ и $\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n \sin nx$ суммируются лучше, чем исходные полиномы вида $\sum_{n=1}^{N} A_n \cos nx$ и $\sum_{n=1}^{N} B_n \sin nx$;

3) равенство Парсеваля обобщается на произведение функций.

27.02.2015

Список литературы:

1. Макаревич, О.Б. Цифровые процессоры обработки сигналов на основе БИС / О.Б. Макаревич, Б.Г. Спиридонов // Зарубежная электроника. – 1983. – №1. – С. 3-24.
2. Гельман, М.М. Системные аналого-цифровые преобразователи и процессоры сигналов / М.М. Гельман. – М: Мир, 1999. – 381 с.
3. Барон, С. Введение в теорию суммируемости рядов/ С. Барон. – Таллин: Валгус, 1977. – 280 с.
4. Щурин, В.Б. Преобразование Абеля как инструмент реализации фильтрующего свойства ортонормированного базиса / В.Б. Щурин, В.Д. Шевеленко, К.В. Щурин, В.А. Лукоянов // Современные материалы, техника и технология: материалы Международной научно-практической конференции. – Курск, 2011. – С. 356-360.

Сведения об авторах:

Шевеленко Владимир Дмитриевич , Оренбургский государственный университет, доктор технических наук, профессор

Лукоянов Владимир Андреевич, ассистент кафедры МСиС транспортного факультета Оренбургского государственного университета

460013, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 4405, e-mail: tjer2006@yandex.ru