УДК 514.76

Рустанов А.Р.[1], Харитонова С.В.[2], Казакова О.Н.[2]
[1]Московский педагогический государственный университет, aligadzhi@yandex.ru
[2]Оренбургский государственный университет, hcb@yandex.ru

О ДВУХ КЛАССАХ ПОЧТИ $C(\lambda)$-МНОГООБРАЗИЙ

Почти контактные метрические многообразия обладают богатой дифференциально-геометрической структурой. Исследование почти $C(\lambda)$ -многообразий в своих работах начали Д. Янсен и Л. Ванхекке. Тензор кривизны имеет определяющее значение для почти $C(\lambda)$ -многообразий, а тождества кривизны, которым удовлетворяет этот тензор, очень важны для понимания дифференциально-геометрических свойств почти $C(\lambda)$ -многообразий. Полученные в данной статье тождества, выражающие дополнительные свойства симметрии тензора римановой кривизны почти $C(\lambda)$ -многообразий, позволяют решить актуальную задачу классификации почти $C(\lambda)$ -многообразий, а именно, выделить классы класса *CR*$_1$ и *CR*$_2$ почти $C(\lambda)$ -многообразий.

В работе получены следующие тождества кривизны почти $C(\lambda)$ -многообразия:

1) $R(X,\xi)\xi = -\lambda\Phi^2 X$ **;**

2) $R(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X,\Phi Y)\Phi Z + R(\Phi X,\Phi^2 Y)\Phi Z - R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2 Z =$

$$= \lambda\{\Phi^2 X\langle\Phi^2 Y,\Phi^2 Z\rangle + \Phi^2 X\langle\Phi Y,\Phi Z\rangle + \Phi X\langle\Phi^2 Y,\Phi Z\rangle - \Phi X\langle\Phi Y,\Phi^2 Z\rangle -$$

$$-\Phi^2 Y\langle\Phi^2 X,\Phi^2 Z\rangle - \Phi^2 Y\langle\Phi X,\Phi Z\rangle - \Phi Y\langle\Phi^2 X,\Phi Z\rangle + \Phi Y\langle\Phi X,\Phi^2 Z\rangle\}.$$

На основе данных тождеств выделены почти $C(\lambda)$ -многообразия класса *CR*$_1$ и класса *CR*$_2$.

Определение 3. Почти $C(\lambda)$ -многообразие называется многообразием класса CR$_1$, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет условию $R(X,\xi)\xi = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

Определение 4. Назовем почти $C(\lambda)$)-многообразие многообразием класса *CR*$_2$, если его тензор римановой кривизны для $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ удовлетворяет условию

$$R(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X,\Phi Y)\Phi Z + R(\Phi X,\Phi^2 Y)\Phi Z - R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2 Z = 0.$$

Дана локальная характеризация выделенных классов, а именно доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. Почти $C(\lambda)$ -многообразие является многообразием класса *CR*$_1$ тогда и только тогда, когда оно является косимплектическим многообразием, т.е. когда оно локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Теорема 3. Почти $C(\lambda)$ -многообразие, размерности больше 3, является многообразием класса *CR*$_2$ тогда и только тогда, когда оно является косимплектическим многообразием, т.е. когда оно локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Ключевые слова: почти $C(\lambda)$ -многообразия, косимплектические многообразия, $C(\lambda)$ -многообразия, тензор римановой кривизны, сасакиево многообразие, многообразие Кенмоцу.

Понятие почти $C(\lambda)$ -многообразий, где λ – вещественное число, было введено в 1981 году Д. Янсеном и Л. Ванхекке, авторы начали исследование таких многообразий в работе [1]. З. Олчек и Р. Роска [2] изучали нормальные локально конформно почти косимплектические многообразия, которые дополнительно являются почти $C(\lambda)$ -многообразиями.

В работе [3] рассматриваются конформно плоские почти $C(\lambda)$ -многообразия. А. Акбар [4] изучал тензор Риччи и квазитензор конформной кривизны почти $C(\lambda)$ -многообразия. В статье [5] авторы изучали тензоры конгармонической и конциркулярной кривизны почти $C(\lambda)$ -многообразия.

Д. Янсен и Л. Ванхекке определили почти $C(\lambda)$ -многообразие следующим образом.

Определение 1 [1], [2]. Почти контактное метрическое многообразие называется *почти $C(\lambda)$ -многообразием*, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет соотношению

$$\langle R(Z,W)Y,X\rangle = \langle R(\Phi Z,\Phi W)Y,X\rangle -$$
$$-\lambda(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W) -$$
$$-g(X,\Phi W)g(Y,\Phi Z) + g(X,\Phi Z)g(Y,\Phi W)), \quad (1)$$

где $X,Y,Z,W \in \mathrm{X}(M)$, а λ – вещественное число.

Определение 2 [1, 2]. Нормальное почти $C(\lambda)$-многообразие называется $C(\lambda)$-*многообразием*.

Д. Янссен и Л. Ванхекке показали, что косимплектическое многообразие, сасакиево многообразие и многообразие Кенмоцу являются соответственно $C(0)$-, $C(1)$- и $C(-1)$-многообразиями [1]. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [3]. *AC*-многообразие является почти $C(\lambda)$-многообразием тогда и только тогда, когда компоненты его тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой *G*-структуры удовлетворяют соотношениям:

$$R_{abcd} = \lambda\delta_{cd}^{ab},\ R_{a0b0} = \lambda\delta_b^a,\ R_{abcd}\ –$$

любое, в силу тождества Риччи, удовлетворяющее тождеству

$$R_{abcd} - R_{acbd} = -\lambda\delta_{bc}^{ad},$$

где λ – вещественное число,

$$\delta_{bc}^{ad} = \delta_b^a\delta_c^d - \delta_c^a\delta_b^d,$$

а остальные компоненты равны нулю.

Зная выражения для компонент тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой *G*-структуры, по формуле

$$S_{ij} = -R_{ijk}^k$$

получим выражения для компонент тензора Риччи почти $C(\lambda)$-многообразия на пространстве присоединённой *G*-структуры:

$$S_{00} = 2\lambda n, \qquad S_{ab} = S_{ba} = R_{cac}^b + \lambda n\delta_a^b, \quad (2)$$

остальные компоненты нулевые.

Вычислим скалярную кривизну с почти $C(\lambda)$-многообразия на пространстве присоединённой *G*-структуры по формуле

$$\chi = g^{ij}S_{ij},$$

где g^{ij} – компоненты контравариантного метрического тензора. Используя соотношения (2) и матрицу метрического тензора

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},\ \text{получим}$$

$$\chi = 2\lambda n + 2R_{cbc}^b + 2\lambda n^2. \qquad (3)$$

Применим процедуру восстановления тождества ([6], [7], [8], [9]) к равенствам:

$$R_{a0b0} = \lambda\delta_b^a,\ R_{a0b0} = \lambda\delta_b^a = 0,\ R_{00b0} = \lambda\delta_b^0 = 0,$$

$$\text{т.е. } \{R(\varepsilon_a,\xi)\xi\}^i = \lambda(\varepsilon_a)^i,\ \text{т.е. } R(\varepsilon_a,\xi)\xi = \lambda\varepsilon_a.$$

Т. к. проектором $\mathrm{X}(M)$ на подпространство $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ (где $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ – собственное подпространство эндоморфизма Φ с собственным значением $\sqrt{-1}$) является эндоморфизм

$$\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)\ ([7], [10]),$$

$$\text{то } R\left(\Phi^2X + \sqrt{-1}\Phi X,\xi\right)\xi = \lambda\left(\Phi^2X + \sqrt{-1}\Phi X\right)$$

$$\forall X \in \mathrm{X}(M).$$

Выделяя действительную и мнимую части последнего равенства, получим эквивалентные тождества: $R\left(\Phi^2X,\xi\right)\xi = \lambda\left(\Phi^2X\right)$ и $R(\Phi X,\xi)\xi = \lambda(\Phi X)$. Рассмотрим действительную часть $R\left(\Phi^2X,\xi\right)\xi = \lambda\left(\Phi^2X\right)$ $\forall X \in \mathrm{X}(M)$. Поскольку $\Phi^2X = -X + \eta(X)\xi$, то последнее равенство можно переписать в виде:

$$R(X,\xi)\xi = -\lambda\Phi^2X,\ \forall X \in \mathrm{X}(M). \qquad (4)$$

Назовем тождество (4) первым дополнительным тождеством кривизны почти $C(\lambda)$-многообразия.

Определение 3. Почти $C(\lambda)$-многообразие называется многообразием класса CR_1, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет условию

$$R(X,\xi)\xi = 0,\ \forall X \in \mathrm{X}(M).$$

Пусть почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием класса CR_1, тогда согласно определению 3 имеет место равенство $R(X,\xi)\xi = 0$, $\forall X \in \mathrm{X}(M)$, т.е. на пространстве присоединенной *G*-структуры $R_{0i0}^j = 0$, которое с учетом теоремы 1, запишется в виде: $R_{a0b0} = \lambda\delta_b^a = 0$. Таким образом, из теоремы 1 и определения 3 следует, что почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда $\lambda\delta_b^a = 0$. Свернем это равенство по индексам *a* и *b*, тогда $\lambda n = 0$. Поскольку $n > 0$, то $\lambda = 0$. А, значит $C(\lambda)$-многообразие является косимплектическим многообразием. Как известно [6], косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Обратно, для косимплектического многообразия имеем, что $R_{a0b0}=0$, $R_{a0b0}=0$, $R_{00b0}=0$, т.е. $R^i_{0j0}=0$. А значит, $R(X,\xi)\xi=0$, $\forall X\in \mathrm{X}(M)$. Т.е. является многообразием класса CR_1.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда оно является косимплектическим многообразием, т.е. когда оно локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Применим процедуру восстановления тождества ([7], [8], [9]) к равенствам:

$$R_{abcd}=\lambda\delta^{ab}_{cd}=\lambda\left(\delta^a_b\delta^d_c-\delta^a_c\delta^d_b\right)$$

$$R_{abcd}=\lambda\delta^{ab}_{cd}=\lambda\left(\delta^a_b\delta^d_c-\delta^a_c\delta^d_b\right)=0$$

$$R_{0bcd}=\lambda\delta^{0b}_{cd}=\lambda\left(\delta^0_b\delta^d_c-\delta^0_c\delta^d_b\right)=0,$$

т.е. к равенствам $R^i_{bcd}=\lambda\left(\delta^i_b\delta^d_c-\delta^i_c\delta^d_b\right)$. Последнее равенство запишем в виде:

$$\{R(\varepsilon_a,\varepsilon_b)\varepsilon_c\}^i=\lambda\left\{(\varepsilon_a)^i\langle\varepsilon_b,\varepsilon_c\rangle-(\varepsilon_b)^i\langle\varepsilon_a,\varepsilon_c\rangle\right\},$$

т.е. $R(\varepsilon_a,\varepsilon_b)\varepsilon_c=\lambda\left(\varepsilon_a\langle\varepsilon_b,\varepsilon_c\rangle-\varepsilon_b\langle\varepsilon_a,\varepsilon_c\rangle\right)$.

Т.к. проектором $\mathrm{X}(M)$ на подпространство $\mathrm{D}^{\sqrt{-1}}_{\Phi}$ и $\mathrm{D}^{-\sqrt{-1}}_{\Phi}$ являются эндоморфизмы

$$\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}\left(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right)$$

и $\bar{\pi}=\bar{\sigma}\circ l=\frac{1}{2}\left(-\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right)$ ([6], [10]),

то

$$R\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\left(-\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right)=$$
$$=\lambda\{\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right)\left\langle\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y,-\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right\rangle-$$
$$-\left(\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\left\langle\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,-\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right\rangle\}\quad\forall X,Y,Z\in\mathrm{X}(M).$$

Выделяя действительную и мнимую части последнего равенства, получим тождества для $\forall X,Y,Z\in\mathrm{X}(M)$ эквивалентные тождеству:

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=$$
$$=\lambda\{\Phi^2X\left\langle\Phi^2Y,\Phi^2Z\right\rangle+\Phi^2X\langle\Phi Y,\Phi Z\rangle+\Phi X\left\langle\Phi^2Y,\Phi Z\right\rangle-\Phi X\left\langle\Phi Y,\Phi^2Z\right\rangle-$$
$$-\Phi^2Y\left\langle\Phi^2X,\Phi^2Z\right\rangle-\Phi^2Y\langle\Phi X,\Phi Z\rangle-\Phi Y\left\langle\Phi^2X,\Phi Z\right\rangle+\Phi Y\left\langle\Phi X,\Phi^2Z\right\rangle\},\tag{5}$$

Тождество (5) назовем вторым дополнительным тождеством кривизны почти $C(\lambda)$-многообразия.

Определение 4. Назовем почти $C(\lambda)$-многообразие многообразием класса CR_2, если его тензор римановой кривизны для $\forall X,Y,Z\in\mathrm{X}(M)$ удовлетворяет условию

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+$$
$$+R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=0.$$

Пусть почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием класса CR_2, тогда согласно определению 4 имеет место равенство

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+$$
$$+R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=0$$

для $\forall X,Y,Z\in\mathrm{X}(M)$. Последнее равенство на пространстве расслоения реперов запишется в виде:

$$R^i_{jkl}\left(\Phi^2X\right)^k\left(\Phi^2Y\right)^l\left(\Phi^2Z\right)^j+$$
$$+R^i_{jkl}\left(\Phi^2X\right)^k(\Phi Y)^l(\Phi Z)^j+$$
$$+R^i_{jkl}(\Phi X)^k\left(\Phi^2Y\right)^l(\Phi Z)^j-$$
$$-R^i_{jkl}(\Phi X)^k(\Phi Y)^l\left(\Phi^2Z\right)^j=0.$$

Последнее равенство на пространстве присоединенной G-структуры можно переписать следующим образом

$$R^i_{jkl}\Phi^k_m\Phi^m_n\Phi^l_p\Phi^p_s\Phi^j_t\Phi^t_r + R^i_{jkl}\Phi^k_m\Phi^m_n\Phi^l_s\Phi^j_r +$$

$$R^i_{jkl}\Phi^k_n\Phi^l_m\Phi^m_s\Phi^j_r - R^i_{jkl}\Phi^k_n\Phi^l_s\Phi^j_m\Phi^m_r = 0,$$

Отсюда, с учетом теоремы 1 и вида матрицы эндоморфизма

$$\left(\Phi^j_i\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix},$$

получим $4\left(R^a_{bcd} - R^c_{dab}\right) = 0$ т.е. $R^a_{bcd} = 0$.

Таким образом, почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием класса CR_2 тогда и только тогда, когда $R^a_{bcd} = 0$, т.е. $\lambda\delta^{ab}_{cd} = 0$. Свернем это равенство по индексам a и c, а затем по индексам b и d, тогда получим $\lambda(n-1) = 0$. Поскольку $n > 0$, то либо $\lambda = 0$, либо $n = 1$, т.е. размерность многообразия равна 3. А, значит почти $C(\lambda)$-многообразие являющееся многообразием класса CR_2 является косимплектическим или имеет размерность 3.

Обратно, для косимплектического многообразия размерности больше 3 имеем $R^a_{bcd} = 0$, т.е. является многообразием класса CR_2.

Подытожив сказанное, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Почти $C(\lambda)$-многообразие, размерности больше 3, является многообразием класса CR_2 тогда и только тогда, когда оно является косимплектическим многообразием, т.е. когда оно локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

10.02.2015

Список литературы:

1. Janssen, D. Almost contact structures and curvature tensors / D. Janssen, L. Vanhecke // Kodai Math. J. - № 4. – 1981. – P. 1-27.
2. Olszak, Z. Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds / Z. Olszak, R. Rosca // Publ. Math. Debrecen. - 39:3-4. – 1991. – P.315-323.
3. Харитонова, С.В. Почти $C(\lambda)$ –многообразия / С.В. Харитонова // Фундаментальная и прикладная математика. - 16:2. – 2010. – С.139 – 146.
4. Akbar, A.Some Results on Almost $C(\lambda)$ manifolds / Ali Akbar // International Journal of Mathematical Sciences Engineering and applications (IJMSEA). - 7:1. – 2013. – P.255-260.
5. Akbar, A. On the Conharmonic and Concircular curvature tensors of almost $C(\lambda)$ manifolds / Ali Akbar, Avijit Sarkar // International Journal of Advanced Mathematical Sciences (IJMSEA). - 1:3. – 2013. – P.134-138.
6. Кириченко, В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В.Ф. Кириченко. – МПГУ. - Москва. - 2003. – 495с.
7. Кириченко, В.Ф. Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий / В.Ф. Кириченко, А.Р.Рустанов // Математический сборник. - т. 193. - №8. – 2002. – с.71–100.
8. Рустанов, А.Р. Тождества кривизны многообразий класса C_{11} / А.Р. Рустанов, Н.Н. Щипкова // Вестник Оренбургского государственного университета. – №6. – 2011. – С.169–171.
9. Рустанов, А.Р. Геометрия тензора концируклярной кривизны ас-многообразий класса C_{11} / А.Р. Рустанов, Н.Н. Щипкова // Вестник Оренбургского государственного университета. – №9. – 2014. – С.114-120.

Сведения об авторах

Рустанов Алигаджи Рабаданович, доцент кафедры теории и истории социологии Московского педагогического государственного университета, кандидат физико-математических наук
142735, г. Москва, ул. Усачева 64, подъезд 6; тел.: (499) 245 45 60; e-mail: tis@mpgu.edu.

Харитонова Светлана Владимировна, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр. Победы, 13, ауд. 1503; тел.: (3532)37-25-39; e-mail: ais@mail.osu.ru

Казакова Ольга Николаевна, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, кандидат педагогических наук наук
460018, г. Оренбург, пр. Победы, 13, ауд. 1503; тел.: (3532)37-25-39; e-mail: ais@mail.osu.ru