

МЕТОДИКА ЦИФРОВОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СИГНАЛА С НЕРАВНОМЕРНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ВЫБОРКАМИ

В статье представлена методика составления полинома по выборкам значений сигнала с неравномерной дискретизацией на конечном интервале времени. Для аппроксимирующего полинома приводится выражение спектральной плотности и на ее основе формируется выражение линейчатого спектра для зарегистрированного массива выборок сигнала с неравномерной дискретизацией. Составленная методика для дискретного преобразования Фурье позволяет производить цифровой спектральный анализ сигналов, в отличие от классического БПФ, с неравномерной по времени выборкой их значений.

Ключевые слова: сигнал, интерполяция, спектральное преобразование.

В области современных информационно-измерительных систем (ИИС) источниками измерительной информации в подавляющих случаях являются датчики с выходными аналоговыми сигналами $x(t)$, и вся последующая их обработка производится с помощью специализированных контроллеров, которые оперируют с «цифрой». Для «оцифровки» аналоговых сигналов применяется в основном аналого-цифровое преобразование (АЦП) с равномерной дискретизацией. Для цифровой обработки в частотной области (фильтрация, частотная коррекция и тому подобное) массивов выборок значений аналоговых сигналов, полученных в результате АЦП с равномерной дискретизацией, хорошо отработаны математические методы и их алгоритмизация, например, в виде быстрого преобразования Фурье (ПБФ). При этом массив выборок сигнала разбивается на так называемые окна с одинаковым временным интервалом T и с помощью БПФ формируется линейчатый спектр «оконного» фрагмента сигнала в предположении, что данный фрагмент бесконечно повторяется с периодом T .

Подобное АЦП сопровождается предельной методической погрешностью $\Delta_{\text{кв}}$ – погрешностью квантования $\Delta_{\text{кв}} = x_{i+1} - x_i = x_{i+2} - x_{i+1} = \dots$ (рисунок 1), так как моменты выборок определяются частотой считывания (с постоянным интервалом дискретизации) цифрового кода N_i , которые с вероятностью, близкой к единице, не соответствуют моментам перехода сигнала $x(t)$ через i -уровень квантования.

В данной работе рассматривается цифровой спектральный анализ по совокупности выборок $\{N\}$ цифровых значений сигнала $x(t)$, которые зарегистрированы по моментам t_i перехода сигнала $x(t)$ через уровни квантования $x_i = x(t_i)$, при этом формируется одномерный массив пар чисел $\{N; t\}$. Подобный подход позволяет исключить методическую погрешность в виде $\Delta_{\text{кв}}$, но при этом интервал дискретизации для общего случая становится неравномерным, и спектральный анализ – по аналогии с БПФ – требует разработки специальной методики. Причем, данная методика может быть и полезна и для случаев, указанных в [2].

Для того чтобы разложить в ряд Фурье функцию, представленную одномерным массивом пар чисел $\{N; t\}$ с использованием спектрального метода, на первом этапе формируется полином, аппроксимирующий функцию $N(t)$, для которой выполняется условие (1):

$$N(t_0) = N_0; \dots; N(t_i) = N_i;$$

$$N(t_{i+1}) = N_{i+1}; N(t_{i+2}) = N_{i+2}; \dots \quad (1)$$

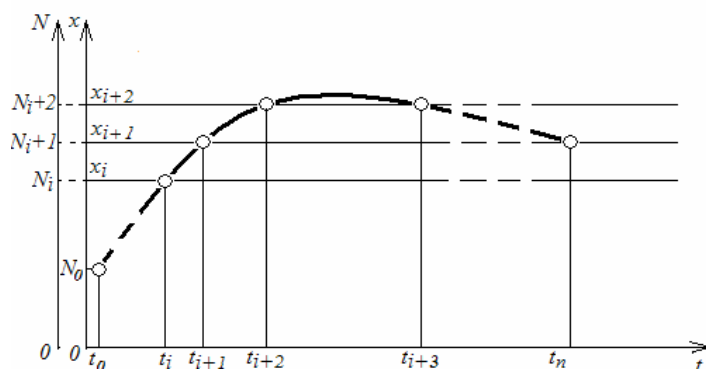


Рисунок 1

Из области математики известны несколько методов интерполяции многочленами $N(t)$ n -ой степени, удовлетворяющих условию (1) в $n+1$ узлах интерполяции – временных отсчетах t_i , где $i = 0, 1, 2, \dots, n$, которые справедливы для случаев, когда

$$t_1 - t_0 \neq \dots \neq t_{i+1} - t_i \neq t_{i+2} - t_{i+1} \neq \dots \neq t_n - t_{n-1}, \quad (2)$$

– в том числе интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона [1].

В данной работе авторы приводят методику использования интерполяционной формулы Ньютона для неравноотстоящих аргументов, которая применительно к рассматриваемому случаю выглядит как:

$$N_n(t) = N_0 + \Delta_{11}(t - t_0) + \Delta_{21}(t - t_1)(t - t_0) + \dots + \Delta_{n1} \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i) = N_0 + \sum_{k=1}^n \left(\Delta_{k1} \prod_{i=0}^{k-1} (t - t_i) \right) \quad (3)$$

где Δ_{k1} , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ – разделенные разности k -го порядка, которые определяются по известным формулам [3]:

– для разделенной разности Δ_{11} :

$$\Delta_{11} = \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad (4)$$

при этом вспомогательные разделенные разности первого порядка для вычисления разделенных разностей второго и выше порядков определяются аналогично:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{12} &= \frac{N(t_2) - N(t_1)}{t_2 - t_1}; \\ \Delta_{13} &= \frac{N(t_3) - N(t_2)}{t_3 - t_2}; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta_{1m} &= \frac{N(t_m) - N(t_{m-1})}{t_m - t_{m-1}}; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta_{1n} &= \frac{N(t_n) - N(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

– для разделенной разности Δ_{21} :

$$\Delta_{21} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{11}}{t_2 - t_0}, \quad (6)$$

вспомогательные разделенные разности второго порядка для вычисления разделенных разностей третьего и выше порядков определяются как:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{22} &= \frac{\Delta_{13} - \Delta_{12}}{t_3 - t_1}; \\ \Delta_{23} &= \frac{\Delta_{14} - \Delta_{13}}{t_4 - t_2}; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta_{2m} &= \frac{\Delta_{1(m+1)} - \Delta_{1m}}{t_{m+1} - t_{m-1}}; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta_{2(n-1)} &= \frac{\Delta_{1n} - \Delta_{1(n-1)}}{t_n - t_{n-2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

– для разделенной разности Δ_{31} :

$$\Delta_{31} = \frac{\Delta_{22} - \Delta_{21}}{t_3 - t_0}, \quad (8)$$

вспомогательные разделенные разности третьего порядка для вычисления разделенных разностей четвертого и выше порядков:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{32} &= \frac{\Delta_{23} - \Delta_{22}}{t_4 - t_1}; \\ \Delta_{33} &= \frac{\Delta_{24} - \Delta_{23}}{t_5 - t_2}; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta_{3m} &= \frac{\Delta_{2(m+1)} - \Delta_{2m}}{t_{m+2} - t_{m-1}}; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta_{3(n-2)} &= \frac{\Delta_{2(n-1)} - \Delta_{2(n-2)}}{t_n - t_{n-3}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

И так далее. Согласно алгоритму, отраженному в последовательности составления формул (3)–(9), последняя разделенная разность n -го порядка будет выглядеть как:

$$\Delta_{n1} = \frac{\Delta_{(n-1)2} - \Delta_{(n-1)1}}{t_n - t_0}. \quad (10)$$

Из анализа процесса составления выражений (3)–(10) для разделенных разностей следует, что для вычисления их численных значений можно составить блок-схему алгоритма с рекуррентной формулой вычисления двумерного массива с элементами $\Delta_{k,m}$ и выделение из него массива разделенных разностей $\Delta_{k,1}$ (рисунок 2). В качестве примера реализации данного алгоритма на рисунке 3 приведена программа в среде Mathcad для вычисления конечных разностей $\Delta_{k,1}$ при шести парах выборок $\{N;t\}$.

Методика вычисления произведения $\prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i)$, входящего в выражение (3) и формирующего степенной полином, основана на свойствах одного из видов производящих функций [1]:

$$F(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i = (1 + A_0 t) \cdot (1 + A_1 t) \cdot \dots \cdot (1 + A_{n-1} t) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + A_i t), \quad (11)$$

где α_i являются коэффициентами производящей функции (11), содержащими информацию о сочетаниях числом $\binom{n}{i}$ без повторений из n объектов A_0, A_1, \dots, A_{n-1} в виде сумм произведений всех сочетаний:

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} : \alpha_0 &= 1; \\ \binom{n}{1} : \alpha_1 &= A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}; \\ \binom{n}{2} : \alpha_2 &= A_0 A_1 + A_0 A_2 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-2} A_{n-1}; \\ \binom{n}{3} : \alpha_3 &= A_0 A_1 A_2 + A_0 A_1 A_3 + A_0 A_2 A_3 + \dots + A_{n-3} A_{n-2} A_{n-1}; \\ \dots & \\ \binom{n}{n} : \alpha_n &= A_0 A_1 A_2 A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-2} A_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если в выражении (11) произвести замену $A_i = -1/t_i$, то это выражение примет вид:

$$F(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - A_i t) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - t/t_i) = \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \frac{t - t_i}{t_i} = \frac{(-1)^{n+1}}{t_0 t_1 t_2 \cdot \dots \cdot t_{n-1}} \times \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i). \quad (13)$$

Левый множитель в (13) – это просто число, а второй множитель в виде $\prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i)$ повторяет произведение в (3), и согласно полученному выражению (13) оно является основой производящей функции $F1(t)$ сочетаний для объектов $\{t\}$ при соответствующей замене в (12) $A_i = -1/t_i$:

$$F1(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i) = (-1)^{n+1} t_0 t_1 t_2 \cdot \dots \cdot t_{n-1} \times \prod_{i=0}^{n-1} (1 - t/t_i). \quad (14)$$

После подстановки в (12) $A_i = -1/t_i$ и формирования сумм произведений с общим знаменателем $t_0 t_1 t_2 \cdot \dots \cdot t_{n-1}$ (который впоследствии сокращается) окончательно получим выражение для производящей функции $F1(t)$:

$$F1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-i} t^i = (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \cdot \dots \cdot (t - t_{n-1}), \quad (15)$$

где для соответствующих сочетаний коэффициенты $\beta_{k=n-i}$, полученные из коэффициентов α_i

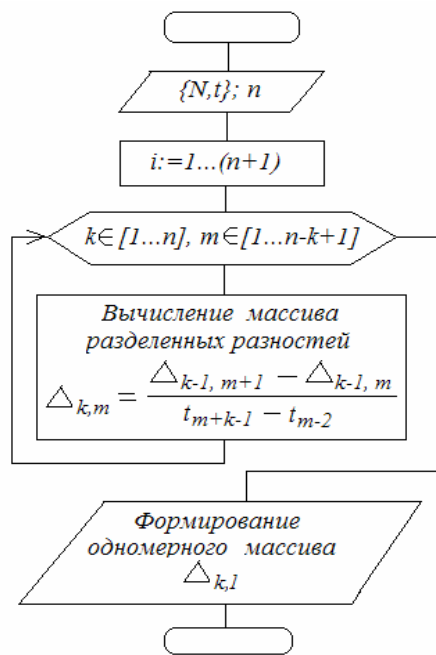


Рисунок 2

$N := \begin{pmatrix} 0 \\ -1.45 \\ -3 \\ 2.33 \\ 3 \\ 1.26 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 0 \\ 1.1 \\ 3.03 \\ 4.43 \\ 6.74 \\ 8 \end{pmatrix} \quad n := 5 \quad k := 1..n$

Формальные конечные разности для нулевой строки двумерного массива:
 $i := 1..n+1 \quad \Delta_{0,i} := N_{i-1}$

$\Delta := \begin{cases} \text{for } k \in 1..n \\ \text{for } m \in 1..n-k+1 \\ \Delta_{k,m} \leftarrow \frac{\Delta_{k-1,m+1} - \Delta_{k-1,m}}{t_{m+k-1} - t_{m-1}} \end{cases}$

$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1.45 & -3 & 2.33 & 3 & 1.26 \\ 0 & -1.318 & -0.803 & 3.807 & 0.29 & -1.381 & 0 \\ 0 & 0.17 & 1.384 & -0.948 & -0.468 & 0 & 0 \\ 0 & 0.274 & -0.414 & 0.097 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.102 & 0.074 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta_{k,1} = \begin{pmatrix} -1.318 \\ 0.17 \\ 0.274 \\ -0.102 \\ 0.022 \end{pmatrix}$

Рисунок 3. Вид программы вычисления $\Delta_{k,1}$ в среде Mathcad

в результате замены $A_i = -1/t_i$, принимают значения:

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} : \beta_0^{[n]} &= 1; \\ \binom{n}{1} : \beta_1^{[n]} &= -(t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}); \\ \binom{n}{2} : \beta_2^{[n]} &= t_0 t_1 + t_0 t_2 + t_1 t_2 + t_0 t_3 + t_1 t_3 + t_2 t_3 + \dots + t_{n-2} t_{n-1}; \\ \binom{n}{3} : \beta_3^{[n]} &= -(t_0 t_1 t_2 + t_0 t_1 t_3 + t_0 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3 + \dots + t_{n-3} t_{n-2} t_{n-1}); \\ \dots & \\ \binom{n}{n} : \beta_n^{[n]} &= (-1)^n t_0 t_1 t_2 t_3 \dots t_{n-2} t_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В выражениях (16) верхний индекс в квадратных скобках введен для указания числа объектов, участвующих в соответствующих сочетаниях с числом объектов в сочетании, указанных в нижнем индексе, всегда начиная с объекта t_0 , так в последующих преобразованиях число n в пределах одного выражения будет плавающим.

Теперь выражение (3) с учетом (16) примет вид:

$$N_n(t) = N_0 + \sum_{k=1}^n \left(\Delta_{k1} \sum_{i=0}^k \beta_{k-i}^{[k]} t^i \right). \quad (17)$$

Введя в (17) формальную величину разделенной разности $\Delta_{01} = N_0$ и систематизируя множители при t^i , окончательно получим:

$$\begin{aligned} N_n(t) &= \sum_{k=0}^n \left(\Delta_{k1} \sum_{i=0}^k \beta_{k-i}^{[k]} t^i \right) = \Delta_{01} \beta_0^{[0]} t^0 + \Delta_{11} (\beta_1^{[1]} + \beta_0^{[1]} t) + \\ &+ \Delta_{21} (\beta_2^{[2]} + \beta_1^{[2]} t + \beta_0^{[2]} t^2) + \\ &+ \Delta_{31} (\beta_3^{[3]} + \beta_2^{[3]} t + \beta_1^{[3]} t^2 + \beta_0^{[3]} t^3) + \dots + \\ &+ \Delta_{n1} (\beta_n^{[n]} + \beta_{n-1}^{[n]} t + \beta_{n-2}^{[n]} t^2 + \dots + \beta_1^{[n]} t^{n-1} + \beta_0^{[n]} t^n) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \Delta_{i1} \beta_i^{[i]} \right) t^0 + \left(\sum_{i=1}^n \Delta_{i1} \beta_{i-1}^{[i]} \right) t^1 + \left(\sum_{i=2}^n \Delta_{i1} \beta_{i-2}^{[i]} \right) t^2 + \dots + \\ &+ \left(\sum_{i=n-1}^n \Delta_{i1} \beta_{i-(n-1)}^{[i]} \right) t^{n-1} + \left(\sum_{i=n}^n \Delta_{i1} \beta_{i-n}^{[i]} \right) t^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\left(\sum_{i=k}^n \Delta_{i1} \beta_{i-k}^{[i]} \right) t^k \right] = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \quad (18) \end{aligned}$$

где коэффициенты степенного полинома $N_n(t)$ имеют вид

$$a_k = \sum_{i=k}^n \Delta_{i1} \beta_{i-k}^{[i]}. \quad (19)$$

Существует несколько алгоритмов формирования сочетаний на основе рекуррентных методов, аналогичных приведенному в [3], необходимых для вычисления (16). Авторский алгоритм от традиционных методов принципиально не отличается, а его особенности связаны только с решением конкретной задачи вычисления коэффициентов β_k . Поэтому из-за большого объема описания этого алгоритма он в данной работе не приводится.

Методика цифрового спектрального преобразования, составляющая второй этап работы, основана на использовании общих теоретических положений спектрального анализа для аппроксимированных сигналов [4] и частного решения для спектральной плотности «оконного» сигнала $e(t)$, аппроксимированного степенным полиномом вида $\sum_{k=0}^n a_k t^k$, представленного на интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ $n+1$ выборками [5]:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \sum_{i=0}^n a_i i! \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{t^{i-k}}{(-j\omega)^k (i-k)!} \Big|_{t_0}^{t_0 + \tau} = \\ &= \left\{ \left[e^{-j\omega \tau} \sum_{i=0}^n a_i i! \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{\tau^{i-k}}{(-j\omega)^k (i-k)!} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\sum_{i=0}^n a_i i! \frac{1}{(j\omega)^i} \right] \right\} \cdot \frac{\exp(-j\omega t_0)}{-j\omega}. \quad (20) \end{aligned}$$

Для получения массива комплексных чисел – выборок из (20), необходимого для технологии цифровой обработки спектра, делается предположение, что данный фрагмент сигнала $e(t)$ (как и в случае с БПФ) повторяется с периодом τ . В этом случае в частотной области формируется линейчатый спектр \dot{c}_m с номерами гармоник m и интервалом между ними, равным $2\pi/\tau$, который можно получить из (20) в виде следующего преобразования:

$$\begin{aligned} \dot{c}_m &= \frac{S(\omega = 2\pi m / \tau)}{\tau} = \\ &= j \frac{1}{2\pi m} \left\{ \left[\sum_{i=0}^n a_i \tau^i i! \sum_{k=0}^i \frac{1}{(j2\pi m)^k (i-k)!} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\sum_{i=0}^n a_i \tau^i i! \frac{1}{(j2\pi m)^i} \right] \right\} \cdot \exp(-j2\pi m t_0 / \tau). \quad (21) \end{aligned}$$

В частности, если начало «окна» отнести к началу временной оси, то выражение (21) приобретет для практики цифрового спектрального анализа простую и удобную для программирования форму:

$$\dot{c}_m(0) = j \frac{1}{2\pi m} \left\{ \left[\sum_{i=0}^n a_i \tau^i i! \sum_{k=0}^i \frac{1}{(j2\pi m)^k (i-k)!} \right] - \left[\sum_{i=0}^n a_i \tau^i i! \frac{1}{(j2\pi m)^i} \right] \right\} \quad (21)$$

В случае необходимости определения фазового спектра фазовый множитель $\exp(-j2\pi m t_0 / \tau)$ можно учитывать уже с использованием массива чисел, полученных по (21):

$$\dot{c}_m = \dot{c}_m(0) \cdot \exp(-j2\pi m t_0 / \tau).$$

11.04.2014

Список литературы:

1. Корн, Г. Справочник по математике : Пер. с англ. / Г. Корн, Т. Корн ; под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 832 с.: ил.
2. Булатов, В.Н. Спектрально-временной метод определения частоты Доплера на основе целенаправленного изменения времени / В.Н.Булатов, Н.А.Косарев, О.В.Худорожков // Вестник Оренбургского государственного университета. – Оренбург: ОГУ, 2011. – №1. – С. 192–196.
3. Мамонтов, Д.В. Алгоритм формирования комбинаций при расчете перестановок, размещений и сочетаний [Электронный ресурс] / Д.В. Мамонтов, С.Б. Волошин. – Режим доступа: <http://www.voloshin-sb.ru/Portals/0/Download/Works/combinator.pdf>. – Дата обращения 12.04.2014.
4. Булатов, В.Н. Метод оценки погрешности определения фазового спектра кусочно-аппроксимированного сигнала / В.Н.Булатов // Вестник Оренбургского государственного университета. – Оренбург: ОГУ, 2009. – №2. – С. 84–88.
5. Булатов, В.Н. Спектральный анализ цифровых сигналов с неравномерной дискретизацией / В.Н. Булатов, Е.С. Тимонов, Д.А. Даминов // Вестник Оренбургского государственного университета. – Оренбург: ОГУ, 2006. – №6. – Т.2. – С. 185–190.

Сведения об авторах:

Булатов Виталий Николаевич, профессор кафедры промышленной электроники и информационно-измерительной техники Оренбургского государственного университета, доктор технических наук, профессор
460018, г. Оренбург, Шарлыкское шоссе, 5, ауд. 15319, e-mail: bulat@o56.ru

Худорожков Олег Викторович, заведующий кафедрой промышленной электроники и информационно-измерительной техники Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук, доцент
460018, г. Оренбург, Шарлыкское шоссе, 5, ауд. 15237, e-mail: oren.khov@mail.ru

Семёнов Алексей Петрович, лаборант, студент кафедры промышленной электроники и информационно-измерительной техники Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, Шарлыкское шоссе, 5, ауд. 15315, e-mail: alexeiSP@ya.ru