УДК 517.944

Ивашкина Г.А., Белобородова С.В.
Оренбургский государственный университет
E-mail: matan@mail.osu.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается обобщенное уравнение Трикоми с краевыми условиями, связывающими границы эллиптической и гиперболической частей смешанной области.

Доказывается существование и единственность поставленной задачи.

Ключевые слова: принцип экстремума, единственность, существование, сингулярные интегральные уравнения.

1. Постановка задачи. Принцип экстремума.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ (m>0). \qquad (1)$$

Пусть D_1 – конечная односвязная область, ограниченная отрезком $AB=\bar{J}$ оси Ox и простой гладкой дугой Жордана σ, лежащей в полуплоскости $y>0$ с концами в точках $A(0;0)$ и $B(1;0)$.

Обозначим через D_2 область, ограниченную отрезком AB и двумя характеристиками

$$AC: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,$$

$$BC: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения (1).

Совокупность областей D_1 и D_2 вместе в открытым отрезком AB будем обозначать через D.

Пусть $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ – аффиксы точек пересечения характеристик AC и BC уравнения (1) с характеристиками, выходящими из точки $(x;0)$.

$$\theta_0(x)=\frac{x}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}x\right)^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_1(x)=\frac{1+x}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{m+2}}.$$

Введем следующие обозначения: $D_{0x}^l f$, $D_{x1}^l f$ – операторы дробного интегрирования порядка l при $l<0$ и обобщенного (в смысле Лиувилля) дифференцирования порядка l при $l>0$ [1], а именно:

$$D_{0x}^l f=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-l)}\displaystyle\int_0^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{l+1}}, & l<0;\\[2ex] \dfrac{d^n}{dx^n}D_{0x}^{l-n}f, & l>0.\end{cases}$$

$$D_{x1}^l f=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-l)}\displaystyle\int_x^1\frac{f(t)dt}{(t-x)^{1+l}}, & l<0;\\[2ex] (-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}D_{x1}^{l-n}f, & l>0.\end{cases}$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача G. Найти функцию

$$u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D_1\cup J)\cap$$
$$\cap C^1(D_2\cup J)\cap C^2(D_1\cup D_2),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в области $D_1\cup D_2$ и краевым условиям:

$$u(x,y)_\sigma + a(x)D_{0x}^{1-\beta}u(\theta_0(x)) = g(x), \qquad (2)$$

$$b(x)u(x,0)+c(x)D_{x1}^{1-\beta}u(\theta_1(x)) = f(x), \qquad (3)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$, $g(x)$ заданные непрерывные на $\bar{J}$ функции, $C(x)\neq 0\ \forall x\in\bar{J}$, $\beta=\dfrac{m}{2(m+2)}$.

В полуплоскости $y<0$ уравнение (1) имеет вид

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0$$

и с помощью характеристических координат

$$\xi = x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},\quad \eta = x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$$

перейдет в уравнение Эйлера-Дарбу

$$\frac{\partial u}{\partial\varsigma\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(\xi,\eta)\big|_{\eta=\xi}=\tau(\xi), \quad (5)$$

$$\lim\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\nu(x) \quad (6)$$

имеет вид

$$u(\xi,\eta)=\gamma_1\int_\xi^\eta(\eta-\xi)^{1-2\beta}(\eta-t)^{\beta-1}(t-\xi)^{\beta-1}\tau(t)dt-$$

$$-\gamma_2\int_\xi^\eta(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}\nu(t)dt, \quad (7)$$

где
$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},$$

$$\gamma_2=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\cdot\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}.$$

Из (7) следует, что

$$u(\theta_0(x))=\gamma_1x^{1-2\beta}\int_0^x t^{\beta-1}(x-t)^{\beta-1}\tau(t)dt-$$

$$-\gamma_2\int_0^x t^{-\beta}(x-t)^{-\beta}\nu(t)dt=$$

$$=\gamma_1\Gamma(\beta)x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau(x)-$$

$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta}\nu(x), \quad (8)$$

$$u(\theta_1(x))=\gamma_1(1-x)^{1-2\beta}\int_x^1(1-t)^{\beta-1}(t-x)^{\beta-1}\tau(t)dt-$$

$$-\gamma_2\int_x^1(1-t)^{-\beta}(t-x)^{-\beta}\nu(t)dt=$$

$$=\gamma_1(1-x)^{1-2\beta}\Gamma(\beta)(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\beta-1}\tau(x)-$$

$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{x1}^{\beta-1}(1-x)^{-\beta}\nu(x). \quad (9)$$

Подставим (8) и (9) в краевые условия (2) и (3). Тогда с учетом того, что $D_{0x}^{1-\beta}D_{0x}^{\beta-1}=D_{x1}^{1-\beta}D_{x1}^{\beta-1}=D^0$, получим

$$u(x,y)\big|_\sigma=\gamma_2\Gamma(1-\beta)a(x)x^{-\beta}\nu(x)-$$

$$-\gamma_1\Gamma(\beta)a(x)D_{0x}^{1-\beta}x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau(x)+g(x),$$

$$\gamma_2\Gamma(1-\beta)(1-x)^{-\beta}c(x)\nu(x)=\tau(x)b(x)+$$

$$+\gamma_1\Gamma(\beta)c(x)D_{x1}^{1-\beta}(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\beta-1}\tau(x)-f(x).$$

Учитывая известные тождества

$$D_{0x}^{1-\beta}x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau(x)=x^{-\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x),$$

$$D_{x1}^{1-\beta}(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\beta-1}\tau(x)=$$

$$=(1-x)^{-\beta}D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x),$$

предыдущие два равенства можно записать в виде

$$u(x,y)\big|_\sigma=\gamma_2\Gamma(1-\beta)a(x)x^{-\beta}\nu(x)-$$

$$-\gamma_1\Gamma(\beta)a(x)x^{-\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)+g(x), \quad (10)$$

$$\gamma_2\Gamma(1-\beta)\nu(x)=\frac{b(x)}{c(x)}(1-x)^\beta\tau(x)+$$

$$+\gamma_1\Gamma(\beta)D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)-\frac{f(x)}{c(x)}(1-x)^\beta. \quad (11)$$

Лемма (принцип экстремума).

Если $f(x)\equiv0$ и $\frac{b(x)}{c(x)}\geq0\ \forall x\in[0,1]$, то положительный максимум и отрицательный минимум решения *u(x,y)* задачи *G* в замкнутой области $\bar{D}$, достигается на σ.

В области D_1 решение не может достигать экстремума. Предположим, что положительный максимум в замкнутой области $\bar{D}_1$ достигается в точке $(\xi;0)$, $\xi\in(0,1)$. Тогда, учитывая, что производная $D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)$ дробного порядка в точке положительного максимума строго положительна (в точке отрицательного минимума строго отрицательна), при выполнении условий леммы, получим, исходя из равенства (11), что $\nu(x)>0$. Это противоречит принципу Заремба-Жиро. Из принципа экстремума следует, что задача *G* имеет единственное решение.

2. Фундаментальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^+(x)$

Задача *N*. Найти в области D_1 решение уравнения

$$y^m u_{xx}+u_{yy}=0,$$

непрерывное в области $\bar{D}_1$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)\big|_\sigma=\varphi^*(s),\ (0\leq s\leq l),$$

где *l* – длина дуги *AB*,

$$\lim_{y\to0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu^+(x),\ (0<x<1),$$

причем

$$\varphi^*(s)\in C[0,l], \nu(x)\in C(0,1).$$

Решение задачи N в случае нормального контура имеет простой вид [3]:

$$u(x_0,y_0)=-k_1\int_0^1 \nu(x)\left\{\left[(x-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2}\right]^{-\beta}-\right.$$

$$\left.-\left[(x-2xx_0+x_0)^2+\frac{16\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{(m+2)^2}y_0^{m+2}\right]^{-\beta}\right\}dx-$$

$$-k_1\beta(m+2)\left(\frac{1}{4}-R_0^2\right)\int_0^1\eta^{-1}\varphi^*(s)\left(r_1^2\right)^{-\beta-1}F(\beta;$$

$$1+\beta;2\beta;1-\sigma)\frac{d\xi}{ds}ds. \qquad (13)$$

где (ξ,η) – точка нормальной кривой

$$\Gamma:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=\frac{1}{4},$$

$$\left.\begin{matrix} r^2\\ r_1^2\end{matrix}\right\}=(x-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}\mp y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,\ \sigma=\frac{r^2}{r_1^2},$$

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\cdot\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$

$$R_0^2=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2}.$$

Переходя к пределу при $y_0\to 0$, получим

$$\tau(x_0)=-k_1\int_0^1\nu(x)\left[|x-x_0|^{2\beta}-(x+x_0-2xx_0)^{-2\beta}\right]dx-$$

$$-\frac{k_1m}{2}x_0(1-x_0)\int_0^1\varphi^*(s)\eta^{-1}\times$$

$$\times\left[(\xi-x_0)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{-1-\beta}\frac{d\xi}{ds}ds.$$

Принимаем во внимание уравнение нормальной кривой

$$y=(1-2\beta)^{2\beta-1}\left[x(1-x)\right]^{\frac{1}{2}-\beta}$$

и полагая $\varphi^*(s)=\varphi(x)$, будем иметь

$$\tau(x)=$$

$$=-k_1\int_0^1\nu(t)\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right]dt+\Phi(x), \qquad (13)$$

где

$$\Phi(x)=2k_1\beta(1-2\beta)^{-\beta}x(1-x)\times$$

$$\times\int_0^1\varphi(t)\left[t(1-t)\right]^{\beta-\frac{1}{2}}\left[x^2+(1-2x)t\right]^{-1-\beta}dt \qquad (14)$$

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

Таким образом, получено три соотношения (10), (11) и (13), связывающие функции $\nu(x)$, $\tau(x)$ и $\varphi(x)$.

3. Сведение задачи *G* к сингулярному интегральному уравнению

Из уравнений (10), (11), (13) выразим функции $\nu(x)$ и $\varphi(x)$ через $\tau(x)$. Тогда, с учетом того, что $D_{0x}^{1-2\beta}x^{1-\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau(x)=x^{-\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)$, будем иметь

$$\varphi(x)=\frac{a(x)b(x)}{c(x)}x^{-\beta}(1-x)^{-\beta}\tau(x)+$$

$$\cdot\gamma_1\Gamma(\beta)a(x)x^{-\beta}D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)-$$

$$-\frac{f(x)(1-x)^{\beta}x^{-\beta}a(x)}{c(x)}-$$

$$-\gamma_1\Gamma(\beta)a(x)x^{-\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)+g(x), \qquad (15)$$

$$\nu(x)=\frac{(1-x)^{\beta}b(x)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)c(x)}\tau(x)+$$

$$+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\cdot\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)}D_{x1}^{1-\beta}\tau(x)-\frac{f(x)(1-x)^{\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)c(x)}. \qquad (16)$$

Подставим (15) и (16) в (13)

$$\tau(x)+\frac{k_1\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\times$$

$$\times\int_0^1\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]D_{t1}^{1-2\beta}\tau(t)dt-$$

$$-2k_1\beta(1-2\beta)^{-\beta}x(1-x)\gamma_1\Gamma(\beta)\times$$

$$\times\int_0^1K(x,t)\left[t^{-\beta}a(t)D_{t1}^{1-2\beta}\tau(t)-a(t)t^{-\beta}D_{0t}^{1-2\beta}\tau(t)+\right.$$

$$\left.+\frac{a(t)b(t)}{c(t)}t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\tau(t)\right]dt=F(t), \qquad (17)$$

где

$$F(x)=-\frac{k_1}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\int_0^1\left[|x-t|^{-2\beta}-(t+x+2tx)^{-2\beta}\right]\times$$

$$\times(1-t)^{\beta}\frac{b(t)-f(t)}{c(t)}dt+2k_1\beta(1-2\beta)^{-\beta}x(1-x)\times$$

$$\times\int_0^1 K(x,t)\left[g(t)-\frac{f(t)a(t)}{c(t)}t^{-\beta}(1-t)^{\beta}\right]dt,$$

$$K(x,t)=\frac{\left[t(1-t)\right]^{\beta-\frac{1}{2}}}{\left[x^2+(1-2x)t\right]^{1+\beta}}.$$

Преобразуем интегралы, входящие в формулу (17)

$$J=\int_0^1\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]D_{t1}^{1-2\beta}\tau(t)dt=$$

$$=-\int_0^1\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]\frac{d}{dt}D_{t1}^{-2\beta}\tau(t)dt=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^1\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}dt\right]\times$$

$$\times\int_1^t\tau'(\xi)(\xi-t)^{2\beta-1}d\xi.$$

Изменим порядок интегрирования.

$$J=-\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\left\{\int_0^x\tau'(\xi)d\xi\int_0^{\xi}\left[(x-t)^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]\times\right.$$

$$\times(\xi-t)^{2\beta-1}dt+$$

$$+\int_x^1\tau'(\xi)d\xi\int_0^x\left[(x-t)^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]\cdot(\xi-t)^{2\beta-1}dt+$$

$$\left.+\int_x^1\tau'(\xi)d\xi\int_x^{\xi}\left[(t-x)^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]\cdot(\xi-t)^{2\beta-1}dt\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(2\beta)}(J_1+J_2+J_3). \qquad (18)$$

С помощью подстановки $t=\xi z$ сведем интеграл J_1 к следующему виду

$$J_1=x^{-2\beta}\int_0^x\tau'(\xi)d\xi\int_0^1\left[\left(1-\frac{\xi}{x}z\right)^{-2\beta}-\left(1-\frac{\xi(2x-1)}{x}z\right)^{-2\beta}\right]\times$$

$$\times(1-z)^{2\beta-1}dz=\frac{x^{-2\beta}}{2\beta}\int_0^x\tau'(\xi)\xi^{2\beta}\times$$

$$\times\left[F\left(2\beta,1;1+2\beta;\frac{\xi}{x}\right)-F\left(2\beta,1;1+2\beta;\frac{\xi}{x}(2x-1)\right)\right]d\xi.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$J_1=\frac{1}{2\beta}\lim_{\xi\to x}F\left(2\beta,1;1+2\beta;\frac{\xi}{x}\right)\tau(\xi)-$$

$$-\int_0^x\tau(\xi)\left(\frac{\xi}{x}\right)^{2\beta-1}\frac{d\xi}{x-\xi}-$$

$$-\frac{1}{2\beta}F(2\beta,1;1+2\beta;2x-1)\tau(x)+$$

$$+\int_0^x\tau(\xi)\left(\frac{\xi}{x}\right)^{2\beta-1}\frac{d\xi}{x+\xi-2x\xi}. \qquad (19)$$

Интеграл J_2 преобразуем с помощью подстановки $t=xz$

$$J_2=\int_x^1\tau'(\xi)\left(\frac{\xi}{x}\right)^{2\beta-1}d\xi\int_0^1\left[(1-z)^{-2\beta}-(1-(2x-1)z)^{-2\beta}\right]\times$$

$$\times\left(1-\frac{x}{\xi}z\right)^{2\beta-1}dz=\int_x^1\tau'(\xi)\left(\frac{\xi}{x}\right)^{2\beta-1}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{1-2\beta}F\left(1-2\beta,1;2-2\beta;\frac{x}{\xi}\right)-\right.$$

$$\left.-F_1\left(1,2\beta,1-2\beta;2;2x-1,\frac{x}{\xi}\right)\right]d\xi.$$

Снова, применяя метод интегрирования по частям, получим

$$J_2=-\frac{1}{1-2\beta}\lim_{\xi\to x}\tau(\xi)F\left(1-2\beta,1;2-2\beta;\frac{x}{\xi}\right)-$$

$$\int_x^1\tau(\xi)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1-2\beta}\frac{d\xi}{x-\xi}+$$

$$+\tau(x)F_1(1,2\beta,1-2\beta;2;2x-1,1)+$$

$$+\int_x^1\tau(\xi)(1-2\beta)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-2\beta}\left(-\frac{x}{\xi^2}\right)\times$$

$$\times F_1\left(1,2\beta,2-2\beta;2;2x-1,\frac{x}{\xi}\right)d\xi.$$

имеют место формулы:

$$F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,1)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')}F(\alpha,\beta;\gamma-\beta';x),$$

$$F_1(\alpha,\beta,\beta';\beta+\beta';x,y)=$$

$$=(1-y)^{-\alpha}F\left(\alpha,\beta;\beta+\beta';\frac{x-y}{1-y}\right),$$

с учетом которых J_2 примет вид

$$J_2=-\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\lim_{\xi\to x}\tau(\xi)F\left(1-2\beta,1;2-2\beta;\frac{x}{\xi}\right)-$$

$$-\int_x^1\tau(\xi)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1-2\beta}\frac{d\xi}{x-\xi}+$$

$$+\frac{1}{2\beta}\tau(x)F(1,2\beta;1+2\beta;2x-1)-$$

$$-(1-2\beta)\int_x^1\tau(\xi)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1-2\beta}\frac{1}{\xi-x}\times$$

$$\times F\left(1,2\beta;2;\frac{x+\xi-2x\xi}{x-\xi}\right)d\xi.$$

Применяя рекуррентное соотношение Гаусса

$$\gamma F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\gamma F(\alpha+1,\beta,\gamma;z)+$$

$$+\beta zF(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)=0$$

к гипергеометрической функции $F\left(1,2\beta;2;\frac{x+\xi-2x\xi}{x-\xi}\right)$, получим

$$\frac{1-2\beta}{\xi-x}F\left(1,2\beta;2;\frac{x+\xi-2x\xi}{x-\xi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{x+\xi-2x\xi}+\frac{(\xi-x)^{2\beta-1}}{x+\xi-2x\xi}\cdot\left(2\xi(1-x)\right)^{1-2\beta}.$$

Таким образом,

$$J_2=-\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\lim_{\xi\to x}\tau(\xi)F\left(1-2\beta,1;2-2\beta;\frac{x}{\xi}\right)-$$

$$-\int_x^1\tau(\xi)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1-2\beta}\frac{d\xi}{x-\xi}+$$

$$+\frac{1}{2\beta}\tau(x)F(1,2\beta;1+2\beta;2x-1)+$$

$$+\int_x^1\tau(\xi)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1-2\beta}\frac{1}{x+\xi-2x\xi}d\xi-$$

$$-\int_x^1\tau(\xi)\cdot\frac{(\xi-x)^{2\beta-1}}{x+\xi-2x\xi}\left(2x(1-x)\right)^{1-2\beta}d\xi. \qquad (20)$$

Рассмотрим интеграл J_3. Во внутреннем интеграле выполним подстановку $t=x+(\xi-x)z$. Тогда получим

$$J_3=\int_x^1\tau'(\xi)d\xi\int_0^1 z^{-2\beta}(1-z)^{2\beta-1}dz-$$

$$-\int_x^1\tau'(\xi)\left(\frac{2x(1-x)}{\xi-x}\right)^{-2\beta}d\xi\times$$

$$\times\int_0^1(1-z)^{2\beta-1}\left(1-\frac{(\xi-x)(2x-1)}{2x(1-x)}z\right)^{-2\beta}dz=$$

$$=-\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\tau(x)-\int_x^1\tau'(\xi)\left(\frac{\xi-x}{2(1-x)x}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times\frac{1}{2\beta}F\left(2\beta,1;1+2\beta;\frac{(\xi-x)(2x-1)}{2x(1-x)}\right)d\xi=$$

$$=-\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\tau(x)-\int_x^1\tau(\xi)\left(\frac{\xi-x}{2x(1-x)}\right)^{2\beta-1}\frac{1}{x+\xi-2x\xi}d\xi. \qquad (21)$$

Подставляя (19), (20) и (21) в (18), получим

$$J=-\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\left(-\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\tau(x)+\int_0^1\tau(\xi)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1-2\beta}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1}{x+\xi-2x\xi}\right)d\xi\right). \qquad (22)$$

Замечание. При применении формулы интегрирования по частям в интегралах J_1, J_2, J_3 полагаем $\tau(0)=\tau(1)=0$.

Рассмотрим следующий интеграл формулы (17).

$$J^*=x(1-x)\int_0^1\frac{\left[t(1-t)\right]^{\beta-\frac{1}{2}}}{\left[x^2+(1-2x)t\right]^{1+\beta}}t^{-\beta}a(t)D_{t1}^{1-2\beta}\tau(t)dt.$$

Положим $a(t)=a\left[t(1-t)\right]^{\frac{1}{2}-\beta}$, где a=const. Тогда

$$J^*=-\frac{x(1-x)}{\Gamma(2\beta)}a\int_0^1\frac{t^{-\beta}dt}{\left[x^2+(1-2x)t\right]^{1+\beta}}\times$$

$$\times\int_t^1\tau'(\xi)(\xi-x)^{2\beta-1}d\xi=$$

$$=-\frac{x(1-x)}{\Gamma(2\beta)}a\int_0^1\tau'(\xi)d\xi\int_0^\xi\left[x^2+(1-2x)\xi\right]^{-1-\beta}\times$$

$$\times t^{-\beta}(\xi-x)^{2\beta-1}dt=$$

$$=-\frac{(1-x)}{\Gamma(2\beta)}x^{-1-2\beta}a\int_0^1\tau'(\xi)\xi^\beta d\xi\int_0^1 z^{-\beta}\times$$

$$\times(1-z)^{2\beta-1}\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\xi z\right)^{-1-\beta}dz=$$

$$=-\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\beta)}x^{-1-2\beta}a\times$$

$$\times\int_0^1\tau'(\xi)\xi^\beta F\left(1-\beta,1+\beta;1+\beta;\frac{2x-1}{x^2}\xi\right)d\xi=$$

$$=-\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\beta)}x^{1-4\beta}(1-x)a\times$$

$$\times\int_0^1\tau'(\xi)\xi^\beta\left[x^2+(1-2x)\xi\right]^{\beta-1}d\xi. \qquad (23)$$

Преобразуем следующий интеграл формулы (17)

$$J^{**}=x(1-x)a\int_0^1\frac{\left[t(1-t)\right]^{\beta-\frac{1}{2}}dt}{\left[x^2+(1-2x)\xi\right]^{1+\beta}}D_{0t}^{1-2\beta}\tau(t)dt=$$

$$=\frac{x(1-x)}{\Gamma(2\beta)}\int_0^1 t^{-\beta}\left[x^2+(1-2x)\xi\right]^{-1-\beta}\times$$

$$\times dt\int_0^t\tau'(\xi)(t-\xi)^{2\beta-1}d\xi.$$

Изменим порядок интегрирования и выполним во внутреннем интеграле подстановку $t=1-(1-\xi)z$.

$$J^{**}=\frac{x(1-x)^{-1-2\beta}}{\Gamma(2\beta)}a\int_0^1\tau'(\xi)(1-\xi)^{2\beta}d\xi\int_0^t\left(1-(1-\xi)z\right)^{-\beta}\times$$

$$\times\left(1-\frac{(1-2x)(1-\xi)}{(1-x)^2}z\right)^{-1-\beta}(1-z)^{2\beta-1}dz=$$

$$=\frac{x(1-x)^{-1-2\beta}a}{\Gamma(1+2\beta)}\int_0^1\tau'(\xi)(1-\xi)^{2\beta}F_1\times$$

$$\times F_1\left(1,\beta,1+\beta;1+2\beta;1-\xi,\frac{(1-2x)(1-\xi)}{(1-x)^2}\right)d\xi=$$

$$=\frac{x(1-x)^{1-2\beta}a}{\Gamma(1+2\beta)}\int_0^1\tau'(\xi)(1-\xi)^{2\beta}\frac{1}{x^2+(1-2x)\xi}\times$$

$$\times F\left(1,\beta;1+2\beta;\frac{x^2(1-\xi)}{x^2+(1-2x)\xi}\right)d\xi. \qquad (24)$$

В гипергеометрической функции от аргумента z перейдем к аргументу 1-z

$$F\left(1,\beta;1+2\beta;\frac{x^2(1-\xi)}{x^2+(1-2x)\xi}\right)=$$

$$=2F\left(1,\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{(1-x)^{2\beta}\xi^\beta}{\left[x^2+(1-2x)\xi\right]^\beta}\times$$

$$\times F\left(2\beta,1+\beta;1+\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)=$$

$$=2F\left(1,\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\beta)}(1-x)^{2\beta}\xi^\beta x^{-4\beta}\times$$

$$\times(1-\xi)^{-2\beta}\left[x^2+(1-2x)\xi\right]^\beta$$

Подставим $F\left(1,\beta;1+2\beta;\frac{x^2(1-\xi)}{x^2+(1-2x)\xi}\right)$ в (24)

$$J^{**}=\frac{2x(1-x)^{1-2\beta}a}{\Gamma(1+2\beta)}\int_0^1\tau'(\xi)(1-\xi)^{2\beta}\frac{1}{x^2+(1-2x)\xi}\times$$

$$\times F\left(1,\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)d\xi+$$

$$+\frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{1-4\beta}(1-x)a\int_0^1\tau'(\xi)\xi^\beta\left(x^2+(1-2x)\xi\right)^{\beta-1}d\xi=$$

$$=J_1^*+J_2^*. \qquad (25)$$

Рассмотрим первое слагаемое формулы (25). Применим формулу автотрансформации

$$J^{**}=\frac{2x^{1-4\beta}(1-x)^{1-2\beta}a}{\Gamma(1+2\beta)}\int_0^1\tau'(\xi)\left(x^2+(1-2x)\xi\right)^{2\beta-1}\times$$

$$\times F\left(-\beta,1-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)d\xi=$$

$$=\frac{2x^{1-4\beta}(1-x)^{1-2\beta}a}{\Gamma(1+2\beta)}\tau(\xi)\left(x^2+(1-2x)\xi\right)^{2\beta-1}\times$$

$$\times F\left(-\beta,1-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)\Bigg|_0^1-$$

$$-\frac{2x^{1-4\beta}(1-x)^{2\beta-1}a}{\Gamma(1+2\beta)}\times$$

$$\times\int_0^1\tau(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{2\beta-1}\left(\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)\right]\times$$

$$\times F\left(-\beta,1-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)d\xi.$$

Будем считать, что $\tau(x)$ при x=0 обращается в нуль, причем порядок нуля выше первого. Тогда

$$J_1^{**}=-\frac{2x^{1-4\beta}(1-x)^{2\beta-1}a}{\Gamma(1+2\beta)}\times$$

$$\times\int_0^1\tau(\xi)\left[-(1-2\beta)\xi^{2\beta-2}\left(\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)\times\right.$$

$$\times F\left(-\beta,1-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)+$$

$$+(1-2\beta)\left(\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)^{-2\beta}\times$$

$$\times\frac{x^2(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\times$$

$$\left.\times F\left(-\beta,2-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)\xi^{2\beta-1}\right]d\xi=$$

$$=\frac{2x^{1-4\beta}(1-x)^{1-2\beta}a}{\Gamma(1+2\beta)}(1-2\beta)\times$$

$$\times\int_0^1\frac{\tau(\xi)}{\xi}\left(x^2+(1-2x)\xi\right)^{2\beta-1}\times$$

$$\times\left[F\left(-\beta,1-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)-\frac{x^2}{x^2+(1-2x)\xi}\times\right.$$

$$\left.\times F\left(-\beta,2-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)\right]d\xi.$$

Используя известное рекуррентное соотношение Гаусса, определим

$$F\left(-\beta,2-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)=$$

$$=-\frac{\beta}{1-2\beta}\left(\frac{(1-\xi)x^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)^{2\beta-1}+$$

$$+\frac{1-\beta}{1-2\beta}F\left(-\beta,1-2\beta;1-\beta;\frac{\xi(1-x)^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right).$$

С учетом последнего равенства J_1^{**} примет вид

$$J_1^{**}=\frac{2x(1-x)^{1-2\beta}a\beta}{\Gamma(1+2\beta)}\int_0^1\frac{\tau(\xi)}{\xi}\frac{(1-\xi)^{2\beta-1}}{x^2+(1-2x)\xi}d\xi+$$

$$+\frac{2x^{1-4\beta}(1-x)^{1-2\beta}a(1-2\beta)}{\Gamma(1+2\beta)}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{\tau(\xi)}{\xi}\left(1-\frac{1-\beta}{1-2\beta}\cdot\frac{x^2}{x^2+(1-2x)\xi}\right)d\xi\times$$

$$\times F\left(-\beta,1-2\beta;1-\beta;\frac{(1-x)^2\xi}{x^2+(1-2x)\xi}\right)d\xi.$$

Подставляя J_1^{**} в (25), а затем (25), (23) и (22) в (17), получим

$$\frac{1}{2\sin 2\pi\beta}\tau(x)-$$

$$-\frac{\cos\pi\beta}{\pi}\int_0^1\tau(\xi)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{\xi-x}+\frac{1}{x+\xi-2x\xi}\right)d\xi+$$

$$+\lambda\int_0^1\tau(\xi)R(\xi,x)d\xi=F(x),$$

где $R(\xi,x)$ – ядро со слабой особенностью.

В силу единственности уравнение (26) разрешимо [5]. По формулам (15) и (16) можно найти $\varphi(x)$ и $\nu(x)$ через заданные функции, входящие в краевые условия.

7.04.2014

Список литературы:
1. Hardy, G. Some properties of fractional integrals I / G. Hardy, J. Littlewood // Math. Z. 24, 4, 1928. – P. 565–606.
2. Бицадзе, А.В. Уравнения смешанного типа / А.В. Бицадзе. – М.: Изд. АНСССР, 1959. – С. 84–86.
3. Смирнов, М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1966. – С. 39–77.
4. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштеин, И.М. Рыжик. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1969. – С. 1068–1069.
5. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. – С. 235–239.

Сведения об авторах:
Ивашкина Галина Андреевна, доцент кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
Белобородова Светлана Валентиновна, ассистент кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы 13, ауд. 20515, тел. (3532) 372533, e-mail: matan@mail.osu.ru