УДК 514.76

Рустанов А.Р.[1], Щипкова Н.Н.[2]
[1]Московский педагогический государственный университет
[2]Оренбургский государственный университет
E-mail: aligadzhi@yandex.ru; ningeom@pochtamt.ru

ГЕОМЕТРИЯ ТЕНЗОРА КОНЦИРКУЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ *AC*-МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА C_{11}

В работе рассматриваются вопросы геометрии тензора концикулярной кривизны *AC*-многообразий класса C_{11}. Подсчитаны его компоненты на пространстве присоединенной *G*-структуры, получены тождества, которым удовлетворяет тензор концикулярной кривизны. На основе полученных тождеств выделены некоторые подклассы и получены локальные характеризации выделенных классов.

Ключевые слова: Пространство присоединенной G-структуры, тензор концикулярной кривизны, концикулярно плоские многообразия, дополнительные тождества концикулярной кривизны.

В работах [1], [2] исследовались *AC*-многообразия класса C_{11}. В данной работе мы продолжим изучение данного класса многообразий и изучим некоторые вопросы геометрии тензора концикулярной кривизны.

Пусть M – *AC*-многообразие класса C_{11}. Тензор концикулярной кривизны *AC*-структуры вычисляется по формуле [3]:

$$KZ(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{\chi}{n(n-1)}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\}$$

где χ – скалярная кривизна, n=dim$M$ – размерность многообразия. В нашем случае размерность равна $2n+1$, значит

$$KZ(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{\chi}{2n(2n+1)}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\}.$$

В терминах компонент эта формула примет вид:

$$KZ^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{\chi}{2n(2n+1)}\{g_{jk}\delta^i_l - g_{jl}\delta^i_k\},$$

а в терминах ковариантных компонент данная формула примет вид:

$$KZ_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{\chi}{2n(2n+1)}\{g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik}\}, \quad (1)$$

где R_{ijkl} – соответствующие компоненты тензора Римана-Кристоффеля; g_{ij} – компоненты метрического тензора; c – скалярная кривизна.

Как видно из (1) тензор концикулярной кривизны обладает всеми классическими свойствами симметрии тензора Римана-Кристоффеля.

Компоненты тензора Римана-Кристоффеля $\{R^i_{jkl}\}$ на пространстве присоединенной *G*-структуры имеют вид [1]:

$$1)\ R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc};\ 2)\ R^{\hat{a}}_{\hat{b}c\hat{d}} = -A^{bd}_{ac}, \quad (2)$$

а остальные компоненты нулевые.

В частности, скалярная кривизна с вычисляется по формуле [1]

$$\chi = g^{ij}r_{ij} = 2A^{ab}_{ab}. \quad (3)$$

Расписав компоненты тензора концикулярной кривизны на пространстве присоединенной *G*-структуры с учетом (2), (3) и матрицы метрического тензора $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$, получим, что на пространстве присоединенной *G*-структуры *AC*-многообразия класса C_{11} имеет следующие ненулевые компоненты:

$$1)\ KZ_{\hat{a}\hat{b}cd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} - \frac{\chi}{2n(2n+1)}(g_{\hat{b}c}g_{\hat{a}d} - g_{\hat{b}d}g_{\hat{a}c}) = \frac{A^{hg}_{hg}}{n(2n+1)}(\delta^b_d\delta^a_c - \delta^b_c\delta^a_d);$$

$$2)\ KZ_{\hat{a}bc\hat{d}} = R_{\hat{a}bc\hat{d}} - \frac{\chi}{2n(2n+1)}(g_{bc}g_{\hat{a}\hat{d}} - g_{b\hat{d}}g_{\hat{a}c}) = A^{ad}_{bc} + \frac{A^{hg}_{hg}}{n(2n+1)}\delta^d_b\delta^a_c;$$

$$3)\ KZ_{\hat{a}0b0} = R_{\hat{a}0b0} - \frac{\chi}{2n(2n+1)}(g_{00}g_{\hat{a}b} - g_{0b}g_{\hat{a}0}) = -\frac{A^{hg}_{hg}}{n(2n+1)}\delta^a_b, \quad (4)$$

плюс соотношения, полученные с учетом вещественности и свойств симметрии этого тензора как алгебраического тензора кривизны. Остальные компоненты тензора концикулярной кривизны равны нулю. Эти выражения (и им сопряженные) задают компоненты ненулевых основных конциркулярных инвариантов *АС*-многообразия класса C_{11}.

Исследуем геометрический смысл обращения в нуль основных конциркулярных инвариантов *АС*-многообразия класса C_{11}. Скажем, что псевдориманово многообразие (M, g) называется конциркулярно плоским, если метрика g в некоторой окрестности каждой точки m∈ M допускает конциркулярное преобразование в плоскую метрику [3]. Хорошо известен геометрический смысл обращения в нуль тензора конциркулярной кривизны псевдориманова многообразия размерности свыше 3 – это равносильно конциркулярной плоскости многообразия [3].

Пусть $\left(M^{2n+1},\xi,\eta,\Phi,g\right)$ – конциркулярно плоское *АС*-многообразие класса C_{11}, т.е. компоненты его тензора конциркулярной кривизны обращаются в нуль. Поскольку $KZ_{\hat{a}0b0}=0$, то $\frac{A_{hg}^{hg}}{n(2n+1)}\delta_b^a=0$. Свертывая это равенство по индексам a и b, получим $\frac{A_{hg}^{hg}}{(2n+1)}=0$, т.е. $A_{hg}^{hg}=0$. С учетом полученного равенства и соотношения $KZ_{\hat{a}bc\hat{d}}=A_{bc}^{ad}+\frac{A_{hg}^{hg}}{n(2n+1)}\delta_b^d\delta_c^a=0$, получим, что $A_{bc}^{ad}=0$. И таким образом, получили, что конциркулярно плоское *АС*-многообразие класса C_{11} является плоским многообразием.

Поскольку плоское *АС*-многообразие класса C_{11} является конциркулярно плоским многообразием, то доказана следующая теорема.

Теорема 1. *АС*-многообразие класса C_{11} является конциркулярно плоским тогда и только тогда, когда оно является плоским многообразием.

С учетом теоремы 2 [2], теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *АС*-многообразие класса C_{11} является конциркулярно плоским тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно произведению комплексного евклидова пространства на вещественную прямую, снабженную канонической косимплектической структурой.

Рассмотрим некоторые тождества на тензор конциркулярной кривизны *АС*-многообразия класса C_{11}.

1) Применяя процедуру восстановления тождества [4] к равенствам

$$KZ_{00a}^{0}=\frac{A_{hg}^{hg}}{n(2n+1)}\delta_a^0=0;\ KZ_{00a}^{b}=\frac{A_{hg}^{hg}}{n(2n+1)}\delta_a^b;$$

$$KZ_{00a}^{\hat{b}}=\frac{A_{hg}^{hg}}{n(2n+1)}\delta_a^{\hat{b}}=0,$$

т.е. $KZ_{00a}^{i}=\frac{A_{hg}^{hg}}{n(2n+1)}\delta_a^i$, получим

$KZ(\xi,\varepsilon_a)\xi=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\varepsilon_a$, т.к. $\{\varepsilon_a\}$ является базисом подмодуля $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$, а проектором на этот подмодуль является эндоморфизм $\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}\left(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right)$ [4], то

$$KZ\left(\xi,\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right)\xi=$$
$$=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right),\forall X\in X(M).$$

Выделяя действительную и мнимую части данного тождества, получим эквивалентные равенства. Поэтому выпишем только действительную часть, т.е.

$$KZ\left(\xi,\Phi^2X\right)\xi=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\Phi^2X,\forall X\in X(M).\quad(5)$$

Определение 1. Скажем, что *АС*-многообразие класса C_{11} удовлетворяет первому дополнительному тождеству конциркулярной кривизны или является многообразием класса CZ_1, если тензор конциркулярной кривизны удовлетворяет тождеству

$$KZ\left(\xi,\Phi^2X\right)\xi=0,\forall X\in X(M).\quad\backslash(6)$$

Из определения 1 и (5) непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 3. *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса CZ_1 тогда и только тогда, когда *АС*-многообразие класса C_{11} имеет нулевую скалярную кривизну.

2) Поскольку $KZ_{0ab}^{0}=0;KZ_{0ab}^{c}=0;KZ_{0ab}^{\hat{c}}=0$, т.е. $KZ_{0ab}^{i}=0$, то $KZ(\varepsilon_a,\varepsilon_b)\xi=0$. Так как $\{\varepsilon_a\}$ образуют базис подпространства $D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$, а проектором модуля *X(M)* на это подпространство является эндоморфизм $\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}\left(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right)$, то $KZ\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\xi=0;\quad\forall X$, $Y\in X(M)$. Полученное тождество равносильно следующему

$$KZ\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\xi - KZ(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;$$
$$\forall X, Y \in X(M). \qquad (7)$$

3) Аналогично, рассматривая соотношения $KZ^0_{0a\hat{b}} = 0;\ KZ^{\hat{c}}_{0a\hat{b}} = 0;\ KZ^{\hat{c}}_{0a\hat{b}} = 0$, т.е. $KZ^i_{0a\hat{b}} = 0$, получим $KZ\left(\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}}\right)\xi = 0$. Так как $\{\varepsilon_a\}, \{\varepsilon_{\hat{a}}\}$ образуют базис подпространств $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$, а проекторами модуля *X(M)* на эти подпространства являются эндоморфизмы

$$\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$$
и $\bar{\pi} = \bar{\sigma} \circ l = \frac{1}{2}\left(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, то
$$KZ\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, -\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right)\xi = 0; \forall X, Y \in X(M)$$

Полученное тождество равносильно следующему тождеству

$$KZ\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\xi + KZ(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;$$
$$\forall X, Y \in X(M). \qquad (8)$$

Из (7) и (8) получим:

$$KZ\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\xi = KZ(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;$$
$$\forall X, Y \in X(M). \qquad (9)$$

4) Применяя процедуру восстановления тождества к равенствам

$$KZ^0_{a0b} = 0;\ KZ^c_{a0b} = 0;\ KZ^{\hat{c}}_{a0b} = 0,$$

получим тождество

$$KZ\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y - KZ(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;$$
$$\forall X, Y \in X(M). \qquad (10)$$

5) Теперь распишем соотношения:

$$KZ^0_{a0\hat{b}} = -\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^b_a \xi^0;$$
$$KZ^c_{a0\hat{b}} = -\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^b_a \xi^c;$$
$$KZ^{\hat{c}}_{a0\hat{b}} = -\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^b_a \xi^{\hat{c}},$$

т.е. $KZ^i_{a0\hat{b}} = -\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^b_a \xi^i$. Последнее равенство запишем в виде $KZ\left(\xi, \varepsilon_{\hat{b}}\right)\varepsilon_a = -\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\langle \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}}\right\rangle \xi$.

Так как $\{\varepsilon_a\}, \{\varepsilon_{\hat{a}}\}$ образуют базис подпространств $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$, а проекторами модуля *X(M)* на эти подпространства являются эндоморфизмы

$$\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$$
и $\bar{\pi} = \bar{\sigma} \circ l = \frac{1}{2}\left(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, то
$$KZ\left(\xi, -\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X\right)\left(\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right) =$$
$$= -\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\langle -\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, \Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right\rangle \xi;$$
$$\forall X, Y \in X(M).$$

Полученное тождество равносильно следующему тождеству:

$$KZ\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y + KZ(\xi, \Phi X)\Phi Y =$$
$$= -\frac{\chi}{n(2n+1)}\langle \Phi X, \Phi Y\rangle \xi;\ \forall X, Y \in X(M). \qquad (11)$$

С учетом (10) последнее тождество запишется в виде:

$$KZ\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y = KZ(\xi, \Phi X)\Phi Y =$$
$$= -\frac{\chi}{2n(2n+1)}\langle \Phi X, \Phi Y\rangle \xi;\ \forall X, Y \in X(M). \qquad (12)$$

Назовем тождество (12) вторым дополнительным тождеством конциркулярной кривизны АС-многообразия класса C_{11}.

Определение 2. Скажем, что *АС*-многообразие класса C_{11} удовлетворяет второму дополнительному тождеству конциркулярной кривизны или является многообразием класса CZ_2, если тензор конциркулярной кривизны удовлетворяет тождеству

$$KZ\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y = KZ(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;$$
$$\forall X, Y \in X(M). \qquad (13)$$

В силу невырожденности метрики из определения 2 и (12) непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 4. *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса CZ_2 тогда и только тогда, когда *АС*-многообразие класса C_{11} имеет нулевую скалярную кривизну.

Замечание 1. Из теорем 3 и 4 следует, что *АС*-многообразия класса CZ_1 являются многообразиями класса CZ_2.

6) Рассмотрим соотношения:

$$KZ^0_{abc} = 0;\ KZ^d_{abc} = 0;\ KZ^{\hat{d}}_{abc} = 0, \text{ т.е. } KZ^i_{abc} = 0.$$

Последнее равенство запишем в виде: $KZ(\varepsilon_a, \varepsilon_b)\varepsilon_c = 0$. Поскольку $\{\varepsilon_a\}$ образуют базис подпространства $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$, а проектором модуля *X(M)* на это подпространство является эндоморфизм

$$\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right), \text{ то}$$
$$KZ\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, \Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right)\left(\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z\right) = 0;$$
$$\forall X, Y, Z \in X(M).$$

Полученное тождество равносильно следующему

$$KZ\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z - KZ\left(\Phi^2 X, \Phi Y\right)\Phi Z -$$
$$- KZ\left(\Phi X, \Phi^2 Y\right)\Phi Z - KZ(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0;$$

$$\forall X,Y,Z\in X(M). \qquad (14)$$

7) Рассмотрим соотношения:

$$KZ^0_{bc\hat d}=A^{0d}_{bc}+\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^d_b\delta^0_c=0;$$

$$KZ^a_{bc\hat d}=A^{ad}_{bc}+\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^d_b\delta^a_c;$$

$$KZ^{\hat a}_{bc\hat d}=A^{\hat a d}_{bc}+\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^d_b\delta^{\hat a}_c=0,$$

т.е. $KZ^i_{bc\hat d}=A^{id}_{bc}+\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^d_b\delta^i_c$. Последнее соотношение запишем в виде:

$$KZ(\varepsilon_c,\varepsilon_{\hat d})\varepsilon_b=A(\varepsilon_b,\varepsilon_c,\varepsilon_{\hat d})+\frac{\chi}{2n(2n+1)}\langle\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat d}\rangle\varepsilon_c.$$

Так как $\{\varepsilon_a\},\{\varepsilon_{\hat a}\}$ образуют базис подпространств $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$, а проекторами модуля *X(M)* на эти подпространства являются эндоморфизмы

$$\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}\left(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right)$$

$$\text{и } \bar\pi=\bar\sigma\circ l=\frac{1}{2}\left(-\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right), \text{ то}$$

$$KZ\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right)=$$
$$=A\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z,\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)+$$
$$+\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\langle\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z,-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right\rangle\times$$
$$\times\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right);\forall X,Y,Z\in X(M).$$

Раскрывая по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим, что последнее тождество равносильно следующему тождеству:

$$KZ\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+KZ\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z-$$
$$-KZ\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z+KZ(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=$$
$$=A\left(\Phi^2Z,\Phi^2X,\Phi^2Y\right)+A\left(\Phi^2Z,\Phi X,\Phi Y\right)+$$
$$+A\left(\Phi Z,\Phi^2X,\Phi Y\right)-A\left(\Phi Z,\Phi X,\Phi^2Y\right)+$$
$$+\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\{\Phi^2X\left\langle\Phi^2Z,\Phi^2Y\right\rangle+\Phi^2X\left\langle\Phi Z,\Phi Y\right\rangle+\right.$$
$$\left.+\Phi X\left\langle\Phi^2Z,\Phi Y\right\rangle-\Phi X\left\langle\Phi Z,\Phi^2Y\right\rangle\right\};$$
$$X,Y,Z\in X(M).$$

Используя свойства тензора A [2] и равенство $\left\langle\Phi^2Z,\Phi^2Y\right\rangle=\left\langle\Phi Z,\Phi Y\right\rangle$, последнее тождество можно переписать в виде:

$$KZ\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+KZ\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z-$$
$$-KZ\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z+KZ(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=$$
$$=-4A(Z,X,Y)+\frac{\chi}{n(2n+1)}\left\{\Phi^2X\langle\Phi Z,\Phi Y\rangle-\right.$$
$$\left.-\Phi X\langle Z,\Phi Y\rangle\right\};\forall X,Y,Z\in X(M).$$

Полученное тождество с учетом (14) запишется в виде:

$$KZ\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-KZ\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z=$$
$$=-2A(Z,X,Y)+$$
$$+\frac{\chi}{n(2n+1)}\left\{\Phi^2X\langle\Phi Z,\Phi Y\rangle-\Phi X\Omega(Z,\Phi Y)\right\};$$
$$\forall X,Y,Z\in X(M). \qquad (15)$$

Назовем тождество (15) третьим дополнительным тождеством концциркулярной кривизны АС-многообразия класса C_{11}.

Определение 3. Скажем, что *АС*-многообразие класса C_{11} удовлетворяет третьему дополнительному тождеству концциркулярной кривизны или является многообразием класса CZ_3, если тензор концциркулярной кривизны удовлетворяет тождеству

$$KZ\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-KZ\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z=0;$$
$$\forall X,Y,Z\in X(M). \qquad (16)$$

Пусть $\left\{M^{2n+1},\xi,\eta,\Phi,g\right\}$ является *АС*-многообразие класса C_{11}, удовлетворяющее третьему дополнительному тождеству концциркулярной кривизны, т.е. является многообразием класса CZ_3. Тогда согласно определения 3 имеем

$$KZ\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-KZ\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z=0;$$
$$\forall X,Y,Z\in X(M).$$

На пространстве присоединенной *G*-структуры это равенство, с учетом (4) и вида матрицы эндоморфизма Ф, примет вид: $KZ^a_{bc\hat d}=0$, т. е. $A^{ad}_{bc}+\frac{\chi}{2n(2n+1)}\delta^d_b\delta^a_c=0$. Свернем последнее равенство сначала по индексам a и b, а затем по индексам c и d, тогда получим $A^{ab}_{ab}+\frac{\chi}{2(2n+1)}=0$, т.е., с учетом (3), $2n\chi=0$, т.е. $\chi=0$. Согласно полученному равенству получим, что $A^{ad}_{bc}=0$, т.е. многообразия является плоским.

Обратно, для плоского многообразия выполнено равенство $KZ^a_{bc\hat d}=0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса CZ_3 тогда и только тогда, когда оно является плоским многообразием.

С учетом теоремы 2 [2], теорему 5 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 6. *АС*-многообразие класса C_{11} является многообразием класса CZ_3 тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно произведению комплексного евклидова пространства на вещественную прямую, снабженную канонической косимплектической структурой.

9) Наконец рассмотрим соотношения:

$$KZ^0_{b\hat{c}\hat{d}}=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left(\delta^c_0\delta^d_b-\delta^d_0\delta^c_b\right)=0;$$

$$KZ^a_{b\hat{c}\hat{d}}=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left(\delta^c_{\hat{a}}\delta^d_b-\delta^d_{\hat{a}}\delta^c_b\right)=0;$$

$$KZ^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}}=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left(\delta^c_a\delta^d_b-\delta^d_a\delta^c_b\right),$$

т.е. $KZ^i_{b\hat{c}\hat{d}}=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left(\delta^c_{\hat{i}}\delta^d_b-\delta^d_{\hat{i}}\delta^c_b\right)$. Полученное соотношение перепишем в форме: $KZ\left(\varepsilon_{\hat{c}},\varepsilon_{\hat{d}}\right)\varepsilon_b=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\{\varepsilon_{\hat{c}}\left\langle\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{d}}\right\rangle-\varepsilon_{\hat{d}}\left\langle\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}}\right\rangle\right\}$. Так как $\{\varepsilon_a\},\{\varepsilon_{\hat{a}}\}$ образуют базис подпространств $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$, а проекторами модуля *X(M)* на эти подпространства являются эндоморфизмы

$$\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}\left(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right) \text{ и}$$

$$\bar{\pi}=\bar{\sigma}\circ l=\frac{1}{2}\left(-\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right), \text{ то}$$

$$KZ\left(-\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\left(\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right)=$$

$$=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\{\left(-\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left\langle\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z,-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right\rangle\right\}-$$

$$-\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\{\left(-\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left\langle\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z,-\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right\rangle\right\},$$

$$\forall X,Y,Z\in X(M).$$

Раскрывая по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим, что последнее тождество равносильно следующему тождеству:

$$KZ\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+KZ\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+$$

$$+KZ\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-KZ(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=$$

$$=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\{\Phi^2X\left\langle\Phi^2Z,\Phi^2Y\right\rangle+\Phi^2X\left\langle\Phi Z,\Phi Y\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\Phi X\left\langle\Phi^2Z,\Phi Y\right\rangle+\Phi X\left\langle\Phi Z,\Phi^2Y\right\rangle\right\}-$$

$$-\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\{\Phi^2Y\left\langle\Phi^2Z,\Phi^2X\right\rangle+\Phi^2Y\left\langle\Phi Z,\Phi X\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\Phi Y\left\langle\Phi^2Z,\Phi X\right\rangle+\Phi Y\left\langle\Phi Z,\Phi^2X\right\rangle\right\},$$

$$\forall X,Y,Z\in X(M).$$

Согласно (14) и равенства $\left\langle\Phi^2Z,\Phi^2Y\right\rangle=\left\langle\Phi Z,\Phi Y\right\rangle$, последнее тождество можно переписать в виде:

$$KZ\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-KZ(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=$$

$$=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\{\Phi^2X\left\langle\Phi Z,\Phi Y\right\rangle+\Phi X\left\langle Z,\Phi Y\right\rangle\right\}-$$

$$-\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left\{\Phi^2Y\left\langle\Phi Z,\Phi X\right\rangle+\Phi Y\left\langle Z,\Phi X\right\rangle\right\},$$

$$\forall X,Y,Z\in X(M). \tag{17}$$

Назовем тождество (17) четвертым дополнительным тождеством концикулярной кривизны АС-многообразия класса C_{11}.

Определение 4. Скажем, что *АС*-многообразие класса $\boldsymbol{C}_{11}$ удовлетворяет четвертому дополнительному тождеству концикулярной кривизны или является многообразием класса CZ_4, если тензор концикулярной кривизны удовлетворяет тождеству

$$KZ\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-KZ(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=0;$$

$$\forall X,Y,Z\in X(M) \tag{18}$$

Пусть $\left(M^{2n+1},\xi,\eta,\Phi,g\right)$ является многообразием класса CZ_4. Тогда

$$KZ^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}}=\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left(\delta^c_a\delta^d_b-\delta^d_a\delta^c_b\right)=0, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\chi}{2n(2n+1)}\left(\delta^c_a\delta^d_b-\delta^d_a\delta^c_b\right)=0.$$

Последнее равенство свернем сначала по индексам *a* и *b*, а затем по индексам *c* и *d*, тогда получим $\frac{\chi}{2(2n+1)}(n-1)=0$. Из последнего равенства следует, что либо *n*=1, т. е. $\dim M=3$, либо $\chi=0$.

Если $\dim M = 3$ и $\chi = 0$, то и $KZ^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}} = 0$, т.е. многообразие является многообразием класса CZ_4.

Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 7. *АС*-многообразие класса C_{11} размерности больше 3 является многообразием класса CZ_4 тогда и только тогда, когда оно является многообразием нулевой скалярной кривизны.

Замечание 2. Поскольку тензор конциркулярной кривизны обладает свойствами тензора кривизны, в частности, $KZ^a_{bc\hat{d}} + KZ^a_{c\hat{d}b} + KZ^a_{\hat{d}bc} = 0$, то из $KZ^a_{bc\hat{d}} = 0$ следует, что $KZ^a_{\hat{d}bc} = 0$, т.е. многообразие класса CZ_3 является многообразием класса CZ_4.

Кроме того, мы имеем следующую теорему.

Теорема 8. Тензор конциркулярной кривизны *АС*-многообразий класса C_{11} обладает следующими тождествами:

1) $KZ(\xi, \Phi^2 X)\xi = \frac{\chi}{2n(2n+1)}\Phi^2 X;$
2) $KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\xi - KZ(\Phi X, \Phi Y) = 0;$
3) $KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\xi + KZ(\Phi X, \Phi Y) = 0;$
4) $KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\xi = KZ(\Phi X, \Phi Y) = 0;$
5) $KZ(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y - KZ(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;$

6) $KZ(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y + KZ(\xi, \Phi X)\Phi Y = -\frac{\chi}{n(2n+1)}\langle \Phi X, \Phi Y\rangle \xi;$
7) $KZ(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y = KZ(\xi, \Phi X)\Phi Y = -\frac{\chi}{n(2n+1)}\langle \Phi X, \Phi Y\rangle \xi;$
8) $KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z - KZ(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - KZ(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z - KZ(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0;$

9) $KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z - KZ(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z = -2A(Z, X, Y) + \frac{\chi}{n(2n+1)}\{\Phi^2 X\langle \Phi Z, \Phi Y\rangle - \Phi X\langle Z, \Phi Y\rangle\};$
10) $KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z - KZ(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = \frac{\chi}{2n(2n+1)}\{\Phi^2 X\langle \Phi Z, \Phi Y\rangle + \Phi X\langle Z, \Phi Y\rangle - \Phi^2 Y\langle \Phi Z, \Phi X\rangle - \Phi Y\langle Z, \Phi X\rangle\}$ $\forall X, Y, Z \in X(M).$

В заключение рассмотрим контактные аналогии тождеств Грея [5] для тензора конциркулярной кривизны.

Контактными аналогами тождеств А.Грея R_1, R_2, R_3 кривизны почти эрмитовых многообразий для тензора конциркулярной кривизны являются тождества кривизны GZ_1, GZ_2, GZ_3 для почти контактных метрических многообразий:

$$GZ_1 : \langle KZ(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\rangle;$$
$$GZ_2 : \langle KZ(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\rangle + \langle KZ(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi^2 Z, \Phi W\rangle + \langle KZ(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi^2 W\rangle;$$
$$GZ_3 : \langle KZ(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle KZ(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W\rangle;$$

$\forall X, Y, Z \in X(M).$

Назовем *АС*-многообразие класса C_{11}, обладающие тождествами GZ_1, GZ_2, GZ_3, соответственно, GZ_1, GZ_2, GZ_3 – многообразием.

Исследуем эти тождества.

Теорема 9. Пусть $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – *АС*-структура. Тогда:

(1) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ структура класса GZ_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры KZ_{abcd}=KZ_{abcd}=0;

(2) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ структура класса GZ_2 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры KZ_{abcd}=KZ_{abcd}=0;

(3) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$структура класса GZ_3 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры Z_{abcd}=0.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы для тензора римановой кривизны и мы опускаем его.

Из теоремы 9 следует, что *АС*-многообразие класса C_{11} является GZ_3-многообразием и GZ_2-многообразием. *АС*-многообразие класса C_{11} является GZ_1-многообразием тогда и только тогда, когда оно является многообразием класса GZ_4.

Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 10. *АС*-многообразие класса C_{11} является GZ_3-многообразием и GZ_2-многообразием. *АС*-многообразие класса C_{11} является GZ_1-многообразием тогда и только тогда, когда оно является многообразием класса GZ_4. И в размерности больше 3 является многообразием нулевой скалярной кривизны.

8.07.2014

Список литературы:

1. Рустанов, А.Р. Дифференциальная геометрия почти контактных метрических многообразий класса C_{11} / А.Р. Рустанов, Н.Н. Щипкова // Вестник ОГУ. – №9. –2010. – С. 65–68.
2. Рустанов, А.Р. Тождества кривизны многообразий класса C_{11} / А.Р. Рустанов, Н.Н. Щипкова // Вестник ОГУ. – №6. – 2011. – С.169–171.
3. Yano, K. Concircular geometry. I–IV/ K. Yano. – Proc. Imp. Acad. Japan, 1940. – V. 16. – P. 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.

4. Кириченко, В.Ф. Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий / В.Ф. Кириченко, А.Р. Рустанов // Математический сборник. – 2002. – Т. 193. – №8. – С. 71–100.
5. Gray, A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds / A. Gray. – Tohoku Math. J., 1976. – V. 28. – P. 601–612.

Сведения об авторах:
Рустанов Алигаджи Рабаданович, доцент кафедры теории и социологии Московского педагогического государственного университета, кандидат физико-математических наук
119571, г. Москва, пр-т Вернадскаого, дом 88, корп 1, ком 1204, e-mail: aligadzhi@yandex.ru
Щипкова Нина Николаевна, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы 13, ауд 1502, тел. (3532)372539, e-mail:ningeom@pochtamt.ru