

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООВОГО РАСШИРЕНИЯ НА ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КЕРАМИЧЕСКОЙ ПРОБКЕ

В данной работе рассматривается, проблема разрушения керамической пробки при стопорной разливке стали. Разрушение связано с резким нагревом пробки, при заполнении промышленного ковша жидкой сталью, и неравномерностью нагрева отдельных частей пробки. Разработан алгоритм расчёта термоупругих напряжений в трёхмерной области методом конечных элементов. При заданных исходных данных предложен способ поиска интервала изменения коэффициента термического расширения, при котором не происходит разрушения изделия. Такой подход позволил модифицировать технологию изготовления керамических пробок при различных условиях эксплуатации.

Ключевые слова: тепловое поле, термоупругие напряжения, метод конечных элементов, математическое моделирование.

1. Постановка задачи

Исследуемая задача является осесимметричной. Пусть область $\Omega \in R^2$ – половина осевого сечения с границей $\Gamma \in \partial\Omega, \Gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ (рис 1). Распределение температуры $T(r, z, t)$ в области Ω описывается уравнением теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k_n \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где точка $(r, z) \in \Omega, t \in [0, \bar{T}]$, ρ – плотность материала, c – теплоёмкость, k_n – коэффициент теплопроводности материала пробки.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} T(r, z, t)|_{t=0} &= T_0 \\ \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial n}|_{\Gamma_1} &= \alpha_m (T_m - T), \quad \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \alpha_b (T_b - T), \\ \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial n}|_{\Gamma_3} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь α_m, α_b – коэффициенты теплообмена с металлом и с воздухом соответственно, T_m – температура расплавленного металла, T_b – температура воздуха, n – вектор внешней нормали к границе области Ω .

Напряженное состояние, возникающее в области Ω , описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, $i, j = r, z, \theta$. Граничные условия для уравнения термоупругости (3) в рассматриваемом случае примут вид

$$\begin{cases} \sigma_{rr} n_r + \sigma_{rz} n_z = 0 \\ \sigma_{rz} n_r + \sigma_{zz} n_z = 0 \end{cases}$$

где n_r, n_z – направляющие косинусы внешней нормали к границе Γ .

Задача. Требуется найти интервал изменения коэффициента температурного расширения, в котором нагреваемое изделие не разрушится от возникающих термонапряжений.

2. Решение задачи с применением метода конечных элементов

В процессе разлива стали возникает два вида нагрузок, связанных с изменением температуры – это термический удар, вызывающий сжимающие напряжения и неравномерный нагрев пробки.

В результате экспериментальных исследований [1], [2] показано, что мгновенное превышение напряжениями критических значений не приводит к разрушению материала. Разрушение материала возможно при более длительной нагрузке, т. е. при накоплении повреждений в структуре материала [3], что возможно в результате возникающего неравномерного нагрева.

Поэтому, в работе принято допущение, что к разрушению пробки приводят именно термические напряжения.

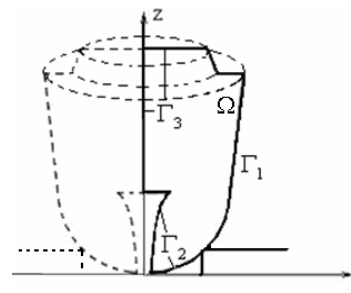


Рисунок 1. Осесимметричная модель керамической пробки, Ω – расчётная область

Учитывая, что коэффициент теплообмена между расплавленным металлом и керамикой, а также воздухом и керамикой в научной литературе не приводится, оценим их значения, с помощью теории пограничного слоя. Для случая расплавленного металла интенсивность теплообмена определяется числом Нуссельта по формуле

$$Nu_m = c \cdot Gr_m^\gamma Pr_m^\eta,$$

где Gr_m – число Грасгофа, Pr_m – число Прандтля. Параметр η определяется выражением $\eta = 0,3 + (0,02 / Pr_m^{1/3})$. Значения постоянных c и γ зависят от величины критерия Gr_m . При $Gr_m = 10^2 - 10^9$ (ламинарный режим) значение $c = 0,52$ и $\gamma = 0,25$. Если же $Gr_m > 10^9$ (турбулентный режим теплообмена), то $c = 0,105$ и $\gamma = 1/3$. Само число Грасгофа определяется выражением

$$Gr_m = \frac{\beta_m (T_m - T) g L^3}{\nu_m^2},$$

здесь β_m – коэффициент объёмного расширения расплавленного металла, g – ускорение свободного падения, L – характерный размер задачи, ν_m – коэффициент кинематической вязкости расплавленного металла. Число Pr_m определяется экспериментально. Используя число Нуссельта, коэффициент теплообмена с металлом можно вычислить по формуле

$$\alpha_m = k_m \cdot Nu_m / L,$$

где k_m – теплопроводность металла [4].

Оценим коэффициент теплообмена с воздухом, для части пробки контактирующей с воздухом по границе Γ_2 . Число Нуссельта для теплообмена с воздухом определяется по формуле

$$Nu_b = B(Gr_b \cdot Pr_b)^n.$$

Число Грасгофа для теплообмена с воздухом можно получить по формуле

$$Gr = \frac{(T_b - T) g l^3}{T_b \nu_b^2}.$$

В случае $10^3 < Gr_b \cdot Pr_b < 10^9$, тогда $B = 0,76$, $n = 1/4$, если же $Gr_b \cdot Pr_b > 10^9$, то $B = 0,15$, $n = 1/3$. Коэффициент теплообмена с воздухом аналогично вычисляется по формуле

$$\alpha_b = k_b \cdot Nu_b / L,$$

где k_b – теплопроводность воздуха [5].

Обозначим для удобства $\alpha = \alpha_m + \alpha_b$ – коэффициент теплообмена и температуру среды $T_{cp} = T_m + T_b$ – для границ $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Задачу (1) – (2) будем решать методом конечных элементов. Для этого от задачи тепло-

проводности перейдем к вариационной задаче, воспользовавшись принципом стационарности дополнительной энергии. В работе [6] показано, что вариационную задачу, сформулированную с помощью обобщённых координат, можно записать в виде уравнений Лагранжа в дополнительной форме

$$\sum_{i=1}^n \delta q_i \left(\int_{\Omega} \rho c \dot{T} \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} d\Omega + k_n \int_{\Omega} r T_{,s} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right)_{,s} d\Omega \right) = - \sum_{i=1}^n \delta q_i \left(\int_{\Gamma} \alpha T_{cp} \frac{\partial T}{\partial q_i} d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha T \frac{\partial T}{\partial q_i} d\Gamma \right), \quad (4)$$

через запятую обозначены производные по переменным r и z , $s = 1, 2$.

Искомое температурное поле $T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, r, z, t)$ рассматривается как функция, зависящая от n обобщенных координат q_i , которые являются неизвестными функциями времени.

Аналогично работе [7] дискретизацию расчётной области Ω проводим с помощью треугольных элементов, для чего строим неструктурированную сетку из m непересекающихся элементов с n узлами. На полученной расчётной сетке будем искать приближенное решение вариационной задачи теплопроводности (4) в виде следующей линейной комбинации

$$\tilde{T}(r, z, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) N_i(r, z), \quad (5)$$

где $q_i(t)$ – неизвестные коэффициенты, $N_i(r, z)$ – базисные функции вида $N_i(r, z) = (a + br + cz) / 2A$, где A – площадь элемента.

Подставляя решение (5) в уравнение (4) получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \rho c N_i N_j \dot{q}_i d\Omega + k_n \int_{\Omega} r N_{i,s} N_{j,s} q_i d\Omega - \int_{\Gamma} (\alpha N_i N_j q_i) d\Gamma \right) = - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} \alpha T_{cp} d\Gamma. \quad (6)$$

В матричной форме для одного элемента с узлами i, j, k , (6) запишется в виде

$$\rho c \int_{\Omega^e} [N^e]^T [N^e] d\Omega^e [\dot{q}] + (k_n \int_{\Omega^e} r [B^e]^T [B^e] d\Omega^e - \alpha \int_{\Gamma^e} [N^e]^T [N^e] d\Gamma^e) [q] = -\alpha \int_{\Gamma^e} T_{cp} d\Gamma^e, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega^e} [N^e]^T [N^e] d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k^2 \end{bmatrix} d\Omega^e$$

Матрица производных для одного треугольного элемента Ω^e имеет вид

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Интегралы, учитывающие конвективный теплообмен, например, между узлами i и j , принадлежащих границе Γ области Ω , имеет вид

$$\int_{\Gamma^e} [N^e]^T [N^e] d\Gamma^e = \int_{\Gamma^e} \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & 0 \\ N_i N_j & N_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Gamma^e$$

Просуммируем (7) по всем элементам, тогда получим систему из n линейных дифференциальных уравнений

$$C[\dot{q}] + B[q] = P,$$

где

$$C = \sum_{e=1}^m \rho c \int_{\Omega^e} [N^e]^T [N^e] d\Omega^e,$$

$$B = \sum_{e=1}^m (k_n \int_{\Omega^e} [B^e]^T [B^e] d\Omega^e - \alpha \int_{\Gamma^e} [N^e]^T [N^e] d\Gamma^e),$$

$$P = - \sum_{e=1}^m \alpha \int_{\Gamma^e} T_{cp} d\Gamma^e.$$

Заменив производную по времени, конечной разностью получаем следующую систему уравнений

$$\left(\frac{C}{\tau} + B\right)q^j = P + \frac{C}{\tau}q^{j-1}, \quad (8)$$

где τ – шаг по времени.

Таким образом, исходная задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений (8). Для линейного уравнения теплопроводности матрицы **C** и **B** всегда являются симметричными, с преобладающими элементами на главной диагонали, поэтому для решения системы уравнений (8) используем метод итераций.

Задачу термоупругости (3) также заменим эквивалентной вариационной задачей, основанной на принципе виртуальных (возможных) перемещений. Запишем вариационное уравнение для случая, когда на тело действуют поверхностные силы f и термические нагрузки, возникающие при неравномерном тепловом поле.

Вариационная задача равносильная уравнениям (3) имеет вид

$$\int_{\Omega} (\lambda \epsilon \delta \epsilon + 2G \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} (3\lambda + 2G) \alpha_T (T - T_0) \delta \epsilon d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \delta u_i n_j d\Gamma, \quad i, j = 1, 2 \quad (9)$$

где $\epsilon = \epsilon_{rr} + \epsilon_{zz}$ – деформация, $\lambda = \frac{\mu E}{(1-\mu)^2}$, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ –

постоянные Ламе для плоского напряженного состояния. Уравнение (9) описывает изменение полной термомеханической энергии тела, где левая часть этого уравнения выражает изменение энергии термоупругого деформирования тела, а правая изменение работы граничных нагрузок.

Запишем выражение (9) в матричной форме. Для этого постоянные Ламе λ и G запишем в виде матрицы констант упругости

$$D = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}$$

Обозначим через $u = u_1, v = u_2$. Перемещения запишем в виде вектора

$$\{U\} = [u \ v]^T$$

Соотношения Коши, выражающие деформации через перемещения примут вид

$$[\epsilon_r \ \epsilon_z \ \epsilon_{\theta} \ \epsilon_{rz}]^T = \left[\frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{u}{r} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right]^T.$$

Решение задачи (9) будем искать на неструктурированной расчётной сетке с треугольными ячейками, использованной для решения задачи теплопроводности. Перемещения u, v аппроксимируем кусочно-линейными функциями вида

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(r, z) u_i, \quad v = \sum_{i=1}^n N_i(r, z) v_i,$$

где u_i и v_i – неизвестные коэффициенты. Тогда матрица производных для одного элемента Ω^e с узлами ijk запишется в виде

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} \\ \frac{N_i}{r} & 0 & \frac{N_j}{r} & 0 & \frac{N_k}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Таким образом, уравнение (9) для одного элемента можно записать в матричной форме

$$\int_{\Omega^e} [B^e]^T [D] [B^e] \{U\} d\Omega^e = \int_{\Omega^e} [B^e]^T [D] \{\epsilon_T\} d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \{N^e\}^T \{P\} d\Gamma^e, \quad (10)$$

где $\{\epsilon_T\} = \alpha_T \Delta T \{1 \ 1 \ 0\}^T$ – вектор температурных деформаций. Суммируя выражение (10) по всем элементам расчётной сетки получим систему линейных алгебраических уравнений

$$K \{U\} = F, \quad (11)$$

где $\{U\}$ – вектор неизвестных коэффициентов для функции перемещений, K – матрица жесткости, F – вектор узловых нагрузок. Матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок определяются выражениями

$$K = \sum_{e=1}^m \int_{\Omega^e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega^e,$$

$$F = \sum_{e=1}^m \left(\int_{\Omega^e} [B^e]^T [D] \{\epsilon_T\} d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \{N^e\}^T \{P\} d\Gamma^e \right).$$

Симметричность матрицы K и преобладание главной диагонали позволяет применить для решения системы линейных алгебраических уравнений (11) метод итераций.

Таким образом, на каждом временном слое вычисляются температурные поля, затем вычисляются перемещения точек тела связанных с нагревом и поле напряжений.

Описанный алгоритм реализован в среде программирования Delphi.

3. Результаты вычислительного эксперимента

Керамическая пробка имеет следующие теплофизические характеристики: $\mu=0,25$, $E=2,76 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho=3600$ кг/м³, $c=920$ Дж/кг·К, $\lambda=25$ Вт/м·К, $\alpha_T=8 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Предел прочности на растяжение и сжатие равны соответственно $\sigma_p=2,21 \cdot 10^8$ Па, $\sigma_c=2,484 \cdot 10^9$ Па. Расчёты проведены при температуре металла $T_{met}=1400$ °С и начальной температуре пробки $T=22$ °С, в течение времени $\bar{T}=30$ с, для значений коэффициентов теплового расширения из диапазона $1 \cdot 10^{-7} \leq \alpha_T \leq 3 \cdot 10^{-6}$.

Согласно, работе [8] величина сжимающих напряжений при термоударе не превышает значения $\sigma_c = E\alpha_T(T_{met} - T_0)/(1 - 2\nu)$, для рассмотренного в этой работе материала это значение при наибольшем коэффициенте $\alpha_T=3 \cdot 10^{-6}$ 1/К рав-

но $\sigma_c=2,28 \cdot 10^9$ МПа, т. е. не превышает предела прочности на сжатие, равного $\sigma_c^*=2,484 \cdot 10^9$ МПа. Не превышаетея предел прочности на сжатие и при последующем нагреве, что подтверждается численными расчётами (рис. 2).

Динамика изменения растягивающих напряжений при различных значениях коэффициента теплового расширения представлена на рис. 3.

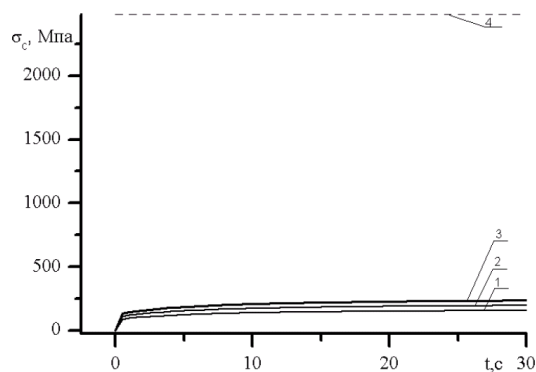


Рисунок 2. Динамика сжимающих напряжений
1) $2 \cdot 10^{-6}$ 1/К, 2) $2,5 \cdot 10^{-6}$ 1/К, 3) $3 \cdot 10^{-6}$ 1/К, 4) предел прочности на сжатие

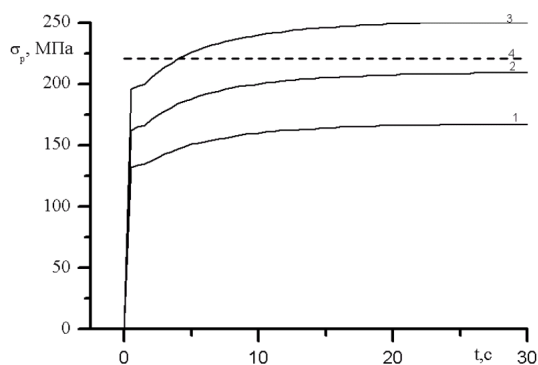


Рисунок 3. Динамика растягивающих напряжений
1) $2 \cdot 10^{-6}$ 1/К, 2) $2,5 \cdot 10^{-6}$ 1/К, 3) $3 \cdot 10^{-6}$ 1/К, 4) предел прочности на растяжение

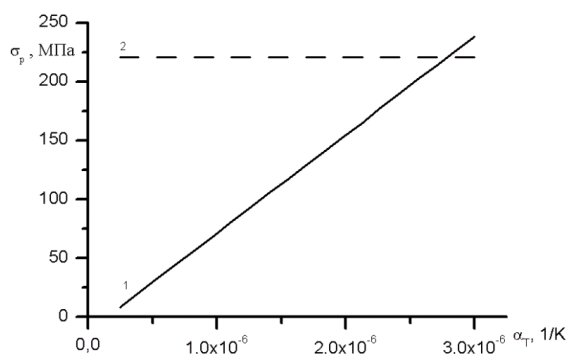


Рисунок 4. Результат параметрического анализа максимальных растягивающих напряжений от коэффициента термического расширения
1 – максимальные растягивающие напряжения, 2 – предел прочности на растяжение

Из рис. 3 видно, что при $\alpha_T \leq 3 \cdot 10^{-6} 1/K$ растягивающие термонапряжения превосходят предел прочности на растяжение, что приведёт к разрушению пробки.

В результате параметрического анализа, проведённого на отрезке $1 \cdot 10^{-7} \leq \alpha_T \leq 3 \cdot 10^{-6}$ (рис 4.), было определено, что для приведенных условий эксплуатации, значение коэффициента

теплового расширения не должно превышать значения $2,8 \cdot 10^{-6} 1/K$.

Полученные результаты были использованы в качестве рекомендаций при изготовлении керамических пробок. Были внесены изменения в технологию изготовления, что привело к увеличению срока службы пробки.

25.04.2014

Список литературы:

1. Каннель, Г.И. Ударно-волновые явления в конденсированных средах / Г.И. Каннель [и др.]. – М.: Янус-К, 1996 – 408 с.
2. Курран, Д.Р. Динамическое разрушение / Д.Р. Курран // Динамика удара. – М.: Мир, 1985 – С. 257–293.
3. Белов, Н.Н. Расчёт железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки / Н.Н. Белов [и др.]. – Томск: Нортхэмптон, 2004. – 465 с.
4. Исаченко, В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел – М.: Энергия, 1975, 488 с.
5. Кислицын, А.А. Основы теплофизики / А.А. Кислицын. – Тюмень, 2002. – 152 с.
6. Био, М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. – М.: Энергия, 1975.
7. Ткачёв, В.И. Расчёт динамики термоупругих напряжений в керамическом клапане методом конечных элементов / В.И. Ткачёв, Н.Д. Морозкин, В.В. Чудинов // Вестник Башкирского университета. – 2014. – Т. 19.–№1.– С. 8–13.
8. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1975. – 301 с.
9. Новацкий, В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1970.
10. Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964.
11. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979.

Сведения об авторах:

Морозкин Николай Данилович, ректор Башкирского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

Ткачёв Владислав Игоревич, ассистент кафедры прикладной и высшей математики, Бирский филиал Башкирского государственного университета, e-mail: tvi-vlad@mail.ru

Чудинов Валерий Валентинович, доцент кафедры прикладной и высшей математики, Бирский филиал Башкирского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: chudinovvv@rambler.ru

450074, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32