

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ С ПОМОЩЬЮ ФИКТИВНЫХ НАГРУЗОК

Разработана методика прочностных расчетов тонкостенных стержней, совершающих свободные изгибные колебания. Данная методика позволяет определять фиктивные нагрузки, действующие на стержни в процессе колебаний, и с помощью данных нагрузок осуществлять прочностные расчеты статических стержней.

Ключевые слова: стержень, колебания, прочность, фиктивная нагрузка, напряжение.

Как известно, в процессе колебаний стержни могут разрушиться не только вследствие резонансных явлений, но и в связи с их недостаточной прочностью [1]. Изменение формы стержня в процессе колебаний свидетельствует о наличии в сечениях стержня внутренних силовых факторов, а, следовательно, и напряжений. Причиной появления этих напряжений являются не внешние нагрузки, а инерционность стержня. Поэтому применять для определения данных напряжений существующие методы определения напряжений не представляется возможным. Тем не менее, если использовать принцип Даламбера, то есть считать что в процессе колебаний в каждый момент времени поперечные сечения стержня неподвижны и на них действуют фиктивные инерциальные нагрузки, то исследование напряженно-деформированного состояния такого стержня не вызовет затруднений.

Исходя из вышеизложенного, целью исследования являлась разработка методики определения напряжений, возникающих в стержнях при колебаниях под действием фиктивных нагрузок.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1) разработка методики определения величин фиктивных нагрузок при свободных изгибных колебаниях тонкостенного стержня;

2) определение внутренних силовых факторов, напряжений в сечениях стержня и проверка условий прочности и жесткости.

При исследовании свободных изгибных колебаний тонкостенного прямолинейного стержня использовались уравнения [2]:

$$\rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{G}{k_{11}} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial \beta_1}{\partial z} \right) = 0;$$

$$\rho J_1 \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} - EJ_1 \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial z^2} + \frac{G}{k_{11}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \beta_1 \right) = 0, \quad (1)$$

где η – прогиб, м;

β_1 – угол поворота сечения;

M_1 – изгибающий момент, НЧм;

Q_2 – поперечная сила, Н;

ρ – плотность материала стержня, кг/м³;

E – модуль упругости, Н/м²;

F – площадь сечения стержня, м²;

J_1 – осевой момент инерции, м⁴;

k_{11} – коэффициент формы сечения, м².

Данные уравнения учитывают вторичные сдвиги, что позволяет получить более точные результаты. Результатом решения уравнения является матричное уравнение изгибных колебаний стержня [1]. Оно представлено в безразмерных величинах:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}(z) \\ \beta_1(z) \\ \tilde{M}_1(z) \\ \tilde{Q}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) & A_{13}(z) & A_{14}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) & A_{23}(z) & A_{24}(z) \\ A_{31}(z) & A_{32}(z) & A_{33}(z) & A_{34}(z) \\ A_{41}(z) & A_{42}(z) & A_{43}(z) & A_{44}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}(0) \\ \beta_1(0) \\ \tilde{M}_1(0) \\ \tilde{Q}_2(0) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\tilde{\eta}(z) = \frac{\eta(z)}{h}$, $\beta_1(z)$, $\tilde{M}_1(z) = \frac{M_1(z)h}{EJ_1}$,

$\tilde{Q}_2(z) = \frac{Q_2(z)}{\rho F \omega^2 h^2}$ – безразмерные характеристики прогиба, угла поворота сечения, изгибающего момента и поперечной силы;

$\tilde{\eta}(0) = \frac{\eta(0)}{h}$, $\beta_1(0)$, $\tilde{M}_1(0) = \frac{M_1(0)h}{EJ_1}$,

$\tilde{Q}_2(0) = \frac{Q_2(0)}{\rho F \omega^2 h^2}$ – безразмерные значения значений прогиба, угла поворота сечения, изгибающего момента и поперечной силы в сечении на левом конце стержня;

$A_{ij}(z)$ – элементы матрицы, рассмотренные в [2];

h – высота сечения (принимается за характерный размер), м;

ω – частота свободных колебаний, c^{-1} .

Уравнения (2) позволяют определить значения частот и формы колебаний. При наличии конструктивных ограничений, с помощью этих уравнений производятся расчеты на жесткость и прочность. Например, при ограничении прогиба балки могут быть получены максимальные значения напряжений.

Был рассмотрен однопролетный прямолинейный стержень бисимметричного профиля при шарнирном закреплении концов. Граничные условия имеют вид:

$$\tilde{\eta}(0) = 0, \tilde{M}_1(0) = 0, \tilde{\eta}(l) = 0, \tilde{M}_1(l) = 0, \quad (2)$$

где l – длина стержня, м.

Граничные условия дополнены условием жесткости. При этом учтено, что максимальное значение прогиба $\tilde{\eta}_{\max}$ соответствует первой главной форме колебаний и находится при $z = l/2$:

$$\tilde{\eta}_{\max} = \tilde{\eta}(l/2) \leq \frac{[\eta]}{l}. \quad (3)$$

В результате зависимость между граничными условиями на левом конце стержня и выражения для определения неизвестных граничных условий принимают вид:

$$\frac{\beta_1(0)}{\tilde{Q}_2(0)} = \sqrt{\frac{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}{A_{12}(l) \cdot A_{32}(l)}}. \quad (4)$$

$$\beta_1(0) = \frac{\tilde{\eta}_{\max}}{A_{12}(l/2) + A_{14}(l/2) \sqrt{\frac{A_{12}(l) \cdot A_{32}(l)}{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}}};$$

$$\tilde{Q}_2(0) = \frac{\tilde{\eta}_{\max}}{A_{14}(l/2) + A_{12}(l/2) \sqrt{\frac{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}{A_{12}(l) \cdot A_{32}(l)}}}. \quad (5)$$

В качестве примера был рассмотрен стальной стержень двутаврового сечения со следующими размерами в относительных величинах: $\tilde{h} = 1$; $\tilde{b} = 0,8$; $\tilde{\delta} = 0,05$; $\tilde{l} = 20$. Допускаемый прогиб принят в виде зависимости от длины стержня $[\eta] = 0,001l$, допускаемое нормальное напряжение $[\sigma] = 150$ МПа.

Расчетные формулы, предложенные в [1] позволяют вычислить частоты колебаний, значения первых форм приведены в таблице 1.

Сравнение результатов расчета производилось с результатами, полученными для аналогичного стержня в системе АРМ WinMachine. При этом отличие в значениях частот невелико.

Из (5) найдены угол поворота и характеристика силы на левом конце стержня $\beta_1(0) = -3,1 \cdot 10^{-3}$; $\tilde{Q}_2(0) = -3,14 \cdot 10^{-3}$.

Значение силы соответствует реакциям опор $R_A = 92,5$ Н.

Для определения состояния стержня при заданных условиях и построения эпюр распределения внутренних силовых факторов (рисунок 1) применялось выражение:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}(z) \\ \beta_1(z) \\ \tilde{M}_1(z) \\ \tilde{Q}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}(z) & A_{14}(z) \\ A_{22}(z) & A_{24}(z) \\ A_{32}(z) & A_{34}(z) \\ A_{42}(z) & A_{44}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1(0) \\ \tilde{Q}_2(0) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для выполнения расчета на прочность напряжений применялись формулы:

$$\sigma = \frac{M_1 y}{J_1},$$

$$\tau = \frac{S_1^* Q_2}{\delta J_1}, \quad (7)$$

где y – координата рассматриваемой точки по оси y , м;

S_1^* – статический момент отсеченной части сечения относительно оси x , m^3 ;

δ – толщина стенки стержня, м.

При изгибе стержней распределение нормальных напряжений происходит по линейному закону, а касательных напряжений – по криволинейному. Максимальные нормальные напряжения возникают в волокнах наиболее удаленных от нейтрального слоя, а максимальные касательные – на нейтральном слое.

При определении эквивалентных напряжений было учтено, что, как правило, тонкостенные стержни изготавливают из пластичных материалов, поэтому расчет был произведен в соответствии с четвертой теорией прочности, согласно которой для изгиба (плоского напряженного состояния) эквивалентные напряжения должны удовлетворять условию прочности:

$$\sigma_{\text{эке}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8)$$

При расчете на прочность при колебаниях в системе АРМ WinMachine сформулиро-

вана и использована методика фиктивных нагрузок – введены силы инерции. Для сил инерции применялись упрощенные варианты, приведенные в таблице 2.

Одним из параметров динамического расчета было соблюдение условия жесткости (3). Так как для составления аналогичной статической схемы расчета необходимо, чтобы это условие также соблюдалось, то основным параметром выбора значения сил инерции является вызов ими максимально допустимого прогиба [3].

Результаты расчета представлены в виде графиков. На рисунках 2 и 3 приведены графики распределения изгибающего момента и максимальных эквивалентных напряжений по длине балки. Цифры в обозначении соответствуют схеме статического нагружения. Линия 4 соответствует аналитическому расчету по формуле (6).

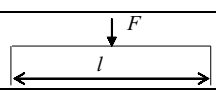
Из графиков 2 и 3 видно, что значения изгибающего момента при стандартном расчете

и при расчете по предлагаемой методике существенно отличаются, а значения эквивалентных напряжений при данных расчетах очень близки. Это можно объяснить наличием при статической нагрузке в сечениях стержня значительных поперечных сил (рисунок 4). Значения поперечных сил при расчете по формуле (6) очень малы, поэтому их эпюра на рисунке 4 не показана.

Таблица 1. Значения частот колебаний

Номер формы колебаний	1	2	3	4
Безразмерная частота, полученная в расчете	0,211	0,824	1,785	3,033
Частота, полученная в расчете, рад/с	547	2138	4630	7868
Частота, полученная в APM WinMachine, рад/с	525	2103	4732	8413
Расхождение, %	4,19	1,66	-2,16	-6,48

Таблица 2. Силы инерции

Номер схемы	Вид нагрузки	Схема
1	Сосредоточенная сила	
2	Равномерно распределенная нагрузка	
3	Линейно распределенная нагрузка	

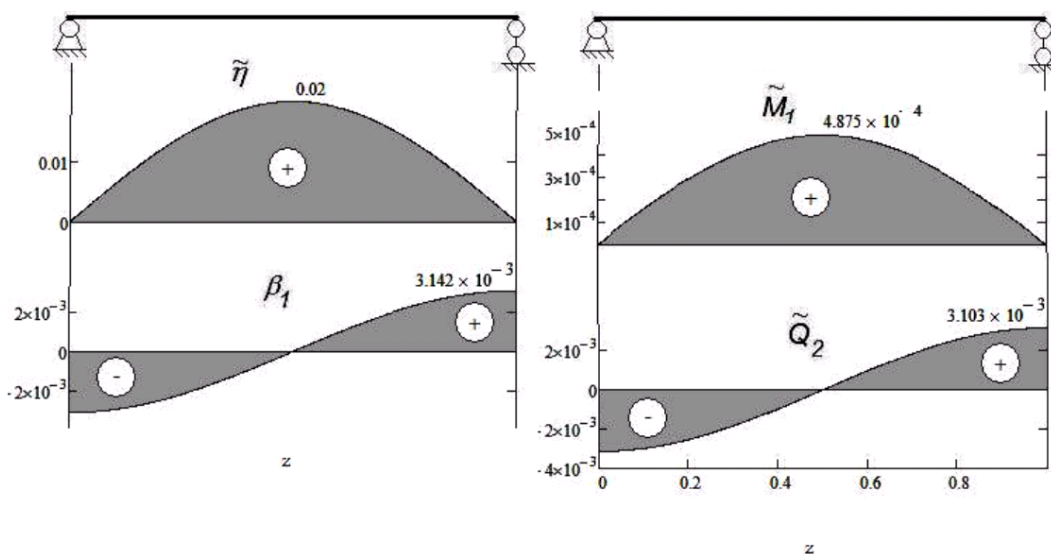


Рисунок 1. Эпюра прогибов, углов поворота сечений, изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях

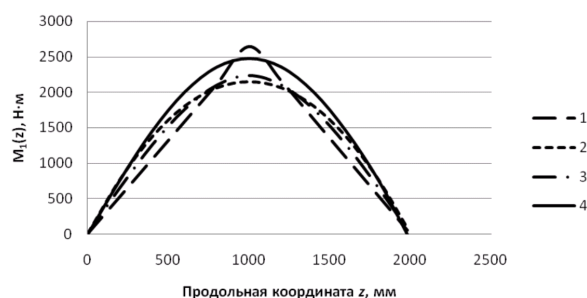


Рисунок 2. График распределения изгибающего момента по длине балки (Н/м)*

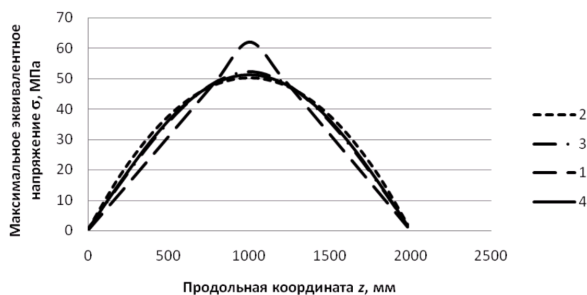


Рисунок 3. График распределения максимальных эквивалентных напряжений по длине балки (МПа)*

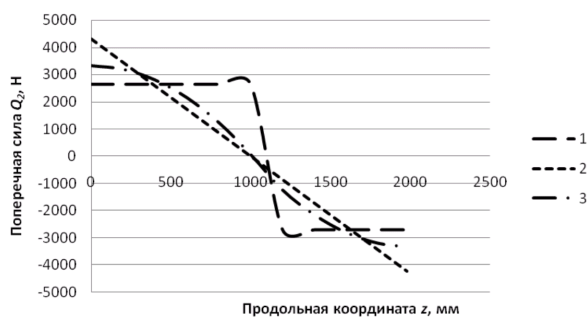


Рисунок 4. График распределения поперечной силы по длине балки (Н)*

*Цифры в обозначении соответствуют схеме нагружения. Линия 4 соответствует аналитическому расчету

Полученные на рисунках 2 и 4 эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для различных способов нагружения силами инерции можно использовать для определения соответствующих напряжений при прочностных расчетах по допускаемым нормальным и касательным напряжениям.

Из рисунка 3 следует, что лучших результатов моделирования колебаний стержня при расчете на прочность удалось достичь введением линейно распределенных сил инерции. Данное моделирование колебаний также позволило подтвердить результаты предложенной ранее методики [1].

На основании проведенного анализа были сделаны следующие выводы:

1. Сравнение результатов расчета частот собственных колебаний по теории учитывающей вторичные сдвиги и расчета численными методами показало близкие результаты, что позволяет использовать аналитические выражения расчета частот балки. Это значительно снижает трудоемкость выполнения большого количества видов расчетов, например, при поиске оптимальных характеристик балки.

2. Сравнение результатов, полученных при динамическом расчете конструкции, и результатов, полученных при введении фиктивных нагрузок, показало, что распределение фиктивной нагрузки по линейному закону хорошо соответствует картине колебаний. Приведенная методика позволяет производить статический расчет прочности и жесткости конструкции, совершающей свободные колебания.

16.12.2013

Список литературы:

1 Гаврилов, А.А. Прочность и жесткость тонкостенных стержней при изгибных колебаниях / А.А. Гаврилов, Н.А. Морозов // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2012. – №4. – С.253 – 257
 2 Гаврилов, А.А. Влияние геометрических характеристик сечений на значения частот свободных изгибных колебаний тонкостенных стержней / А.А. Гаврилов, Л.И. Кудина, Г.В. Куча, Н.А. Морозов // Вестник Оренбургского государственного университета. . – 2011. – № 5. С. 146-150.
 3 Авдонин, А.М. Прогнозирование величин деформаций и напряжений, возникающих при ремонте металлоконструкций сваркой / А.М. Авдонин, Е.В. Пояркова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, – 2013. – Т. 18. – № 4-2. – С. 1585-1588.

Сведения об авторах

Гаврилов Александр Александрович, ассистент кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Оренбургского государственного университета, e-mail: pialex@bk.ru

Морозов Николай Анатольевич, доцент кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Оренбургского государственного университета, e-mail: moroz.off.nick@yandex.ru

Власов Юрий Леонидович, доцент кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Оренбургского государственного университета, e-mail: ulvlasov@mail.ru
 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 20404, тел (3532) 372513