

## ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОЛСТОЙ КРУГЛОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Построено новое замкнутое решение осесимметричной нестационарной задачи теории электроупругости для жестко закрепленной сплошной круглой пьезокерамической пластины. Расчетные соотношения получены методом разложения по собственным вектор – функциям в форме структурного алгоритма конечных преобразований. Численные результаты позволяют проанализировать влияние толщины пластины на частотный спектр собственных колебаний, определить напряженно-деформированное состояние исследуемого элемента, а также потенциал и напряженность индуцируемого электрического поля.

**Ключевые слова:** вынужденные осесимметричные колебания, толстая пьезокерамическая пластина, задача электроупругости.

Широкое использование в современном приборостроении, в качестве основных рабочих элементов, толстые круглые пьезокерамические пластины предъявляет дополнительные требования к точности их расчета. Задача существенно усложняется при исследовании напряженно-деформированного состояния конструкций в случае динамическом воздействия и учете связанности механических и электрических полей напряжений. В связи с этим можно отметить достаточно ограниченный круг работ выполненных для тел конечных размеров в рамках трехмерной теории электроупругости. Причем большинство этих исследований посвящено определению собственных колебаний [1-4]. Результаты, справедливые для пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра конечной длины, для установившегося режима вынужденных колебаний получены в [2]. Использование базисных функций позволило понизить размерность и свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в дальнейшем решается численным методом.

В исследованиях [5, 6] методом конечных интегральных преобразований построены замкнутые решения нестационарных осесимметричных задач для короткого анизотропного пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией материала при смешанных краевых условиях на его торцах. Существенным представляется то, что построенный алгоритм справедлив для произвольного динамического воздействия.

В настоящей работе исследуется нестационарная осесимметричная задача теории электроупругости для круглой толстой пластины

с аксиальной поляризацией материала и жестким закреплением ее цилиндрической поверхности. В отличие от традиционно используемых краевых условий в заделке, записываемых в перемещениях, рассматриваются смешанные краевые условия, что позволяет получить достаточно простые, расчетные соотношения.

### Постановка задачи

Пусть круглая сплошная пьезокерамическая пластина, занимающая в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega$ :

$$\{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h\},$$

представляет линейно-упругое анизотропное тело. Рассматривается случай, когда цилиндрические неэлектропроводящие  $(r_* = b)$  поверхности элемента жестко закреплены, а на его торцевую плоскость  $(z_* = h)$  действует осесимметричная динамическая нагрузка (нормальные напряжения)  $q^*(r_*, t)$ .

Краевая задача моделирует работу пьезоэлементов в приборах прямого пьезоэффекта, когда механическое воздействие трансформируется в электрический сигнал, который фиксируется путем подключения эквипотенциальных электропроводящих торцевых плоскостей к измерительному прибору.

В общем случае дифференциальные уравнения осесимметричного движения и электростатики однородной упругой пьезокерамической среды, а также граничные условия рассматриваемой задачи в цилиндрической системе координат для установившегося режима вынужденных колебаний в безразмерной форме записываются в следующем виде [1, 2]:

$$\nabla_1^2 U + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + \lambda^2 U = 0, \quad (1)$$

$$\frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla_2^2 W + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \lambda^2 W = 0,$$

$$\frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \nabla \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{C_{11} e_{11}}{e_{33}^2} \nabla_2^2 \phi - \frac{C_{11} e_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$r = 0, l \quad W(0, z) < \infty, U(0, z) < \infty, \phi(0, z) < \infty, \quad (2)$$

$$D_{r|_{r=1}} = -\frac{C_{11} e_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0,$$

$$U(l, z) = 0, W(l, z) = 0;$$

$$z = 0, L \quad \sigma_{zz|_{z=L}} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = q(r), \quad (3)$$

$$\sigma_{zz|_{z=0}} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0.$$

В равенствах (1) – (3) общий для всех функций временной множитель  $\exp(-i\theta t)$  опускается;  $\sigma_{j,k}(r^*, z^*), U^*(r^*, z^*), W^*(r^*, z^*)$  – соответственно компоненты тензора механических напряжений и вектора перемещений ( $j, k = r, z$ );  $D_r(r^*, z^*), \phi^*(r^*, z^*)$  – радиальная компонента вектора индукции и потенциал электрического поля;  $\rho, C_{ms}, e_{ms}$  – объемная плотность, модули упругости, а также пьезомодули анизотропного электроупругого материала ( $m, s = 1, 5$ );  $\epsilon_{11}, \epsilon_{33}$  – диэлектрические проницаемости материала;

$$\{U, W, r, z, L\} = \{U^*, W^*, r^*, z^*, h\} / b, \quad \phi = \phi^* e_{33} / (b C_{11}),$$

$$q(r) = \frac{q^*(r)}{C_{11}}, \quad \lambda^2 = \frac{\theta^2 b^2 \rho}{C_{11}}, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2},$$

$$\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

Соотношения (1) – (3) представляют математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

### Построение общего решения

Решение осуществляется методом конечных интегральных преобразований Ханкеля по координате  $r$ . Для того равенства (1) – (3) приводятся к стандартной форме, позволяющей провести данную процедуру разделения переменных. Принимая во внимание линейность данных соотношений и теорему о суперпозиции решений, функции  $U, W, \phi$  представляются в виде следующих разложений

$$U(r, z) = f_1(r) q(r) + u(r, z), W(r, z) = f_2(r) K(z) + w(r, z), \quad (4)$$

$$\phi(r, z) = f_3(r) K(z) + \chi(r, z),$$

где

$$f_1(r) = r^2 - r, \quad f_2(r) = \frac{C_{11} e_{11}}{2(C_{55} e_{11} + e_{15}^2)} r^2, \quad f_3(r) = \frac{e_{15} e_{33}}{2(C_{55} e_{11} + e_{15}^2)} r^2.$$

Кроме того, последнее условие (2) заменяется на равенство

$$\sigma_{rz|_{r=1}} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = K(z). \quad (5)$$

Здесь  $K(z) = K^*(z)/C_{11}$ ,  $K^*(z)$  – касательные напряжения, приложенные к цилиндрической поверхности пластины, и определяемые в процессе решения задачи из условия отсутствия вертикальных перемещений при  $r=1$ .

При этом функция  $K(z)$  должна удовлетворять зависимость

$$\int_0^L K(z) dz = - \int_0^l q(r) r dr, \quad (6)$$

которая является условием уравновешенности пластины при действии осесимметричной нагрузки.

В результате подстановки (4) в (1) – (3), (5) получаем новую краевую задачу относительно функций  $u(r, z), w(r, z), \chi(r, z)$ . Дифференциальные уравнения (1) и граничные условия (3) становятся неоднородными с правыми частями  $F_1 \div F_3, N_1 \div N_6$ , а (2), с учетом (5), при  $r=1$  принимают вид

$$u(l, z) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (7)$$

В преобразованных равенствах

$$F_1 = -(\nabla_1^2 + \lambda^2) [f_1(r) q(r)] - \left[ \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} \frac{df_2(r)}{dr} + \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} \frac{df_3(r)}{dr} \right] \frac{dK(z)}{dz},$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= -\left[ \frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla_2^2 f_2(r) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 f_3(r) + \lambda^2 f_2(r) \right] K(z) - \\
 &\quad - \left[ \frac{C_{33}}{C_{11}} f_2(r) + f_3(r) \right] \frac{d^2 K(z)}{dz^2}, \\
 F_3 &= -\left[ \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 f_2(r) - \frac{C_{11} \epsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla_2^2 f_3(r) \right] K(z) - \\
 &\quad - \left[ f_2(r) - \frac{C_{11} \epsilon_{33}}{e_{33}^2} f_3(r) \right] \frac{d^2 K(z)}{dz^2}, \\
 N_1(r, L) &= q(r) - \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla [f_1(r) q(r)] - \\
 &\quad - \left[ \frac{C_{33}}{C_{11}} f_2(r) + f_3(r) \right] \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=L}, \\
 N_2(r, 0) &= -\frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla [f_1(r) q(r)] - \left[ \frac{C_{33}}{C_{11}} f_2(r) + f_3(r) \right] \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=0}, \\
 \{N_3(r, L), N_4(r, 0)\} &= -\frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{df_2(r)}{dr} \{K(L), K(0)\}, \\
 \{N_5(r, L), N_6(r, 0)\} &= -\frac{df_3(r)}{dr} \{K(L), K(0)\}.
 \end{aligned}$$

К краевой задаче относительно  $u(r, z)$ ,  $w(r, z)$ ,  $\chi(r, z)$  применяем преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной  $r$ , используя следующие трансформанты

$$\begin{aligned}
 u_H(j_n, z) &= \int_0^1 u(r, z) r J_1(j_n r) dr, \quad (8) \\
 \{w_H(j_n, z), \phi_H(j_n, z)\} &= \int_0^1 \{w(r, z), \chi(r, z)\} r J_0(j_n r) dr,
 \end{aligned}$$

и формулы обращения

$$u(r, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (9)$$

$$w(r, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad \chi(r, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r).$$

В равенствах (8), (9)  $j_n$  корни такого трансцендентного уравнения

$$J_1(j_n) = 0 \quad (n = \overline{0, \infty}; j_0 = 0). \quad (10)$$

В пространстве изображений получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
 -j_n^2 u_H + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{d^2 u_H}{dz^2} - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{dw_H}{dz} - \\
 - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{d\phi_H}{dz} + \lambda^2 u_H = F_{1H}, \quad (11) \\
 -\frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 w_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{du_H}{dz} - \\
 - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 \phi_H + \frac{d^2 \phi_H}{dz^2} + \lambda^2 w_H = F_{2H},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 w_H + \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{du_H}{dz} + \\
 + \frac{C_{11} \epsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \phi_H - \frac{C_{11} \epsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 \phi_H}{dz^2} = F_{3H}; \\
 z=0, L \quad \frac{C_{13}}{C_{11}} j_n u_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dw_H}{dz} + \frac{d\phi_H}{dz} = \\
 = \{N_{1H}(j_n, L), N_{2H}(j_n, 0)\}, \quad (12) \\
 \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{du_H}{dz} - j_n w_H \right) = \{N_{3H}(j_n, L), N_{4H}(j_n, 0)\}, \\
 -j_n \phi_H = \{N_{5H}(j_n, L), N_{6H}(j_n, 0)\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \{F_{1H}, N_{3H}, N_{4H}, N_{5H}, N_{6H}\} &= \int \{F_1, N_3, N_4, N_5, N_6\} J_1(j_n r) dr, \\
 \{F_{2H}, F_{3H}, N_{1H}, N_{2H}\} &= \int_0^1 \{F_2, F_3, N_1, N_2\} J_0(j_n r) dr.
 \end{aligned}$$

Система уравнений (11) приводится к следующему разрешающему уравнению относительно  $w_H$

$$\frac{d^6 w_H}{dz^6} + k_{1n} \frac{d^4 w_H}{dz^4} + k_{2n} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + k_{3n} w_H = F_H, \quad (13)$$

где

$$k_{1n} = \frac{a_{8n} a_{10n} + a_{8n} (a_{2n} a_{8n} - a_{3n} a_{9n}) + a_{9n} (a_{2n} a_{7n} - a_{4n} a_{9n})}{a_{11n}},$$

$$k_{2n} = \frac{a_{7n} a_{10n} + a_{8n} (a_{2n} a_{7n} - a_{4n} a_{9n}) + a_{2n} a_{6n} a_{9n}}{a_{11n}},$$

$$k_{3n} = \frac{a_{6n} a_{10n} + a_{2n} a_{6n} a_{8n}}{a_{11n}},$$

$$a_{1n} = \lambda^2 - j_n^2, \quad a_{2n} = \frac{C_{55}}{C_{11}} - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{3n},$$

$$a_{3n} = -\frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{1n},$$

$$a_{4n} = -\frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{2n},$$

$$a_{5n} = -j_n^2 \left( \frac{C_{55}}{C_{11}} + \frac{e_{15}}{e_{33}} s_{2n} \right) + \lambda^2,$$

$$a_{6n} = \frac{C_{33}}{C_{11}} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 s_{1n} + s_{2n},$$

$$a_{7n} = s_{1n}, \quad a_{8n} = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 s_{3n},$$

$$a_{9n} = s_{3n}, \quad a_{10n} = a_{1n} a_{9n} - a_{2n} a_{8n},$$

$$a_{11n} = a_{9n} (a_{2n} a_{8n} - a_{3n} a_{9n}),$$

$$s_{1n} = -s_{4n} (e_{33}^{-2} C_{33} \epsilon_{33} + 1),$$

$$s_{2n} = s_{4n} e_{33}^{-2} [j_n^2 (e_{15} e_{33} + C_{55} \epsilon_{33}) - \lambda^2 C_{11} \epsilon_{33}],$$

$$s_{3n} = -s_{4n} j_n e_{33}^{-2} [\epsilon_{33} (C_{13} + C_{55}) + e_{33} (e_{31} + e_{15})],$$

$$s_{4n} = \frac{e_{33}^3}{j_n^2 C_{11} (\epsilon_{11} e_{33} - \epsilon_{33} e_{15})},$$

$$F_H = \frac{a_{9n}}{a_{10n}a_{11n}} \left( a_{9n} \frac{d^2}{dz^2} + a_{8n} \right) \left( \frac{a_{2n}}{a_{9n}} \tilde{F}_{2H} - \frac{d\tilde{F}_{1H}}{dz} \right) + a_{11n}^{-1} \tilde{F}_{2H},$$

$$\tilde{F}_{1H} = F_{1H} + \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{4n} \left( \frac{dF_{3H}}{dz} + \frac{C_{11}\epsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{dF_{2H}}{dz} \right),$$

$$\tilde{F}_{2H} = s_{4n} \left( \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \left( F_{3H} + \frac{C_{11}\epsilon_{33}}{e_{33}^2} F_{2H} \right) + F_{2H}.$$

Левая часть дифференциального уравнение (13) допускает факторизацию на коммутативные дифференциальные сомножители

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k_{4n} \right) \left( \frac{d^4}{dz^4} + k_{5n} \frac{d^2}{dz^2} + k_{6n} \right) w_H = F_H, \quad (14)$$

где  $k_{5n} = k_{1n} - k_{4n}$ ,  $k_{6n} = k_{3n}k_{4n}^{-1}$ ,  $k_{4n}$  – действительный корень алгебраического уравнения 3-ей степени:

$$k_{4n}^3 - k_{1n}k_{4n}^2 + k_{2n}k_{4n} - k_{3n} = 0.$$

Для установившегося режима вынужденных колебаний, как правило, выполняется следующее соотношение коэффициентов  $k_{4n} < 0$  и  $k_{5n}^2 < 4k_{6n}$ . В этом случае, общий интеграл дифференциального уравнения (14) имеет вид:

$$w_H = D_{1n} \exp(\sqrt{-k_{4n}z}) + D_{2n} \exp(-\sqrt{-k_{4n}z}) + \exp(\chi_n z) [D_{3n} \cos(\beta_n z) + D_{4n} \sin(\beta_n z)] + \exp(-\chi_n z) [D_{5n} \cos(\beta_n z) + D_{6n} \sin(\beta_n z)] + \int_0^z \frac{F_H(\xi)}{\det \|B_{ms}(\xi)\|} \sum_{m=1}^6 \det \|G_{m,s}(z, \xi)\| d\xi \quad (15)$$

Здесь  $\det \|B_{ms}\|$  – определитель Вронского, составленный для частных решений однородного уравнения (14) ( $m = \overline{1,6}$ ,  $s = \overline{1,6}$ ),  $\det \|G_{m,s}(z, \xi)\|$  – определитель полученный из  $\det \|B_{ms}\|$  путем замены каждый раз  $s$ -го столбца на столбец элементов  $\|0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I\|^T$  и умноженный на соответствующее частное решение (15),

$$\chi_n = \frac{1}{2} \left[ 2(k_{6n})^{1/2} - k_{5n} \right]^{1/2}, \quad \beta_n = \left[ \frac{k_{5n}}{2} + \chi_n^2 \right]^{1/2}.$$

Выражения для  $u_H, \phi_H$ , полученные в результате приведения (11) к (13), имеют вид

$$\phi_H(j_n, z) = s_{1n} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + s_{2n} w_H + s_{3n} \frac{du_H}{dz} + s_{4n} \left( F_{3H} + \frac{C_{11}\epsilon_{33}}{e_{33}^2} F_{2H} \right), \quad (16)$$

$$u_H(j_n, z) = a_{1n}^{-1} \left( s_{5n} \frac{d^5 w_H}{dz^5} + s_{6n} \frac{d^3 w_H}{dz^3} + s_{7n} w_H + F_{4H} \right);$$

$$\text{где } F_{4H} = \tilde{F}_{1H} - a_{2n} a_{10n}^{-1} \left( \frac{d^2 \tilde{F}_{1H}}{dz^2} - a_{2n} \frac{d\tilde{F}_{2H}}{dz} \right),$$

$$s_{7n} = -a_2^2 a_{5n} a_{10n}^{-1} - a_{4n},$$

$$s_{5n} = a_{2n} a_{10n}^{-1} (a_{3n} a_{9n} - a_{2n} a_{7n}),$$

$$s_{6n} = a_{2n} a_{10n}^{-1} (a_{4n} a_{9n} - a_{2n} a_{6n}) - a_{3n}.$$

Подстановка (15), (16) в краевые условия (12) позволяет определить постоянные интегрирования  $D_{1n} \div D_{6n}$ .

### Расчетные соотношения

Применяя к трансформантам (15), (16) формулы обращения (9) получаем, с учетом (4), следующие разложения для  $U(r, z)$ ,  $W(r, z)$ ,  $\phi(r, z)$ :

$$U(r, z) = f_1(r) q(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (17)$$

$$W(r, z) = f_2(r) K(z) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

$$\phi(r, z) = f_3(r) K(z) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r).$$

Заключительным этапом данного исследования является определение функции  $K(z)$ , которую для упрощения расчета можно представить в виде следующего многочлена

$$K(z) = \sum_{k=1}^m A_k z^{m-k}. \quad (18)$$

В результате подстановки (18) во второе равенство (17) и приравнивания нулю вертикальные перемещения  $W(l, z)$  в  $m-1$  точках по высоте сечения, с учетом (6), формируется система неоднородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $A_l \div A_m$ .

Разложения (17) удовлетворяют исходные дифференциальные уравнения (1), граничные условия (2), (3) (последнее условие (3) с заданной точностью) и являются замкнутым решением рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

Для определения спектра частот собственных колебаний пластины  $\omega_{nk}$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ;  $k = \overline{1, \infty}$ ) необходимо исследовать однородные дифференциальные уравнения и граничные условия (11), (12) с учетом замены  $\lambda$  на  $\tilde{\lambda}_{nk}$  ( $\tilde{\lambda}_{nk}$  – собственные значения осесимметричных колебаний).

В результате  $\omega_{nk}$  определяется равенством

$$\omega_{nk} = \frac{\tilde{\lambda}_{nk}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$$

Амплитудное значение разности потенциалов между эквипотенциальными электродированными поверхностями пластины определяется по формуле:

$$V^* = \phi(r_*, 0) - \phi(r_*, h). \tag{19}$$

**Численный анализ результатов**

В качестве примера рассматривается пластина, выполненная из пьезокерамики состава ЦТС-19 [7].

Для учета влияния связанности электрических и механических полей напряжения на динамическую реакцию упругой системы было также построено аналогичное решение задачи теории упругости.

В таблице приведены собственные значения  $\tilde{\lambda}_{1k}$  свободных осесимметричных колебаний элемента изготовленного из пьезокерамики и обычного керамического материала имеющего

аналогичные упругие характеристики. Расчеты выполнялись для различных значений относительной толщины  $L$ . Анализ результатов подтверждает известный факт [2], что связанность механических и электрических полей напряжения приводит к «ужесточению» системы и следовательно, более высокому спектру собственных значений  $\tilde{\lambda}_{nk}$ . Однако данное свойство оказывает влияние, в основном, на первые частоты колебаний. Высокочастотная часть спектра при этом изменяется незначительно.

На рис.1 приведены графики изменения касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  ( $m=4$ ) по высоте пластины ( $L=0,4$ ) справедливые соответственно для задач теорий электроупругости. Расчеты выполнялись при действии равномерно-рас-

Таблица

$\tilde{\lambda}_{1k}$	Теория электроупругости				Теория упругости			
	L=0,1	L=0,2	L=0,4	L=1	L=0,1	L=0,2	L=0,4	L=1
k=1	0,389	0,726	1,199	1,764	0,349	0,648	1,057	1,500
k=2	3,229	3,206	3,109	2,381	3,228	3,206	3,104	2,237
k=3	15,147	8,131	4,945	3,283	15,140	8,119	4,928	3,203

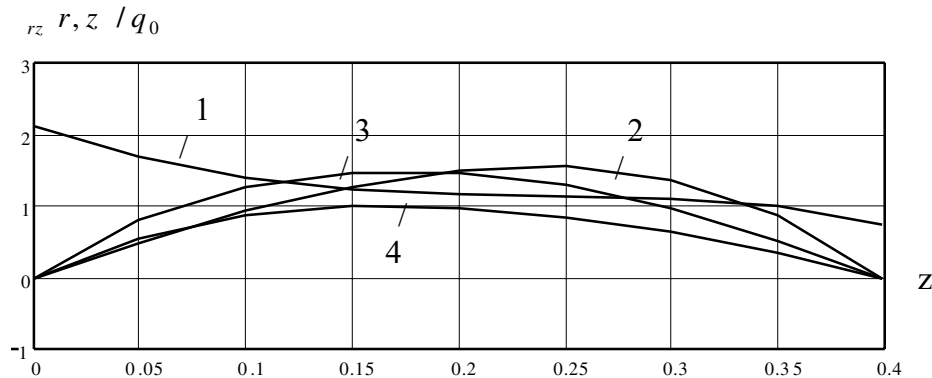


Рисунок 1

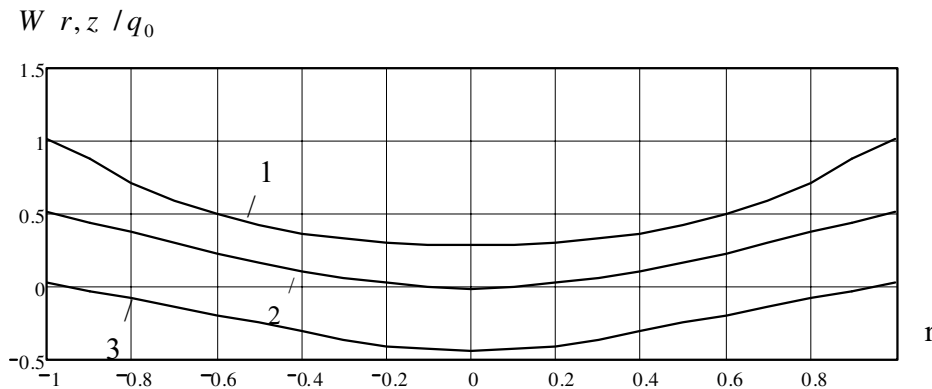


Рисунок 2

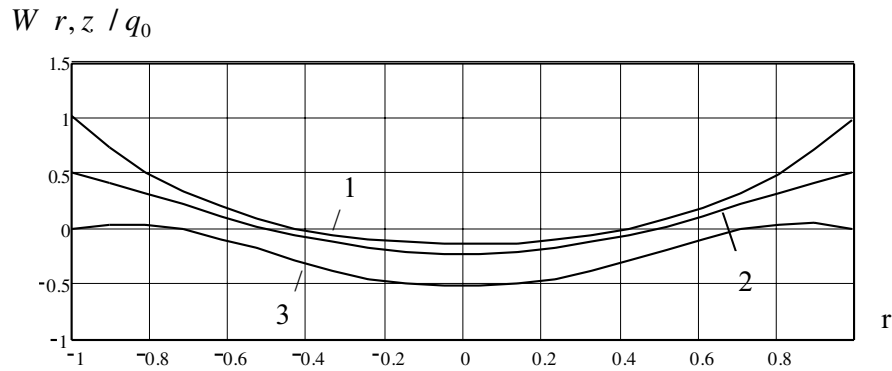


Рисунок 3

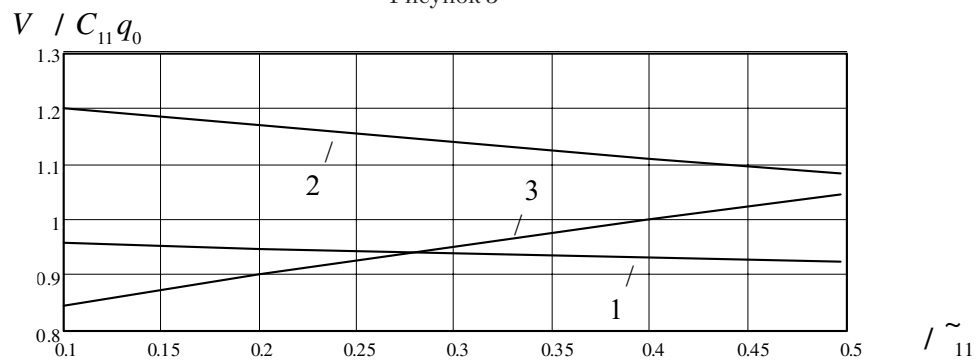


Рисунок 4

пределенной гармонической нагрузки интенсивностью  $q_0$  с частотой вынужденных колебаний  $\theta = 0,5\tilde{\lambda}_{11}$ . Цифрами 1-4 обозначены результаты для  $r = 1; 0,75; 0,5; 0,25$ .

Следует обратить внимание, что в работе [8] при исследовании напряженно-деформированного состояния круглых изотропных пластин для лучшего схождения бесконечных рядов нарушалось условие парности касательных напряжений в угловых точках ( $r=1, z=0, h$ ) справедливое для симметричной теории упругости. Аналогичный подход используется также при вычислении функции  $K(z)$  (рис.1,2 – кривые 1). В результате существенного уменьшения численных значений  $\frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=0,L}$ , входящих в краевые условия (12), полученное решение становится устойчивым.

Графики изменения вертикальной компоненты вектора перемещений  $W(r,z)$  по координате  $r$  пьезокерамического и керамического элементов ( $L=1, \theta = 0,1$ ) отражают рис. 2, 3. Цифрами 1-3 обозначены кривые соответствующие сечениям  $z=L, L/2, 0$ . Следует отметить, что свя-

занность электрических и механических полей напряжения оказывает заметное влияние на деформированное состояние рассматриваемых пластин, как в качественном, так и количественном отношении. В пьезокерамическом элементе наблюдается уменьшение перемещений с более равномерным сжатием по высоте сечения.

На рис. 4 показаны графики характеризующие зависимость разности потенциалов  $V^*$  от частоты вынужденных колебаний  $\theta$  для пластин различной толщины. Цифрами 1-3 соответственно обозначены результаты справедливые для параметра  $L=1; 0,6; 0,4$ . Следует отметить, что для толстых пластин увеличение частоты вынужденных колебаний приводит к уменьшению  $V^*$ . Однако при  $L=0,4$  наблюдается противоположная картина. Дальнейшее снижение  $L$  приводит к резкому уменьшению разности потенциала, что объясняется небольшой степенью сжатия тонких пластин по толщине.

Предложенная методика позволяет исследовать установившийся режим вынужденных колебаний пьезокерамических пластин при произвольных граничных условиях на их торцах.

11.04.2013

**Список литературы:**

1. Гринченко В.Т. Механика связанных полей в элементах конструкций / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – Киев: Наук. думка, 1989. -279 с.
2. Шульга Н.А. Колебания пьезоэлектрических тел/ Н.А. Шульга, А.М. Болкисев. -Киев: Наук. думка, 1990. -228 с.
3. Hussein M. Discrete layer Analysis of Axisymmetric Vibrations of Laminated Piezoelectric Cylinders/ M.Hussein, P.R. Heyliger // J. of Sound and Vibration. 1996. 192. is.5. P. 995-1013.
4. Григоренко А.Я. Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины / А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова, И.А. Лоза // Доклады НАН Украины. 2009. №6. С. 61-66.
5. Сеницкий Ю.Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра/ Ю.Э. Сеницкий // ПММ. 1993. Т.57. Вып.1. С. 116 – 122.
6. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией /Д.А.Шляхин // ПМТФ.– 2009. Т.50. №1. С.12-21.
7. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел/ В.З. Партон, Б.А.Кудрявцев – М.: Наука, 1988. -470 с.
8. Пространственные задачи теории упругости и пластичности/ Под ред. А.Н. Гузя. -Киев: Наук. думка. Т.3. 1985. -280 с.

Сведения об авторе:

**Шляхин Дмитрий Аверкиевич**, доцент кафедры сопротивления материалов и строительной механики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, кандидат технических наук 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194, e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

**UDC 539.3**

**Shlyakhin D.A.**

Samara state university of architecture and civil engineering

**DYNAMIC PROBLEM OF ELECTROELASTICITY FOR THICK ROUND RIGID PIEZOCERAMIC PLATE**

The new closed solution of axially symmetric nonstationary problem of the theory of electroelasticity for thick round piezoceramic plate with rigid of its external radial surface is constructed. Calculated relations are obtained by method of expansion in eigen vector-functions in the form of structural algorithm of finite transformations. Numerical results allow to define the natural-vibration frequency, the stress-strain state of the testing element, and also the potential and intensity of the induced electric field.

Key words: the compelled axially symmetric fluctuations, thick piezoceramic plate, problem of electroelasticity.

**Bibliography:**

1. Grinchenko V.T. The mechanics of coupled fields in structural elements / V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko, A.N. Shulga. – Kiev: Nauk. Dumka (1989)
2. Shulga A.N. Vibrations of piezoelectric bodies / N.A. Shulga, A.M. Bolkisev. -Kiev: Nauk. Dumka (1990)
3. Hussein M. Discrete layer Analysis of Axisymmetric Vibrations of Laminated Piezoelectric Cylinders/ M.Hussein, P.R. Heyliger // J. of Sound and Vibration. 192. is.5. 995-1013 (1996)
4. Grigorenko A.Ya. An approach to the study of vibrations of piezoceramic hollow cylinders of finite length / A.Ya. Grigorenko, T.L. Efimova, I.A. Vine // Reports of NAS of Ukraine. No. 6. 61-66 (2009)
5. Senitskii Ya.E. Dynamic problem for an inhomogeneous cylinder electroelasticity / Ya.E. Senitskii // PMM. V.57. Is. 1. 116 – 122 (1993)
6. Shlyakhin D. A. Unsteady axisymmetric problem of electrostatics for a piezoceramic cylinder with circumferential polarization / D.A. Shlyakhin // PMTF. Vol.50. No. 1. 12-21 (2009)
7. Parton V.Z. Electromagnetoelasticity piezoelectric and electroconductive bodies / V.Z. Parton, B.A. Kudryavtsev – Moscow: Nauka (1988)
8. Spatial problems of elasticity and plasticity theory / Ed. A.N. Guz. -Kiev: Nauk.. Dumka. V.3. (1985)