УДК 624.04

Горелов С.Н., Климов М.И.
Оренбургский государственный университет
E-mail: apm-orenburg@mail.ru

АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА КОНСТРУКЦИИ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

В работе рассматриваются вопросы построения эффективных алгоритмов оптимального проектирования конструкций. Исследования по методу обобщенных множителей Лагранжа позволили построить алгоритм, не требующий выпуклости функций и даже более непрерывности множества допустимых точек. Рассматриваемый метод имеет ряд преимуществ с вычислительной точки зрения – заменой условной задачи безусловной и возможностью комплексного использования с другими методами безусловной оптимизации.

Ключевые слова: оптимальное проектирование, множители Лагранжа, алгоритмы.

В настоящее время в кафедральном фонде алгоритмов и программ имеются 12 авторских программ (зарегистрированных в УФАП ОГУ №13 – 19; 93 – 96, 755) и коммерческие программные комплексы, например, ЛИРА 9.6, APM WinMachine, которые позволяют достаточно эффективно выполнить расчет конструкций различного назначения. Однако, перечисленные программы могут быть использованы, как и многие другие известные программные комплексы, только для вариантного проектирования. Задача оптимального проектирования [1-3] требует разработки алгоритма и программного блока целенаправленного поиска оптимального варианта посредством организации многочисленных расчетов.

В статье уделяется внимание построению таких алгоритмов оптимизации методами, использующими функцию Лагранжа с учетом опыта наших исследований последних десятилетий. Рассматриваемые методы имеют ряд преимуществ с вычислительной точки зрения, так как преобразуют задачу с ограничениями к последовательности более простых задач без ограничений с алгоритмами решения методами безусловной оптимизации.

Сформулируем задачу оптимального проектирования, в которой критерий оптимальности

$$C(\bar{x}) = \min \tag{1}$$

устанавливается в зависимости от цели задачи – определить минимум объема V_a металла или минимум стоимости $C(\bar{x})$ конструкции с учетом стоимостных характеристик материалов в деле. Переменными параметрами $\bar{x}$ приняты геометрические размеры сечений, характеристики материалов.

Ограничения типа равенств записываются в виде системы алгебраических в общем случае нелинейных уравнений

$$Fi(\bar{x}, \bar{s}) = 0, \ i = \overline{1...p}, \tag{2}$$

где $\bar{s}$ – вектор, компоненты – перемещения в i – узлах.

Уравнения (2) в различных формах в зависимости от принятой расчетной схемы и метода расчета (вариационный, дифференциально-разностный или конечно-элементный) обобщают собой условия равновесия, совместности деформаций элементов конструкции, граничные условия.

Ограничения в виде неравенств

$$Gi(\bar{x}) \le 0, \ i = \overline{1...m} \tag{3}$$

обобщают требования групп предельных состояний, а также конструктивные требования на предельно допустимые значения параметров. За исключением простейших задач эти неравенства не имеют аналитического выражения от принятых параметров x и проверяются после решения уравнений (2). Ограничения типа дискретности

$$\bar{x}\{X, \tag{4}$$

где X – счетное множество, образованное значениями переменных параметров согласно модульной системе, сортаменту и маркам материала. Построенная таким образом математическая модель оптимального проектирования конструкций представляет многопараметрическую задачу дискретного программирования. С целью разработки эффективных алгоритмов, предварительно проводили изучение рассматриваемого типа задач на основе функционального анализа. С этой целью рассматривались линии координатных сечений и изолинии поверхности функций ограничений (3), давалась геометрическая интерпретация допустимой области решений при числе оптимизируемых параметров n=2, 3.

Достоинством метода является то, что в нем не требуется непрерывности и дифференцируемости целевой функции и функций ограничений. При использовании метода ОМЛ в оптимальном проектировании конструкций многие трудности связаны с выбором такого алгоритма изменения множителей Лагранжа, который позволил бы предотвратить колебательный характер приближений. Ниже рассматривается построение алгоритмов с последовательным наращиванием множителей Лагранжа.

Исследования метода множителей Лагранжа, изложенные еще в работе [4] позволили сформулировать метод, не требующий выпуклости функций и даже более – плотности множества допустимых точек.

Реализация метода ОМЛ осуществляется следующими этапами:

П.1. Выбор вектора начального приближения $\bar{x}^o$ и множителей Лагранжа

$$\lambda_i^o \geq 0\,,\ i \cong \overline{1,m}$$

П.2. Определение r – минимума $x^*\left(\lambda^r\right)$ функции вида

$$Z^r\left(\bar{x}\right) = C\left(\bar{x}\right) + \sum \lambda_i^r \varphi_i\left(\bar{x}\right) \tag{5}$$

где $\lambda_i^r \geq 0$ (в функцию (5) не следует включать ограничения на отдельные параметры x_j).

П.3. Изменение множителей λ_i^r.

Если ограничения $\varphi_i\left(\bar{x}\right)$ нарушено или выполняется с запасом, то множитель λ_i^r соответственно увеличивается или уменьшается.

Таким образом, оптимальность минимума функции Лагранжа для исходной условной задачи следует из условий

$$\begin{cases} \varphi_i\left(\bar{x}^*\left(\bar{\lambda}^r\right)\right) \leq 0, \lambda_i^r = 0 \\ \varphi_i\left(\bar{x}^*\left(\bar{\lambda}^r\right)\right) = 0, \lambda_i^r > 0 \end{cases} \tag{6}$$

Для ограничений, которые не влияют на решение, множители λ_i^r равны нулю.

Сходимость решения существенным образом зависит от алгоритма изменения множителей λ_i^r, который совместно с алгоритмом минимизации функции (5) образует единый алгоритм слежения за точкой минимума. Известные алгоритмы /3/, успешно применяются для вычисления оптимального значения вектора $\bar{x}^*$ в задачах распределения фиксированных ресурсов. Однако использование указанных алгоритмов в рассматриваемой задаче неэффективно. Вычислительный процесс сопровождается многократным колебанием r-минимумов из допустимой области в область с нарушенными ограничениями. В результате проведенных численных исследований отметим приемлемость поиска решения в соответствии с последовательным наращиванием компонент вектора множителей.

Ниже рассматриваем построение эффективных алгоритмов с последовательным увеличением множителей Лагранжа. В предлагаемом алгоритме зададим начальные значения параметров минимально возможными, а значения множителей положим равными $\lambda_i^o = 0$.

Для минимизации функции (5) используем метод локальных вариаций. Множители λ_i^r пересчитываем по следующей рекуррентной формуле

$$\lambda_i^r = \begin{cases} \lambda_i^r, \text{если } \varphi_i\left(\bar{x}\right) \leq 0; \\ \omega\lambda_i^r, \text{если } \varphi_i\left(\bar{x}\right) > 0,\ \lambda_i^r > 0; \\ \omega\varepsilon, \text{если } \varphi_i\left(\bar{x}\right) > 0,\ \lambda_i^r = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\omega = \min_{xj}\left\{1 + \frac{\Delta Z^r\left(\bar{x}\right)}{\sum \lambda_l \Delta\varphi_l\left(\bar{x}\right)}\right. \tag{8}$$

где ΔZ^r, $\Delta\varphi_l$ – приращение соответствующих функций при варьировании вектора $\bar{x}$,

l – индекс, присваиваемый всем нарушенным ограничениям.

В выражении (7) $\varepsilon << 1$, а в (8) $\lambda_l^r \geq \varepsilon$.

Поясним подробнее определение коэффициента ω. Умножим каждый множитель функции $\varphi_l\left(\bar{x}\right)$ нарушенных ограничений на ω_j и составим приращение функции (5) для их значений при переменных $x_j^*\left(\overline{\lambda^r}\right)$ и $x_j^* + \Delta x_j$. Здесь Δx_j – шаг варьирования параметра x_j. На этой основе построим вектор убывания $\bar{q}\{q_1(w_1)q_2(w_2),\ldots,q_n(w_n)\}$ компоненты которого равны:

$$q_j\left(\omega_j\right) = \Delta Z^r\left(x_j^*\left(\overline{\lambda^r}\right), \omega_j\right),\ j = \overline{1,n}$$

Пусть ω_j^* – решение уравнения $q_j(\omega_j)=0$, тогда для всех значений ω_j, определяемых неравенством $1 \le \omega_j \le \omega_j^*$, получим $q_j(\omega_j)=0$. Выберем для коэффициента ω наибольшее значение из множества решений системы неравенств $1 \le \omega_j \le \omega_j^*$. При этом компоненты вектора убывания $\bar{q}\left(\overline{x^*}\left(\overline{\lambda^r}\right)\right)$ за исключением одного (определяется как наиболее эффективный параметр $x_э$) будут больше нуля. Первоначально x принимаются произвольно, например, равным значениям несколько меньшим ожидаемым искомым геометрическим параметрам конструкции.

При анализе оптимальности решения $\overline{x^*}\left(\overline{\lambda^r}\right)$ взамен активных ограничений, рассматриваем существенные – из числа ограничений нестрого выполняющихся в точке экстремума с учетом дискретности множества искомых параметров. Зафиксируем существенные ограничения индексом v, по определению, выполнение каждого из них связано с последним увеличением какого-либо параметра X_j и уменьшение которого приводит к нарушению данного ограничения.

$$\varphi_v\left(\bar{x}\right) \le 0 \qquad (9)$$

Если (6) выполняется, то для всех несущественных ограничений $\varphi_i(\bar{x}) \le 0$ приравниваем значение множителей $\lambda_i^r = 0$ и переходим к вычислениям П.2 (по схеме методом ОМЛ).

Пусть получено решение , при котором не все существенные ограничения являются активными (выполняются со знаком равенства), тогда возможно уменьшение целевой функции приближенно на величину

$$\Delta C\left(\bar{x}\right) \approx \sum \lambda_v^r \varphi_v\left(\bar{x}^*\left(\bar{\lambda}^r\right)\right) \qquad (10)$$

В случае необходимости улучшить значение этой функции следует уменьшить шаг и продолжить вычисления ПП.2;3 с ограничением отрыва от гиперповерхности

$$\varphi_i(x)=0$$

$$x_j^{s+1} \ge x_j^s,\ x_j^s \in R \qquad (11)$$

Здесь S – номер приближения к минимуму $\overline{x^*}\left(\overline{\lambda^{r+1}}\right)$. С помощью ограничения (11) осуществляется способ зигзагообразного движения по границе. Счет заканчивается при выполнении условий (6) или после анализа равенства (10) и заключении о неэффективности дополнительных затрат машинного времени на улучшение целевой функции. Приближенная оценка количества операций для отыскания экстремума приводится ниже.

На практике компоненты вектора $\overline{x_E}$ континуальной задачи необходимо изменить с учетом требований унификации. Как уже отмечалось, округление параметров, даже в случае их одновременного увеличения, не гарантирует допустимости решения. При решении задачи на дискретном множестве минимизация функции (5) проводится методом покоординатного улучшения. Трудность возникает при проверке получаемых решений на признак оптимальности (6) из-за неопределенности граничных значений функции $\varphi_i(\bar{x})$ на дискретном множестве X. В условии (6), контроль за выполнением ограничений со знаком равенства заменяется проверкой их существенности, поэтому полученное решение $\overline{x^*}\left(\overline{\lambda^r}\right) \in R$ следует попытаться улучшить. Улучшение возможно в задаче, где на каждом участке несколько оптимизируемых параметров и их вариации вызывают значительно отличающиеся приращения $\varphi_l(\bar{x})$. Так что вычисления ПП 2,3 повторяются при предварительно зафиксированных параметрах, которые последними уменьшили значения существенных ограничений, и значениях множителей $\lambda_v^r = 0$. В рассматриваемой задаче возможно существование нескольких локальных решений. Если продолжить поиск решений при различных начальных приближениях с учетом ограничения (11), то можно получить наименьший минимум или отметить сходимость к одному и тому же решению.

Какие-либо другие обозначения для приближенного решения не вводим, понимая под оптимальным решением $\overline{x^*}$ не только математический экстремум задачи. Точное решение имеет скорее теоретический, чем практический смысл. Если минимум определен точно, то решение находится в «самом углу» граничной поверхности содержащей изломы. В некоторых таких случаях гарантировать безопасность даже при положительных округлениях математического экстремума нельзя.

Метод обобщенных множителей Лагранжа и другие методы последовательной безусловной минимизации систематически использовались нами, начиная с 1976 года. Первые наши сообщения об успешном применении метода обобщенных множителей Лагранжа (ОМЛ) было в работе [5] для решения как континуальных, так и дискретных задач оптимизации. Для оценки алгоритмов выбраны основные критерии – затраты времени счета ПК и надежность полученных результатов. Чаще всего нас будет интересовать число необходимых итераций для решения задачи (вычисления, составляющие одну итерацию, описаны выше).

С предлагаемыми алгоритмами на ПК были проведены большие серии численных экспериментов для конструкций, а точнее для балок и плит на упругом основании. Задачи с числом оптимизируемых параметров n=2.3, предварительно решали графически и затем, используя геометрическую интерпретацию, исследовали геометрический смысл вычислительного процесса построенных алгоритмов.

1. Рассмотрим железобетонную балку на двух опорах прямоугольного сечения шириной 20 см. Нагрузка равномерного распределения q^p =12 кН/м, $q^H_{дл.}$ =10,5 кН/м, $q^H_{кр.}$ =6,5 кН/м.

Материалы: бетон – В15, арматура ∅20 из круглой стали класса А-I. Кратность изменения арматуры ΔA_S=3,14 см^2 (площадь одного стержня), высоты Δh=5 см. Допустимый прогиб в центре 2 см при расчетной длине 6 м, допустимая ширина раскрытия трещин 0,03 см. Принимаем стоимость бетона в деле 3850 руб/м^3, стоимость арматуры в деле 98000 руб/м^3. Требуется найти высоту и армирование, отвечающее минимальной стоимости конструкции.

На рисунке 1 незамкнутой жирной линией показана граница допустимой области. Траектория поиска иллюстрирует работу алгоритмов из начальных приближений $\overline{x^{01}}$ (3,14; 60) и $\overline{x^{02}}$ (0:60) в оптимум $\overline{x^*}$ (9,42;40) с учетом ограничения (11). Здесь естественно не показаны поисковые вариации, накладываемые на основное «рабочее движение».

В работе алгоритмов, использующих функцию Лагранжа (движение на рис.1) показано сплошной линией со стрелками на дискретном множестве точек, имеются некоторые различия. Это связано с тем, что в точке начального приближения (3,14; 30) не выполняются все три ог-

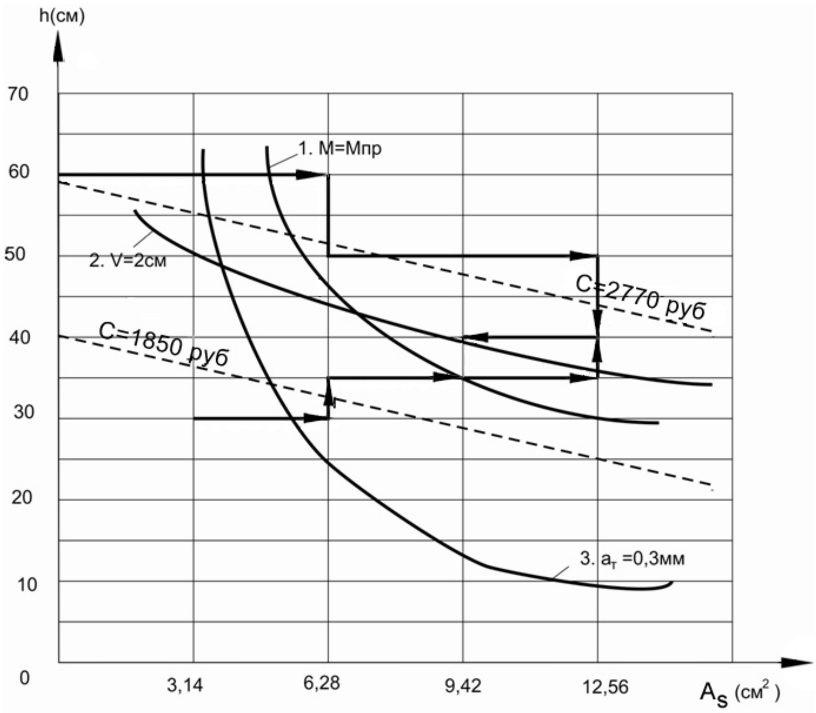

Рисунок 1. Область возможных состояний балки

раничения и соответствующие множители значительно увеличиваются. На четвертом шаге пути в точку оптимального решения (9,42; 40) остается выполнить только ограничения предельной деформации (прогиб) балки, но его вес незначителен по сравнению с весом двух других ограничений. Коэффициенты этих ограничений, хотя и не увеличиваются, но именно они влияют на смещение в точку (12,56; 40) в алгоритме с функцией Лагранжа. В этом сказывается отрицательное влияние ненулевых множителей уже выполненных в процессе счета ограничений. Для полученного решения (12,56; 40) существенным ограничением становится $f \leq 2$ см. Решение (9,42;40) получается продолжением поиска после обнуления множителей несущественных ограничений.

Если изменить дискретность множества, удвоив кратность изменения площади поперечного сечения арматуры, то алгоритм с функцией Лагранжа организует движение аналогично из исходного состояния (0; 60) до точки (6,28; 45) , а затем в (12,56; 45) с большим значением целевой функции и (12,56; 40) – координаты глобального оптимума.

В случае поиска из начального приближения (15,7; 35) (в начальном состоянии выполняются все ограничения) по алгоритму метода ОМЛ возможно движение вдоль границы, в отличии от подобных алгоритмов локальных вариаций с негладкой функцией штрафа, которые искусственно, по своему построению, на границе допустимой области создают овражную ситуацию, во многих случаях – критическую.

В таблице 1 отображен процесс последовательного изменения армирования и высоты (для половины балки) за t-итераций. Число участков изменения арматуры n=14. Оптимальное решение $\overline{x^*}$ получено на шаге t=8 (без учета дополнительных итераций для проверки).

Все ограничения выполняются при t=2, 4, 6, 8. Движение вдоль границы допустимой области получается зигзагообразным с ограничением отрыва от границы допустимой области (11).

Рассмотрим другой пример – простейшую комбинированную систему: прокатную двутавровую балку и швеллерную подвеску (рис.2).

Таблица 1

x_j	A_s							h
k / t	1	2	3	4	5	6	7	1–7
1	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	50
2	6,28	6,28	6,28	6,28	6,28	9,42	9,42	50
3	3,14	3,14	3,14	3,18	6,28	9,42	9,42	45
4	3,14	6,28	6,28	6,28	9,42	9,42	9,42	45
5	3,14	6,28	6,28	6,28	9,42	9,42	9,42	40
6	3,14	6,28	6,28	6,28	9,42	9,42	12,56	40
7	3,14	6,28	6,28	6,28	9,42	9,42	12,56	35
8	3,14	6,28	6,28	6,28	9,42	9,42	12,56	40

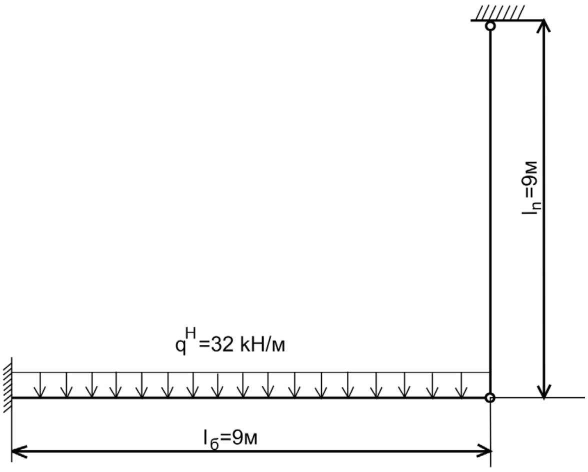

Рисунок 2. Схема балки с подвеской

За критерий оптимальности примем минимум суммарного объема стали

$$V = A_\delta * l_\delta + A_П * l_П$$

где A_δ, $A_П$ – площади поперечного сечения балки и подвески. В данной задаче нас интересует характер взаимного влияния требуемых величин поперечных сечений балки и подвески. Область допустимых значений переменных параметров A_δ , $A_П$ образованна с учетом условий прочности, устойчивости и ограничения перемещений $f / l_\delta \leq 1/250$, где f – максимальный прогиб. Решение задачи (A_δ =138 см^2; $A_П$ =7,51 см^2) получено с различных начальных приближений: при $\overline{x^{01}}$ (25,4; 6,16) за 20 итераций; при $\overline{x^{02}}$ (61,5; 15,6) за 10 итераций;

Если использовать при решении задачи методы ненаправленного случайного поиска – самого надежного метода поиска глобального экстремума, то вероятность, что задача за такое число итераций будет решена – крайне мала.

24.06.2013

Список литературы:

1. Измаилов, А. Ф. Численные методы оптимизации : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов .– 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2008. – 320 с. – Библиогр.: с. 314-316. – Предм. указ.: с. 317-320. – ISBN 978-5-9221-0975-8.
2. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации : учеб. пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец.– 3-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2011. – 342 с. – Библиогр.: с. 340-341. – ISBN 978-5-8114-1217-4.
3. Горелов С.Н. Результаты численных исследований вантового пешеходного моста через реку Урал / В.И. Жаданов, М.А. Аркаев // Вестник ОГУ – 2012. – №9. – С. 177-183.
4. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. М., Мир, 1972. – 240 с.
5. Климов, М.И. Оптимальное проектирование железобетонных гибких фундаментов. Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Современные методы и алгоритмы расчета и проектирования строительных конструкций с использованием ЭВМ». Таллин, 1979. – с. 139-140.

Сведения об авторах:

Горелов Станислав Николаевич, доцент кафедры сопротивление материалов Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук, доцент

Климов Михаил Иванович, доцент кафедры сопротивление материалов Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук, доцент

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 20404, тел. (3532) 372513, e-mail: apm-orenburg@mail.ru

UDC 624.04

Gorelov S.N., Klimov, M.I.

Orenburg state university E-mail: apm-orenburg@mail.ru

ALGORITHM SEARCH OF OPTIMAL CONSTRUCTION VARIANT BY METHOD OF LOCAL LAGRANGE MULTIPLIERS VARIATIONS

The paper deals with the aspects of efficient algorithm construction for optimal projecting of structures. The investigation with the appliance of generalized Lagrange methods resulted in the construction of algorithm which does not require the convexity of functions, and more over, the uninterrupted multitude of permissible points. The method under investigation has a number of advantages regarding calculating, that is the replacement of a conventional problem by an un conventional one and the possibility of its complex use in combination with some other methods of an absolute optimization.

Keywords: optimal projecting of structures, generalized Lagrange multipliers, efficient algorithm.

Bibliography

1. Izmailov, A.F. Numerical optimization methods: the Aids for Higher Schools / A.F. Izmailov, M.V. Solodov, 2nd ed., rev. and add. – Moscow: Phizmatlit, 2008. – 320p. – Bibliography.: P. 314-316. – Pcs. the decree.: p. 317-320. – ISBN 978-5-9221-0975-8.
2. Lessin, V.V. basics of optimization methods [Text]: studies. Manual / V.V. Lessin, P. Lisovets. – 3rd ed., rev. – St. Petersburg. : Lan, 2011. – 342 p. – Bibliography.: P. 340-341. – ISBN 978-5-8114-1217-4.
3. Gorelov, S.N. The results of numerical studies of the cable-stayed pedestrian bridge across the river Ural / V.I. Zhadanov, M.A. Arkaev / / Vestnik of OSU. – 2012. – № 9. – P. 177-183.
4. Klimov, M.I. Optimal design of flexible reinforced concrete foundations. Abstracts of the All-Union Conference «Modern methods and algorithms for analysis and design of building structures using a computer. – Tallinn, 1979. – P. 139-140.
5. Fiakko A. McCormick, Nonlinear Programming. – Wiley, New York, 1972. – 240.