УДК 512.554.32

Мещерина Е.В., Пихтильков С.А.
Оренбургский государственный университет
E-mail: elena_lipilina@mail.ru, pikhtilkov@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВНУТРЕННИХ ИДЕАЛОВ АЛГЕБРЫ ЛИ

Впервые понятие внутреннего идеала было введено Джорджией Бенкарт [1]. Ф. Лопес, Е. Гарсия, Г. Лозано исследовали понятие внутреннего идеала применительно к артиновости с помощью йордановых пар [2]. В работе изучаются некоторые свойства внутренних идеалов. Также рассмотрены определения артиновости в трех смыслах и связи между ними. Артиновы специальные алгебры Ли рассматривались ранее Ю.А. Бахтуриным [3], С.А. Пихтильковым [4] и В.М. Поляковым [5].

Ключевые слова: алгебра Ли, внутренний идеал, артиновость.

Определение. Скажем, что подпространство B алгебры Ли L является внутренним идеалом, если $[B,[B,L]]\subseteq B$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если алгебра B является внутренним идеалом алгебры Ли L, то* $I=B\cap[B,L]$ *является идеалом B.*

Доказательство. Пусть $x\in I$. Тогда $x\in B$ и $x\in[B,L]$.

Возьмем произвольный элемент $b\in B$ и рассмотрим $[b,x]$. Получим $[b,x]\in B$, $[b,x]\in[B,L]\Rightarrow[[b,x]\in I$.

Естественно поставить следующий вопрос.

Вопрос 1. Пусть B – внутренний идеал алгебры Ли L. Является ли $B^2=[B,B]$ внутренним идеалом?

Ответ на этот вопрос пока неизвестен авторам.

Д. Бенкарт доказала это утверждение для внутренних идеалов являющихся алгебрами Ли [1].

Для простоты чтения приведем доказательство следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть алгебра Ли B является внутренним идеалом алгебры Ли L. Тогда* $B'=[B,B]$ *является внутренним идеалом.*

Доказательство. Легко проверить, что $[[B,B],L]\subseteq[[B,L],B]$.

Следовательно,

$$[[B,B],[[B,B],L]]\subseteq[[B,B],[[B,L],B]].$$

Из того, что B является внутренним идеалом следует, что $[[B,L],B]\subseteq B$.

Отметим, что $[[B,B],B]\subseteq[B,B]$.

Значит,

$$[[B,B],[[B,B],L]]\subseteq[[B,B],B]\subseteq[B,B].$$

Мы доказали, что B' является внутренним идеалом алгебры Ли L.

Естественно поставить следующий вопрос: является ли внутренний идеал алгеброй Ли?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Так как авторы статьи не нашли пример такого внутреннего идеала в известных публикациях, он приведен ниже.

Пример. Пример внутреннего идеала конечномерной нильпотентной алгебры Ли, который не является алгеброй Ли.

Рассмотрим алгебру матриц $F_n, n\geq 4$ порядка n над полем F.

Введем следующее известное обозначение для матричных единиц. Через e_{ij} обозначим матрицу, у которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы равны нулю. Матричные единицы перемножаются по следующему правилу: $e_{ik}e_{lj}=\delta_{kl}e_{ij}$,

где $\delta_{kl}=\begin{cases}1, k=l;\\0, k\neq l\end{cases}$ – символ Кронекера.

Рассмотрим алгебру A порожденную как векторное пространство всеми матричными единицами $e_{i,j}, j>i$.

Алгебра A является ассоциативной нильпотентной алгеброй. Она также является нильпотентной алгеброй Ли по отношению к операции коммутирования $[x,y]=xy-yx$.

Пусть B векторное подпространство, порожденное матричными единицами e_{12}, e_{23}, а C – матричными единицами $\{e_{i,j} \mid j-i\geq 3\}$. Обозначим через D алгебру $D=B+C$.

Легко проверить, что $[D,[D,L]]\subseteq C$. Следовательно, D – внутренний идеал.

Коммутатор $[e_{12},e_{23}]=e_{13}$ не содержится в D.

Следовательно, внутренний идеал D не является алгеброй Ли.

Теперь можно поставить следующий вопрос.

Вопрос 2. Существует ли внутренний идеал в полупростой алгебре Ли, не являющийся алгеброй?

Приведем пример, показывающий, что взаимный коммутант внутренних идеалов может не быть внутренним идеалом.

Пример. Пример построен на основе примера из [1].

Рассмотрим алгебру Ли $sl_2(F)$ 2×2 матриц следа 0 над полем F характеристики 0.

Тогда $e=e_{12}, f=e_{21}, h=e_{11}-e_{22}$ образуют базис и подпространства Fe и Ff являются внутренними идеалами.

Рассмотрим множество $B=\{\alpha e|\alpha\in F\}$. Покажем, что множество B является внутренним идеалом. Для этого нужно проверить, что $[[B,B],L]\subseteq B$.

$$[e,f]=[e_{12},e_{21}]=e_{11}-e_{22}=h$$

$$[e,h]=[e_{12},e_{11}-e_{22}]=-e_{12}-e_{12}=-2e_{12}=-2e$$

$$[f,h]=[e_{21},e_{11}-e_{22}]=e_{21}+e_{21}=2e_{21}=2f$$

$$[B,L]=\langle e_{12},e_{11}-e_{22}\rangle=\langle e,h\rangle$$

Следовательно, $[B,[B,L]]\subseteq B$.

Возьмем множество $A=\{\beta f|\beta\in F\}$, которое так же является внутренним идеалом, и рассмотрим множество $C=[A,B]=\{\gamma h|\gamma\in F\}$.

$$[h,e]=[e_{11}-e_{22},e_{12}]=2e_{12}=2e$$

$$[h,f]=[e_{11}-e_{22},e_{21}]=-2e_{21}=-2f$$

$$[C,L]=\langle e_{12},e_{21}\rangle=\langle e,f\rangle$$

$$[C,[C,L]]=\langle e_{12},e_{21}\rangle=\langle e,f\rangle$$

То есть, $[C,[C,L]]$ не является подмножеством C, что означает, что множество C не является внутренним идеалом.

Пример из [1] побуждает нас к исследованию всех внутренних идеалов алгебры Ли $sl_2(F)$.

Теорема 1. *Рассмотрим алгебру Ли $sl_2(F)$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики не равной 2. Тогда все ее собственные внутренние идеалы одномерны, порождены матрицами вида:* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, *где* $x^2+yz=0$, x,y,z *не равны нулю одновременно.*

Доказательство. Так как алгебра Ли $L=sl_2(F)$ трехмерна, достаточно рассмотреть случай одномерных и двумерных внутренних идеалов.

1. Пусть $B=\{\alpha b|\alpha\in F, b\in L, b\neq 0\}$ – одномерный внутренний идеал.

Согласно определению внутреннего идеала, справедливо включение

$$[B,[B,L]]\subseteq B \qquad (1)$$

Напомним определение присоединенного отображения. Пусть $x,y\in L$. Тогда линейное отображение $ad: L\to L$, определенное по формуле $ad\,x(y)=[x,y]$, называется присоединенным к элементу x.

Согласно формуле (1), справедливо включение $(ad\,b)^2(y)\subseteq B$, где $y\in L$ – произвольный.

Получаем $(ad\,b)^3(y)=0$.

Для нахождения всех матриц b из $sl_2(F)$ таких, что $(ad\,b)^3=0$ рассмотрим следующие общие матрицы:

$$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Тогда

$$0=(ad\,X)^3(Y)=$$
$$=X(X(XY-YX)-(XY-YX)X)-$$
$$-(X(XY-YX)-(XY-YX)X)X.$$

Произведя вычисления в любой системе компьютерной математики (авторы использовали MathCad), получим

$$(ad\,X)^3(Y)=$$
$$=\begin{pmatrix} 4cy(x^2+yz)-4bz(x^2+yz) & 8bx(x^2+yz)-8ay(x^2+yz) \\ 8az(x^2+yz)-8cx(x^2+yz) & 4bz(x^2+yz)-4cy(x^2+yz) \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $a,b,c\in F$ – произвольные, получим систему для нахождения $x,y,z\in F$

$$\begin{cases} y(x^2+yz)=0, \\ z(x^2+yz)=0, \\ x(x^2+yz)=0. \end{cases}$$

Она равносильна уравнению $(x^2+yz)=0$, которое завершает исследование одномерных внутренних идеалов.

2. Пусть B – двумерный внутренний идеал алгебры Ли L, $H=\{\alpha(e_{11}-e_{22})+\beta e_{12}|\alpha,\beta\in F\}$.

В трехмерном пространстве два двумерных пространства имеют ненулевое пересечение.

Пусть $b\in B\cap H$, $b\neq 0, b=\alpha(e_{11}-e_{22})+\beta e_{12}$.

Рассмотрим два случая.

а) Пусть сначала $\alpha\neq 0$.

Тогда $[b,e_{12}]=2\alpha e_{12}\Rightarrow e_{12}\in[B,L]$.

Повторяя предыдущее рассуждение, получим

$$[b,e_{12}]=2\alpha e_{12}\Rightarrow e_{12}\in[B,[B,L]],$$
$$[B,[B,L]]\subseteq B\Rightarrow e_{12}\in B.$$

Из линейного представления для b получаем, что $e_{11}-e_{22}\in B$.

В этом случае $[B,L]=L$.

Следует, что B не является внутренним идеалом.

б) Пусть теперь $\alpha=0$.

Тогда $e_{12}\in B$.

Из двумерности B и предыдущей принадлежности следует, что B содержит ненулевой элемент $c=\gamma(e_{11}-e_{22})+\delta e_{21}$.

Случай $\gamma\neq 0$ аналогичен а). Можно считать, что $\delta\neq 0$.

Тогда $[B,L]$ содержит элементы e_{21},e_{12} и $e_{11}-e_{22}$. Противоречит тому, что B – внутренний идеал.

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет поставить вопрос

Вопрос 3. Справедливо ли утверждение: в любой простой алгебре Ли собственный внутренний идеал является нильпотентным?

Естественно поставить следующий вопрос.

Вопрос 4. Пусть B – внутренний идеал алгебры Ли L. Является ли $B^{(n)}$ внутренним идеалом?

Следующая лемма дает ответ на этот вопрос для внутреннего идеала, являющегося алгеброй Ли. Аналогичное утверждение для множества $B^{(n)}$ (для односторонней расстановки скобок) доказано в [1].

Лемма 3. *Пусть алгебра Ли B является внутренним идеалом алгебры Ли L. Тогда $B^{(n)}$ – внутренний идеал.*

Доказательство. Отметим, что коммутант алгебры Ли также является алгеброй Ли.

Докажем методом математической индукции.

1) $n=1$. Выше было доказано, что $B'=B^{(1)}=[B,B]$ является внутренним идеалом (лемма 2).

2) $n=k$. Предположим, что $B^{(k)}$ является внутренним идеалом.

3) $n=k+1$. $B^{(k+1)}=[B^{(k)},B^{(k)}]$. Так как по предположению $B^{(k)}$ внутренний идеал, то согласно лемме 2 делаем вывод, что $B^{(k+1)}$ является внутренним идеалом.

Определения. Пусть L – алгебра Ли.

а) Если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется i-артиновой;

б) если убывающая цепочка алгебр стабилизируется, то алгебра называется a-артиновой;

в) если убывающая цепочка внутренних идеалов стабилизируется, то алгебра называется *inn*-артиновой.

Сначала приведем пример бесконечной *inn*-артиновой алгебры Ли.

Пример. Пусть F – поле характеристики нуль, $K\supset F$ – бесконечное расширение поля F.

Рассмотрим алгебру Ли $L=sl_2(K)$ над полем F. Она бесконечномерная специальная.

Пусть $H\subset L$ – собственный внутренний идеал. Множество $G=[[H,H],L]$ является K подпространством алгебры Ли L.

Заметим, что $G\subset H$ – внутренний идеал L.

Предположим, что G – собственный. Тогда, согласно теореме 1, он абелев, одномерный над K. Предположим также, что множество $H\setminus G$ не пусто. Тогда KH не является внутренним идеалом L. Следовательно, существуют такие $\alpha_i,\beta_j\in K, h_i,g_j\in H,\ i=1,...,m,\ j=1,...,n, x\in L$, что

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i,\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j g_j,x\right]\right]=\left[\sum_{i=1}^{m}h_i,\left[\sum_{j=1}^{n}g_j,\alpha_i\beta_j x\right]\right]\notin H\ .$$

Следовательно, найдутся такие i, j, что $[h_i[g_j,\alpha_i\beta_j x]]\notin H$. В этом случае H не является внутренним идеалом.

Рассмотрим теперь случай, когда $G=[[H,H],L]=0$.

Легко проверить, что из *inn*-артиновости следует i-артиновость и из a-артиновости следует i-артиновость.

Приведем пример, показывающий что из i-артиновости может не следовать a-артиновость.

Пример. Пусть F – поле характеристики нуль, $K=F(x_1,x_2,...,x_n,...)$ – поле рациональных функций от коммутирующих переменных $x_1,x_2,...,x_n,...$

Обозначим через L алгебру Ли матриц порядка 2 над полем K со следом нуль $L=sl_2(K)$. Будем рассматривать L как алгебру Ли над полем F.

Пусть I – идеал алгебры Ли L, $a\in L, a\neq 0$. Из простоты L над полем K следует, что элемент a представим в виде

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[...[a,l_{i1}],l_{i2}],...],l_{i,k_i}],\ \alpha_i\in K, l_{ij}\in L.$$

Пусть $\beta\in K$ – произвольный. Тогда элемент

$$\beta a=\sum_{i=1}^{n}[...[a,\beta\alpha_i l_{i1}],l_{i2}],...],l_{i,k_i}],\alpha_i\in K, l_{ij}\in L.$$

принадлежит I. Следовательно, идеал I является векторным пространством над K.

Мы показали, что L, как алгебра над F – простая. В то же время, она содержит бесконечную убывающую цепочку подалгебр над F:

$$sl_2(F[x_1,x_2,...])\supseteq sl_2(F[x_{21},x_3,...])\supseteq ...$$

$$...\supseteq sl_2(F[x_n,x_{n+1},...])\supseteq ...,$$

что завершает рассмотрение примера.

Приведем пример показывающий, что из i-артиновости не следует inn -артиновость.

Пример. Пусть V векторное пространство над полем F и W – подпространство V с базисом $e_1,e_2,...,e_n,...$, где $dimV\ /W=\infty$.

Обозначим через W_n подпространство, порожденное векторами $e_n,e_{n+1},...$. Получим $W=W_1$.

Пусть $L=L(V)^{(-)}$ алгебра Ли, полученная из полной алгебры линейных отображений V с помощью операции коммутирования $[x,y]=xy-yx$. Известно, что L – простая алгебра Ли.

Обозначим через I_n множество линейных отображений $f:V\to V$ таких, что $f(V)\subseteq W_n$, $f(W)=0$.

Проверим, что $I_n,n=1,2,...$ – являются внутренними идеалами.

Рассмотрим $f,g\in I_n,h\in L,x\in V$. Тогда

$$[f,[g,h]](x)=f[g,h](x)-[g,h]f(x)=$$
$$=f(g(h(x)))-f(h(g(x)))-$$
$$-g(h(f(x)))+h(g(f(x)))=$$
$$=-f(h(g(x)))-g(h(f(x)))\subseteq W_n.$$

Мы использовали свойство отображений из $I_n: fg=gf=0$.

Следовательно, $[f,[g,h]]\subseteq I_n$.

Мы показали, множество линейных отображений I_n является внутренним идеалом алгебры Ли L.

Цепочка внутренних идеалов $I_1\supseteq I_2\supseteq ...\supseteq I_n\supseteq ...$ простой алгебры Ли L является строго убывающей, бесконечной.

В 2001 году А.В. Михалев на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Кольца и модули» поставил проблему: существует ли артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

С.А. Пихтильков доказал, что первичный радикал специальной алгебры Ли является разрешимым [4].

Понятие специальной алгебры. Ли было введено В.Н. Латышевым в 1963 г. [6].

Определение. Алгебра Ли L называется специальной алгеброй или *SPI*-алгеброй, если существует ассоциативная *PI*-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x,y]=xy-yx$.

Известно, что первичный радикал произвольной алгебры Ли является слабо разрешимым, может не быть разрешимым и даже локально разрешимым [6].

Мы показали, что свойство inn -артиновости сильнее, чем свойство i-артиновости.

Следующее предложение может быть полезно при попытках решить проблему Михайлева хотя бы для inn -артиновых алгебр Ли.

Предложение. Пусть ненулевая алгебра Ли B является внутренним идеалом алгебры Ли L, L – *inn*-артинова. Тогда B содержит ненулевой внутренний идеал I, *I* или B удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой ступени.

Доказательство. $B\supseteq B'\supseteq B''\supseteq ...\supseteq B^{(n)}\supseteq ...$ – убывающая цепочка внутренних идеалов. Из inn -артиновости следует, что она стабилизируется. Существует натуральное число k, такое что $B^{(k)}=B^{(k+1)}$. $I=B^{(k)}$. Тогда, если

1. $I=0\Rightarrow B$ удовлетворяет тождеству разрешимости ступени k;

2. $I\neq 0\Rightarrow [I,I]=I,\ I$ – искомый.

Следовательно, B содержит ненулевой идеал или B удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой ступени.

4.12.2012

Список литературы:

1. Benkart, G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras / G. Benkart// Transaction of the American Mathematical Society.– 1977.– V. 232.– P. 61-81.
2. Fernandez Lopez A. An artinian theory for Lie algebras /Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M.// Journal of Algebra.– 2008.– V. 319.– P. 938-951.
3. Бахтурин, Ю.А. Артиновы специальные алгебры Ли// Ю.А. Бахтурин /Алгебра: сб. науч. тр./ М.: Изд-во МГУ, 1982.– С. 24-26.
4. Пихтильков, С.А. Артиновые специальные алгебры Ли / С.А. Пихтильков// Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: сб. науч. тр./ Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2001.– С. 189-194.

5. Пихтильков, С.А. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли / С.А. Пихтильков, В.М. Поляков// Чебышевский сборник.– 2005.– Т. 6.– Вып. 1.– С. 163-169.
6. Пихтильков, С.А. Структурная теория специальных алгебр Ли / С.А. Пихтильков.– Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2005.– С. 45-48.

Сведения об авторах:
Пихтильков С.А., заведующий кафедрой алгебры математического факультета
Оренбургского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор,
e-mail: pikhtilkov@mail.ru
Мещерина Е.В., аспирантка математического факультета Оренбургского государственного университета,
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, тел. (3532) 372531

UDC 512.554.32
Mescherina E.V., Pikhtilkov S.A.
Orenburg state university, e-mail: pikhtilkov@mail.ru
ON SOME PROPETIES OF LIE ALGEBRAS INNER IDEALS
The concept of the inner ideal Benkart Georgia was introduced [1]. F. Lopez, E. Garcia, G. Lozano investigated the notion of inner ideal with respect to the Artinian Jordan pairs with [2]. In this paper we study some properties of inner ideals. It is also considered the definition of Artinian in three senses and communication between them. Artinian special Lie algebras was considered earlier by Y.A. Bahturin [3], S.A. Pikhtilkov [4], and V.M. Polyakov [5].
Key words: Lie algebra, inner ideal, Artinian.

Bibliography
1. Benkart, G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras / G. Benkart// Transaction of the American Mathematical Society.– 1977.– V. 232.– P. 61-81.
2. Fernandez Lopez A. An Artinian theory for Lie algebras /Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M.// Journal of Algebra.– 2008.– V. 319.– P. 938-951.
3. Bahturin, Y.A. Artinian special Lie algebras / / Y.A. Bahturin / Algebra: Collection of scientific papers/ M.: MSU, 1982. – P. 24-26.
4. Pikhtilkov, S.A. Artinian special Lie algebras / S.A. Pikhtilkov / / Algorithmic problems in group theory and semigroups: Collection of scientific papers / Tula: TSPU the name of L.N. Tolstoy, 2001. – P. 189-194.
5. Pikhtilkov, S.A. On locally nilpotent Artinian Lie algebras / S.A. Pikhtilkov, V.M. Polyakov / / Chebyshev collection. – 2005. – T. 6. – V. 1. – P. 163-169.
6. Pikhtilkov, S.A. Structural theory of special Lie algebras / S.A. Pikhtilkov. – Tula: TSPU the name of L.N. Tolstoy, 2005. – P. 45-48.