УДК 517.944

Ивашкина Г.А., Спиридонова Е.В.
Оренбургский государственный университет
E-mail: ekvls@mail.ru

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Задача со смещением для обобщенного уравнения Трикоми рассмотрена в специальной области, ограниченной нормальной кривой Г с концами в точках A(0;0) и B(1;0), лежащей в верхней полуплоскости *y>0*, лучом, выходящим из точки B и идущим в направлении оси Ox и характеристикой AC: $\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$. Доказано, что решение задачи существует и единственно.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Трикоми, сингулярное интегральное уравнение, единственность и существование решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение:

$$Sgny|y|^m U_{xx} + U_{yy} = 0,\ m > 0 \qquad (1)$$

в области D, ограниченной нормальным контуром Г с концами в точках A(0;0) и B(1;0), лежащем в верхней полуплоскости y>0, лучом, выходящим из точки B и идущим в направлении оси Ox и характеристикой AC: $\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, уравнения (1).

Обозначим D^+ и D^- – части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях y>0 и y<0, $\bar{J} = [0,+\infty]$.

Задача G. Найти в области D решение $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D^+UJ) \cap (D^-UJ) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ уравнения (1), удовлетворяющие следующим краевым условиям:

$$u(x,y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x),\ (0 \le x \le 1), \qquad (2)$$

$$u(x,0) = g(x) \quad \forall x \in [1;\infty), \qquad (3)$$

$$D_{Ox}^{1-\beta}\ u[\theta_0(x)] + a(x)u(x,0) = b(x) \quad \forall x \in (0;+\infty), \qquad (4)$$

где $\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\left(\frac{4}{m+2}x^{\frac{2}{m+2}}\right)$

есть аффикс точки пересечения характеристики, выходящей из точки (x;0) с характеристикой

$$x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,$$

a(x), b(x), g(x), φ(x) – непрерывные функции.

На линии параболического вырождения выполняется следующие условие склеивания:

$$\lim_{y \to -0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \lim_{y \to +0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \upsilon(x) \quad \forall x \in (0,+\infty). \qquad (5)$$

2. Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. В характеристических координатах $\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $\eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$, уравнение (1) перейдет в уравнение Эйлера-Дарбу, область D^- – в бесконечный характеристический «треугольник»: $\xi = 0, \eta = \xi$.

Решение задачи Коши с краевыми уравнениями

$$u(x,0) = \rho(x),$$

где

$$\rho(x) = \begin{cases} \tau(x), & при\ 0 \le x \le 1, \\ g(x), & при x \ge 1, \end{cases}$$

$\lim\limits_{y \to -0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu(x)$ представимо в виде

$$u(\xi,\eta) = \gamma_1 \int_{\xi}^{\eta} (\eta-\xi)^{1-2\beta}(\eta-t)^{\beta-1}(t-\xi)^{\beta-1}\rho(t)dt -$$

$$\gamma_2 \int_{\xi}^{\eta} (\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}\nu(t)dt, \qquad (6)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\ \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)} \quad \left(0 < \beta < \frac{1}{2}\right).$$

Используя решение задачи Коши, найденные по формуле (6),определим

$$u(\theta_0(x)) = \gamma_1 \int_0^x x^{1-2\beta}(x-t)^{\beta-1}t^{\beta-1}\rho(t)dt -$$

$$- \gamma_2 \int_0^x (x-t)^{-\beta}t^{-\beta}\nu(t)dt,$$

и, вводя операторы Римана-Лиувилля дробного порядка, получим:

$$u(\theta_0(x)) = \gamma_1\Gamma(\beta)x^{1-2\beta}D_{Ox}^{-\beta}x^{\beta-1}\rho(x) -$$

$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{Ox}^{\beta-1}\nu(x)x^{-\beta} \qquad (7)$$

Подставим (7) в краевое условие (4) и применим оператор $D_{Ox}^{i-\beta}$:

$$\gamma_1 \Gamma(\beta) D_{Ox}^{1-\beta} x^{1-2\beta} D_{Ox}^{-\beta} x^{\beta-1} \rho(x) -$$

$$-\gamma_2 \Gamma(1-\beta) \nu(x) x^{-\beta} + a(x)\rho(x) = b(x) \quad (8)$$

Учитывая, что $\rho(0)=0$ и

$$D_{Ox}^{1-\beta} x^{1-2\beta} D_{Ox}^{-\beta} x^{\beta-1} \rho(x) =$$

$$= \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \rho(t)(x-t)^{2\beta-1} dt =$$

$$= \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(2\beta)} \int_0^x p'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt$$

равенство (8) примет вид

$$\int_0^x \rho'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt - \gamma_2 \frac{\pi}{\sin\pi\beta} \nu(x) +$$

$$+ \Gamma(\beta) a(x)\rho(x) x^\beta = \Gamma(\beta) x^\beta b(x) \quad (9)$$

Из формулы (9) определим $\nu(x)$ и подставим в (6)

$$u(\xi,\eta) = \gamma_1 \int_\xi^\eta (\eta-\xi)^{1-2\beta} (\eta-t)^{\beta-1} (t-\xi)^{\beta-1} \rho(t) dt -$$

$$- \frac{\sin\pi\beta}{\pi} \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} \times$$

$$\times \left[\int_0^t \rho'(z)(t-z)^{2\beta-1} dz + \Gamma(\beta) t^\beta \big(a(t)\rho(t) - b(t)\big) \right] dt \quad (10)$$

Преобразуем интеграл

$$J = \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} dt \int_0^t \rho'(z)(t-z)^{2\beta-1} dz =$$

$$= \int_0^\xi \rho'(z) dz \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} (t-z)^{2\beta-1} dt +$$

$$+ \int_\xi^\eta \rho'(z) dz \int_z^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} (t-z)^{2\beta-1} dt$$

Во внутренних интегралах выполним соответственно подстановки

$$\eta - (\eta-\xi)\mu = t \ \text{ и } \ \eta - (\eta - z)\mu = t,$$

тогда J примет вид:

$$J = \int_0^\xi \left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z} \right)^{1-2\beta} \rho'(z) dz \int_0^1 \mu^{-\beta} (1-\mu)^{-\beta} \left(1 - \frac{\eta-\xi}{\eta-z} \mu \right)^{2\beta-1} d\mu +$$

$$+ \int_\xi^\eta \left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi} \right)^\beta \rho'(z) dz \int_0^1 \mu^{-\beta} (1-\mu)^{2\beta-1} \left(1 - \frac{\eta-z}{\eta-\xi} \mu \right)^{-\beta} d\mu =$$

$$= \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)} \int_0^\xi \left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z} \right)^{1-2\beta} \rho'(z) F\left(1-\beta, 1-2\beta; 2-2\beta; \frac{\eta-\xi}{\eta-z} \right) dz +$$

$$+ \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}{\Gamma(1+\beta)} \int_\xi^\eta \left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi} \right)^\beta \rho'(z) F\left(1-\beta; \beta; 1+\beta; \frac{\eta-z}{\eta-\xi} \right) dz.$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$J = \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)} \Bigg[\rho(\xi) F\big(1-2\beta, 1-\beta; 2-2\beta; 1\big) -$$

$$- \rho(0) \left(\frac{\eta-\xi}{\eta} \right)^{1-2\beta} F\left(1-2\beta, 1-\beta, 2-2\beta, \frac{\eta-\xi}{\eta} \right) -$$

$$- \int_0^\xi (1-2\beta) \left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z} \right)^{-2\beta} \frac{\eta-\xi}{(\eta-z)^2} \rho(z) F \times$$

$$\times \left(2-2\beta, 1-\beta, 2-2\beta, \frac{\eta-\xi}{\eta-z} \right) dz \Bigg]$$

$$+ \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}{\Gamma(1+\beta)} \Bigg[-\rho(\xi) F(\beta, 1-\beta, 1+\beta, 1) +$$

$$+ \int_\xi^\eta \rho(z) \beta \left(\frac{\eta-z}{\eta-\xi} \right)^{\beta-1} \frac{1}{\eta-\xi} F\left(1-\beta, 1+\beta, 1+\beta, \frac{\eta-z}{\eta-\xi} \right) dz \Bigg] =$$

$$= -\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)} \int_0^\xi (\eta-\xi)^{1-2\beta} \rho(z) (\xi-z)^{\beta-1} (\eta-z)^{\beta-1} dz +$$

$$+ \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} \int_\xi^\eta (\eta-\xi)^{1-2\beta} \rho(z) (z-\xi)^{\beta-1} (\eta-z)^{\beta-1} dz$$

Найденные значения J подставим в (10)

$$u(\xi;\eta) = \frac{\sin\pi\beta}{\pi} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)} \int_0^\xi (\eta-\xi)^{1-2\beta} \times$$

$$\times (\eta-t)^{\beta-1} (\xi-t)^{\beta-1} \rho(t) dt -$$

$$- \frac{\sin\pi\beta}{\pi} \Gamma(\beta) \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} t^\beta \big[a(t)\rho(t) - b(t)\big] dt \quad (11)$$

При $0 \le \xi \le 1$, $0 \le \eta \le 1$ функция $\rho(x) = \tau(x)$, которая неизвестна, при $0 \le \xi < \infty$, $1 < \eta < \infty$ функция $\rho(x) = g(x)$.

3. Принцип экстремума. Определим знак $\nu(x)$ при условии, что $b(x) \equiv 0$ и $a(x) > 0$.

При $0 \le x \le 1$

$$\gamma_2 \frac{\pi}{\sin\pi\beta} \nu(x) = \int_0^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt + \Gamma(\beta) a(x) x^\beta \tau(x) \quad (12)$$

Пусть $x = \xi$ – точка положительного максимума функции $\tau(x)$. Тогда второе слагаемое

$$\Gamma(\beta) a(\xi) \xi^\beta \tau(\xi) > 0.$$

Рассмотрим

$$\int_0^\xi \tau'(t)(\xi-t)^{2\beta-1} dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\xi-\varepsilon} \tau'(t)(\xi-t)^{2\beta-1} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\tau(t)(\xi-t)^{2\beta-1} \Big|_0^{\xi-\varepsilon} - (1-2\beta) \int_0^{\xi-\varepsilon} \tau(t)(\xi-t)^{2\beta-2} dt \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\tau(\xi-\varepsilon)\varepsilon^{2\beta-1} - \tau(0)\xi^{2\beta-1} + (1-2\beta) \int_0^{\xi-\varepsilon} \times$$

$$\times\left[\tau(\xi)-\tau(t)\right](\xi-t)^{2\beta-2}dt-(1-2\beta)\tau(\xi)\frac{(\xi-t)^{2\beta-1}}{1-2\beta}\Big|_0^{\xi-\varepsilon}\Bigg]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(1-2\beta)\int_0^{\xi-\varepsilon}(\tau(\xi)-\tau(t))(\xi-t)^{2\beta-2}dt-(\tau(\xi)-\tau(\xi-\varepsilon))\varepsilon^{2\beta-1}\right]$$

Будем полагать, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1-2\beta+\delta$, где $\delta>0$. Тогда $\int_0^{\xi}\tau'(t)(\xi-t)^{2\beta-1}dt$ будет иметь положительный знак, следовательно, $\nu(x)>0$.

Это противоречит принципу Заремба-Жиро [1].

Лемма (принцип экстремума). Если $b(x)\equiv 0$ и $a(x)>0$, то положительный максимум в замкнутой области $\overline{D}^{+}$ достигается на Г.

Из принципа экстремума следует единственность решения области $\overline{D}^{+}\cup\overline{D}_1^{-}$, где $\overline{D}_1^{-}$ – область, ограниченная отрезками АВ оси Ох и характеристиками,выходящими из точек А и В. Решение задачи в области $D_2^{-}=D^{-}\setminus D_1^{-}$ следует из единственности решения задачи Коши.

4. Сведения задачи G к сингулярному уравнению. Основное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из D^{+} на линию вырождения типа, имеет вид

$$\tau(x)=-k_1\int_0^1\nu(t)\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right]dt+\Phi(x),$$

где

$$\Phi(x)=2k_1\beta(1-2\beta)^{-\beta}x(1-x)\int_0^1\varphi(t)[t(1-t)]^{\beta-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[x^2+(1-2x)t\right]^{-1-\beta}dt,$$

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

Подставим выражение для $\nu(x)$, найденные по формулам (12) в (13)

$$\tau(x)=-\frac{\cos\pi\beta}{\pi}\int_0^1\Big[|x-t|^{-2\beta}-$$

$$-(x+t-2xt)^{-2\beta}\Big]\Big\{\int_0^t\tau'(z)(t-z)^{2\beta-1}dz+$$

$$+\Gamma(\beta)x^{\beta}\left[a(t)\tau(t)-b(t)\right]\Big\}dt+\Phi(x)\qquad(14)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1=\int_0^1\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right]dt\int_0^t\tau'(z)(t-z)^{2\beta-1}dz=$$

$$=\int_0^x\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right]dt\int_0^t\tau'(z)(t-z)^{2\beta-1}dz+$$

$$+\int_x^1\left[(t-x)^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]dt\int_0^t\tau'(z)(t-z)^{2\beta-1}dz=i_1+i_2\qquad(15)$$

Преобразуем i_1, изменив порядок интегрирования

$$i_1=\int_0^x\tau'(z)dz\int_z^x\left[(x-t)^{-2\beta}-(x+t-2xt)^{-2\beta}\right](t-z)^{2\beta-1}dt.$$

Выполним замену переменной по формуле $t=z+(x-z)\xi$

$$i_1=\int_0^x\tau'(z)dz\int_0^1(1-\xi)^{-2\beta}\xi^{2\beta-1}d\xi-$$

$$-\int_0^x\tau'(z)\left(\frac{x-z}{x+z-2xz}\right)^{2\beta}dz\int_0^1\xi^{2\beta-1}\left(1-\frac{(2x-1)(x-z)}{x+z-2xz}\xi\right)^{-2\beta}d\xi=$$

$$=\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\tau(x)-\frac{1}{2\beta}\int_0^x\tau'(z)\left(\frac{x-z}{x+z-2xz}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times F\left(2\beta,2\beta;1+2\beta;\frac{(2x-1)(x-z)}{x+z-2xz}\right)dz$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$i_1=\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\tau(x)-\Bigg[\tau(z)\left(\frac{x-z}{x+z-2xz}\right)^{2\beta}\frac{1}{2\beta}F\Bigg(2\beta,2\beta;1+$$

$$+2\beta;\frac{(2x-1)(x-z)}{x+z-2xz}\Bigg)\Big|_0^x+\int_0^x\tau(z)(2x(1-x))^{1-2\beta}\frac{(x-z)^{2\beta-1}}{x+z-2xz}dz\Bigg]=$$

$$=\frac{\pi}{\sin 2\pi}\tau(x)-(2x(1-x))^{1-2\beta}\int_0^x\tau(z)\frac{(x-z)^{2\beta-1}}{x+z-2xz}dz.$$

Рассмотрим интеграл:

$$i_2=\int_x^1\left[(t-x)^{-2\beta}-(t+x-2tx)^{-2\beta}\right]dt\int_0^t\tau'(z)(t-z)^{2\beta-1}dz=$$

$$=\int_0^x\tau'(z)dz\int_x^1\left[(t-x)^{-2\beta}-(t+x-2tx)^{-2\beta}\right](t-z)^{2\beta-1}dt+$$

$$+\int_x^1\tau'(z)dz\int_z^1\left[(t-x)^{-2\beta}-(t+x-2tx)^{-2\beta}\right](t-z)^{2\beta-1}dt=$$

$$=i_{21}+i_{22}\qquad(17)$$

Используя подстановку $t=1-(1-x)\xi$, i_{21} запишется в виде:

$$i_{21}=\int_0^x\tau'(z)(1-x)^{1-2\beta}(1-z)^{2\beta-1}\left[\frac{1}{1-2\beta}F\left(1;1-2\beta;2-2\beta;\frac{1-x}{1-z}\right)-\right.$$

$$\left.-F_1\left(1,2\beta,1-2\beta;2;1-2x,\frac{1-x}{1-z}\right)\right]dz$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$i_{21}=\tau(x)\lim_{z\to x}\frac{1}{1-2\beta}F\left(1,1-2\beta;2-2\beta;\frac{1-x}{1-z}\right)-$$

$$-\tau(x)F_1(1,2\beta,1-2\beta;2;1-2x;1)-\int_0^x\tau(z)\left(\frac{1-x}{1-z}\right)^{1-2\beta}\frac{dz}{x-z}+$$

$$+\int_0^x\tau(z)(1-2\beta)\left(\frac{1-x}{1-z}\right)^{-2\beta}\times$$

$$\times\frac{1-x}{(1-z)^2}F_1\left(1,2\beta,2-2\beta;2,1-2x;\frac{1-x}{1-z}\right)dz=$$

$$=\tau(x)\frac{1}{1-2\beta}\lim_{z\to x}F\left(1,1-2\beta;2-2\beta;\frac{1-x}{1-z}\right)-$$

$$\left.\right)-\frac{1}{2\beta}\tau(x)F(1;2\beta;1+2\beta;1-2x;)-\int_0^x\tau(z)\left(\frac{1-x}{1-z}\right)^{1-2\beta}\frac{dz}{x-z}+$$

$$+(1-2\beta)\int_0^x\tau(z)\left(\frac{1-x}{1-z}\right)^{1-2\beta}\frac{1}{x-z}F\left(1,2\beta;2;\frac{x+z-2xz}{z-x}\right)dz.$$

Имеет место тождество

$$F(0,2\beta-1;1;z)-F(1,2\beta-1;1;z)+(2\beta-1)zF(1,2\beta;2;z)=0,$$

с учетом которого

$$F\left(1,2\beta;2;\frac{x+z-2xz}{z-x}\right)=\frac{1}{1-2\beta}\frac{z-x}{x+z-2xz}+\frac{1}{1-2\beta}\times$$

$$\times\frac{(2x)^{1-2\beta}}{x+z-2xz}(1-z)^{1-2\beta}(x-z)^{2\beta}.$$

Подставляя полученное выражение для гипергеометрической функции в i_{21}, получим

$$i_{21}=\frac{1}{1-2\beta}\tau(x)\lim_{z\to x}F\left(1,1-2\beta;2-2\beta;\frac{1-x}{1-z}\right)-$$

$$-\frac{\tau(x)}{2\beta}F(1,2\beta;1+2\beta;1-2x;)+$$

$$+(1-x)^{1-2\beta}\int_0^x\tau(z)(1-z)^{2\beta-1}\left(\frac{1}{z-x}-\frac{1}{x+z-2xz}\right)dz+$$

$$+\left[2x(1-x)\right]^{1-2\beta}\int_0^x\tau(z)\frac{(x-z)^{2\beta-1}}{x+z-2xz}dz.$$

Интеграл i_{22} с помощью подстановки $t=1-(1-z)\xi$ приводится к виду:

$$i_{22}=\int_x^1\tau'(z)\left(\frac{1-z}{1-x}\right)^{2\beta}\left[\frac{1}{2\beta}F\left(1,2\beta;1+2\beta;\frac{1-z}{1-x}\right)-\right.$$

$$\left.\left.\right)-\frac{1}{2\beta}F\left(1,2\beta;1+2\beta;\frac{(1-z)(1-2x)}{1-x}\right)\right]dz.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$i_{21}=\frac{1}{-2\beta}\tau(x)\lim_{z\to x}F\left(1,2\beta;1+2\beta;\frac{1-z}{1-x}\right)+$$

$$\left.\right)+\frac{1}{2\beta}\tau(x)F_1(1,2\beta;1+2\beta;1-2x)+$$

$$+\int_x^1\tau(z)\left(\frac{1-x}{1-z}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{z-x}-\frac{1}{x+z-2xz}\right)dz.$$

Так как $i_2=i_{21}+i_{22}$, то в результате сложения будем иметь

$$i_2=\int_0^1\tau(z)\left(\frac{1}{z-x}-\frac{1}{x+z-2xz}\right)dz+$$

$$+\left[2x(1-x)\right]^{1-2\beta}\int_0^x\tau(x)\frac{(x-z)^{2\beta-1}}{x+z-2xz}dz$$

и, следовательно, по формуле (15) получим

$$J_1=\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\tau(x)+\int_0^1\tau(x)\left(\frac{1-x}{1-z}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{z-x}-\frac{1}{x+z-2xz}\right)dz.$$

Подставляя J_1 в (14), получим сингулярное интегральное уравнение для определения функции $\tau(x)$

$$\tau(x)+\lambda\int_0^1\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2\beta}\tau(t)\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)dt=$$

$$=-\lambda\int_0^1 k(x,t)\tau(t)dt+F(x) \qquad (18)$$

где

$$\lambda=\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi(1+2\sin\pi\beta)};$$

$$k(x,t)=\Gamma(\beta)\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]t^\beta a(t),$$

$$F(x)=\lambda\Gamma(\beta)\int_0^1\left[|x-t|^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]t^\beta b(t)dt+$$

$$+\frac{2\sin\pi\beta}{1+2\sin\pi\beta}\Phi(x).$$

5. Исследование функции $F(x)$ и ее производной. Рассмотрим первое слагаемое формулы $F(x)$ и оценим его по модулю. В силу непрерывности функции $b(x)$, она ограничена, т. е. $|b(x)|\le M_1$

$$|J_1|\le L_1\int_0^x\left[(x-t)^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]t^\beta dt+$$

$$+\int_x^1\left[(t-x)^{-2\beta}-(x+t-2tx)^{-2\beta}\right]t^\beta dt$$

Выполняя соответственно подстановки xz=t и $1-(1-x)z=t$, сведем интегралы к гипергеометрическим функциям:

$$|J_1|\le L_1x^{1-\beta}\left[B(1+\beta;1-2\beta)-\frac{1}{1+\beta}F(1+\beta,2\beta;2+\beta;2x-1)\right]+$$

$$+L_1(1-x)^{1-2\beta}\left[\frac{1}{1-2\beta}F(1,-\beta,2-2\beta,1-x)-\right.$$

$$\left.-F_1(1,2\beta,-\beta,2,1-2x;1-x)\right]$$

Покажем, что J_1, обращается в нуль при x=0 и x=1. Действительно, при x=0 первое слагаемое обращается в нуль, второе слагаемое при x=0 примет вид

$$L_1\left[\frac{1}{1-2\beta}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)\Gamma(2-\beta)}-\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2+\beta)}\frac{\Gamma(2+\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(2-\beta)}\right]=0$$

Аналогично, при x=1 второе слагаемое равно нулю и первое также равно нулю:

$$L_1\left[\frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(2-\beta)}-\frac{1}{1+\beta}\frac{\Gamma(2+\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(2-\beta)}\right]=0$$

Нетрудно показать, что $\frac{\partial J_1}{\partial x}$ в точке x=0 имеет особенность порядка β, а в точке x=1 – особенность порядка 2β.

Прейдем к исследованию функции Ф(x).

$$\Phi(x)=k_2x(1-x)\int_0^1\varphi(t)[t(1-t)]^{\beta-\frac{1}{2}}\left[x^2+(1-2x)t\right]^{-1-\beta}dt,$$

где

$$k_2=2k_1\beta(1-2\beta)^{-\beta}\frac{2\sin\pi\beta}{1+2\sin\pi\beta}.$$

Пусть

$$\varphi(x)=[x(1-x)]^{\beta+\frac{1}{2}}\varphi^*(x),$$

где $\varphi^*(x)$ – непрерывная на [0;1].

Тогда

$$|\Phi(x)|\le k_2x(1-x)M_1\int_0^1[t(1-t)]^{2\beta}\left[x^2+(1-2x)t\right]^{-1-\beta}dt.$$

Из неравенства видно, что $\Phi(x)$ – ограниченная величина, причем $\Phi(0)=\Phi(x)=0$.

Заметим, что при замене x на 1-x и t на 1-t, подынтегральное выражение останется тем же самым с той лишь разницей, что аргумент у функции $\varphi^*(x)$ заменится на $1-t$. Выясним, как ведет себя $\frac{d\Phi}{dt}$ при $x\to 0$ и $x\to 1$. В силу сказанного достаточно исследовать поведение $\frac{d\Phi}{dt}$ при $x\to 1$ или $x\to 0$. Проще это сделать при $x\to 1$.

Найдем

$$\left|\frac{d\Phi(x)}{dx}\right|\le k_2M_1x^{-3-2\beta}\left[\left((1-2x)xF\left(1+2\beta,1+\beta;2+4\beta;\frac{2x-1}{x^2}\right)-\right.\right.$$

$$-2x(1-x)(1+\beta)F\left(1+2\beta,2+\beta;2+4\beta;\frac{2x-1}{x^2}\right)+$$

$$\left.+(1+\beta)(1-x)F\left(2+2\beta,2+\beta;3+4\beta;\frac{2x-1}{x^2}\right)\right)=$$

$$=k_2Mx^{-3-2\beta}\left[\left((1-2x)xF\left(1+2\beta,1+\beta;2+4\beta;\frac{2x-1}{x^2}\right)-\right.\right.$$

$$-2x(1-x)(1+\beta)\left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\beta-2}F\left(1+2\beta,3\beta;2+4\beta;\frac{2x-1}{x^2}\right)+$$

$$\left.\left.+(1-x)(1+\beta)\left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\beta-2}F\left(1+2\beta,1+3\beta;3+4\beta;\frac{2x-1}{x^2}\right)\right)\right].$$

Из последнего неравенства видно, что при $x\to 1$ $\left|\frac{d\Phi(x)}{dx}\right|$ стремиться к бесконечности порядка $1-2\beta$. Ту же самую особенность имеет $\frac{d\Phi}{dt}$ при $x\to 0$, в чем еще раз можно убедиться, выполнив переход от аргумента $z=\frac{2x-1}{x^2}$ к аргументу $\frac{1}{1-z}=\frac{x^2}{(1-x)^2}$.

Итак, функция F(x) непрерывна, в отрезке [0; 1] и на его концах обращается в нуль; имеет производную $\frac{dF}{dt}$, непрерывную в интервале (0;1) и допускающую в точках x=0 и x=1 интегрируемую особенность.

Сингулярное интегральное уравнение (18) есть уравнение нормального типа. Решение такого уравнения существует в силу единственности решения задачи G [4].

10.09.2012

Список литературы:

1. Бицадзе, А.В.Уравнение смешанного типа / А.В. Бицадзе. – М.: Изд. АНСССР, 1959. – С. 84-86.
2. Градштеин, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштеин, И.М. Рыжик. – М.: Госуд. изд. физико-математической литературы, 1969. – С.168-169, С. 298-301.
3. Смирнов, М.М. Уравнения смешенного типа / М.М. Смирнов. – М.: «Высшая школа», 1985. – С.159-161.
4. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Физматгиз, 1962. – С. 235-239.

Сведения об авторах:

Ивашкина Галина Андреевна, доцент кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук

Спиридонова Екатерина Владимировна, старший преподаватель кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2240, тел. (3532) 372576

UDC 517.944

Ivashkina G.A., Spiridonova E.V.

Orenburg state university, e-mail: ekvls@mail.ru

THE PROBLEM WITH SHIFT FOR A SPECIAL AREA

Problem with shift for generalized Tricomi equation is considered in a special area, bounded normal curve Γ with endpoints A (0, 0) and B (1, 0), which lies in the upper half $y>0$, a ray emanating from the point B and going in the direction of Ox, and feature AC: $\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0$. Proved that the solution exists and is unique.

Key words: generalized Tricomi equation, singular integral equation, uniqueness and existence of solutions.