УДК 539.1.01

Арифуллин М.Р., Бердинский В.Л.
Оренбургский государственный университет
E-mail: arifullinm@mail.ru

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ МНОГОСПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ НЕРАЗЛИЧИМЫХ ФЕРМИОНОВ

Показано, что в произвольной большой системе *N* фермионов, например, электронов со спином *S* = 1/2, спиновое состояние каждой частицы запутано с остальной системой, содержащей *N*-1 частицу. Однако, при этом спиновое состояние любой пары фермионов не запутано. Эти свойства спиновых состояний проявляются в экспериментах Эйнштейна-Подольского-Розена как нарушение или выполнение неравенств Белла, свидетельствующих о наличии квантовых нелокальных спиновых корреляций.

Ключевые слова: квантовая запутанность, матрица плотности, принцип Паули, квантовые корреляции.

Введение

Знания основных свойств спиновых состояний многофермионных и, в частности, многоэлектронных систем необходимы как для понимания фундаментальных квантово-механических свойств этих систем, так и для конкретных областей физики и химии. К таким основным свойствам относится запутанность квантовых состояний многочастичных систем [1-4]. На примере составной квантовомеханической системы *AB*, которая может быть разделена на подсистемы *A* и *B*, свойство «запутанность» описывается как нарушение равенства, связывающего матрицы плотности объединенной системы и ее подсистем

$$\rho^{AB} \neq \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$$

где ρ^A и ρ^B матрицы плотности подсистем. Это неравенство означает, что матрица плотности ρ^{AB} объединенной системы не может быть получена как сумма прямых произведений матриц плотности ρ^A и ρ^B и, следовательно, полную систему нельзя образовать простым соединением независимых физических подсистем *A* и *B*. Если сложная система *AB* может быть образована из независимых подсистем, то она является незапутанной.

Запутанность квантовых состояний важна для реализаций алгоритмов квантового компьютинга, для построения протоколов квантовой криптографии и для других приложений квантовых свойств сложных систем [5-9].

Такое же важное значение запутанность имеет для анализа реальных физических и физико-химических систем [10]. Из неравенства (1) следует, что если сложная физическая или химическая система *AB* не может быть описана как простое объединение подсистем, то при ее образовании действуют «правила отбора», выделяющие запутанные состояния объединенной системы. Примером таких правил отбора являются «спиновые правила отбора», управляющие образованием диамагнитных молекул (частиц в синглетных запутанных спиновых состояниях) из свободных радикалов (частиц с некоррелированными электронными спинами), аннигиляция триплетных экситонов в молекулярных кристаллах и другие спинзависимые процессы [11].

Перспективы применения спина электрона в качестве носителя информации в спинтронике, квантовых вычислений и квантовой криптографий [12-14] требуют знания спиновых состояний многофермионных систем, например, спиновых состояний ансамбля электронов в полупроводниках, сверхпроводниках и спиновой жидкости. Однако, чтобы использовать спины электронов в качестве носителей квантовой информации, их необходимо «извлечь» из ансамбля неразличимых частиц. Например, в полупроводниках для перевода электронов в зону проводимости необходимоих извлечь из ансамбля электронов валентной зоны. Поэтому вместе с проблемой запутанности спиновых состояний больших ансамблей фермионов существует и проблема спиновой запутанности различных подсистем. Другая важная проблема – это проблема экспериментальной регистрации запутанности или ее экспериментальной верификации.

Квантовая запутанность и нелокальные корреляции в многоспиновых системах

Физические свойства многоспиновых состояний неразличимых фермионов, например электронов, описываемые матрицей плотности ρ^N [15], позволяют предсказывать результаты экспериментов (по крайней мере, гипотетических), представляющих интерес, как для общей теории запутанности, так и для квантовой информатики. Примером такого является мысленный эксперимент Эйнштейна, Подольского и Розена (ЭПР-эксперимент) [16]. Анализ экспериментов подобного рода часто использовался для анализа фундаментальных проблем квантовой механики, например, для проверки выполнения неравенств Белла [17].

В общем виде для систем, в которых отсутствуют нелокальные корреляции физических величин *Q, R, S* и *T*, неравенство Белла выглядит следующим образом

$$\langle QS\rangle+\langle RS\rangle+\langle RT\rangle-\langle QT\rangle\le 2 \qquad (1)$$

где $\langle QS\rangle$ – среднее значение произведения нормированных величин *Q* и *S*. Нарушение неравенства Белла при некоторых параметрах системы будет означать наличие в системе нелокальных корреляций, свидетельствующих о наличии запутанных состояний.

Следуя схеме эксперимента, описанного в [18], рассмотрим следующую ситуацию. Из ансамбля *N* фермионов выбивается одна из неразличимых частиц так быстро, что ее спин не успевает измениться и это спиновое состояние анализируется наблюдателем с помощью двух приборов *Q* и *R* (например, ячейками Мотта). Спиновое состояние оставшейся составной частицы, содержащей *N*-1 фермионов, детектируется другим наблюдателем с помощью аналогичных приборов *S* и *T*.

Измеряемыми величинами в приборах *Q* и *R* будем считать удвоенные проекции спина одного фермиона, операторы которых

$$Q=\sigma_Z^A,\ R=\sigma_X^A$$

где σ_Z^A, σ_X^A есть проекции спина частицы *A* на оси Z и X.

Аналогично второй наблюдатель с помощью анализаторов *S* и *T* измеряет удвоенные проекции спина составной частицы на направления, повернутые относительно осей Z и X,

$$S=2^{-1/2}(-\Theta_Z^B-\Theta_X^B),\ T=2^{-1/2}(\Theta_Z^B-\Theta_X^B),$$

где $\Theta_{Z,X}^B=\sum_{i=2}^{N}\sigma_{Z,X}^i$ – удвоенные проекции спина составной частицы на оси Z и X.

Подставив набор наблюдаемых величин в левую часть неравенства Белла (14), получим

$$\left|\sqrt{2}Tr(\sigma_Z^A\Theta_Z^B+\sigma_X^A\Theta_X^B)\rho_N\right|=$$

$$=\left|\sqrt{2}Tr(\sigma_Z^1\sum_{i=2}^{N}\sigma_Z^i+\sigma_X^1\sum_{i=2}^{N}\sigma_X^i)\rho_N\right|=$$

$$=2^{1/2}\left|Tr\left\{\left(\sum_{i=2}^{N}\sigma_Z^1\sigma_Z^i\right)\rho_N\right\}+Tr\left\{\left(\sum_{i=2}^{N}\sigma_X^1\sigma_X^i\right)\rho_N\right\}\right|=$$

$$=2^{1/2}\left|\sum_{i=2}^{N}Tr\left\{\left(\sigma_Z^1\sigma_Z^i\right)\rho^{1i}\right\}+\sum_{i=2}^{N}Tr\left\{\left(\sigma_X^1\sigma_X^i\right)\rho^{1i}\right\}\right|. \qquad (2)$$

Очевидно, что для расчета двухчастичных корреляторов для всех пар эквивалентных фермионов вместо полной матрицы плотности ρ^N достаточно двухчастичной матрицы плотности ρ^{1i}, описывающей коллективное спиновое состояние первого и любого другого *i*-го фермиона

$$\rho^{1i}=4^{-1}\frac{(N+2)}{(N-1)}|S_{1i}\rangle\langle S_{1i}|+$$

$$+4^{-1}\frac{(N-2)}{(N-1)}(|T_{1i}^{+}\rangle\langle T_{1i}^{+}|+|T_{1i}^{0}\rangle\langle T_{1i}^{0}|+|T_{1i}^{-}\rangle\langle T_{1i}^{-}|). \qquad (3)$$

Подставляя ρ^{1i} в выражение (2), окончательно получим

$$\langle QS\rangle+\langle RS\rangle+\langle RT\rangle-\langle QT\rangle=2^{1/2}\left|\sum_{i=2}^{N}Tr\left\{\left(\sigma_Z^1\sigma_Z^i\right)\rho^{1i}\right\}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{N}Tr\left\{\left(\sigma_X^1\sigma_X^i\right)\rho^{1i}\right\}\right|=2\sqrt{2}>2. \qquad (4)$$

Сравнение результата расчета (4) с неравенством Белла (1) доказывает его нарушение. Видно, что неравенство Белла нарушается максимально, так же как и для запутанного двухчастичного синглетного спинового состояния. Очевидно, что результат (4) не зависит от количества фермионов $N>2$ в изначальной системе. Этот строгий математический результат подтверждает, что распад сложной синглетной частицы на два фрагмента со спинами S = 1/2 аналогичен распаду двухэлектронной системы, находящейся в запутанном синглетном состоянии.

Рассмотрим теперь случай двухэлектронной ионизации, при которой происходит выбивание двух электронов из многоэлектронного атома или одновременный перевод двух электронов из валентной зоны в зону проводимости в полупроводнике. В предыдущей работе [15] было показано, что квантовые состояния двухспиновых подсистем не запутаны, и, следовательно, это должно проявиться в результатах ЭПР-экспериментов.

В этом случае измеряемыми величинами будут

$$Q=\sigma_Z^1,\ R=\sigma_X^1,\ S=\frac{-\sigma_Z^2-\sigma_X^2}{\sqrt{2}},\ T=\frac{\sigma_Z^2-\sigma_X^2}{\sqrt{2}}$$

Подставляя эти операторы в двухспиновую матрицу плотности ρ^{12} влевую часть выражения (14), окончательно получим

$$\langle QS\rangle+\langle RS\rangle+\langle RT\rangle-\langle QT\rangle=$$

$$=2^{1/2}\left|Tr\left\{\left(\sigma_Z^1\sigma_Z^2\right)\rho^{12}\right\}+Tr\left\{\left(\sigma_X^1\sigma_X^2\right)\rho^{12}\right\}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{N-1}. \quad (5)$$

Очевидно, что для любых ансамблей фермионов (электронов) с N > 2 выполняются неравенства Белла (1), что подтверждает отсутствие запутанности в двухфермионных подсистемах.

Здесь следует отметить важное различие двух синглетных систем: двухспиновой и многоспиновой. В обоих случаях системы запутаны, но во втором случае спин вылетевшего электрона не запутан ни с одним из оставшихся электронных спинов, однако запутан с полной оставшейся многоспиновой системой.

Заключение

Для многоспинового аналога эксперимента Эйнштейна-Подольского-Розена доказано нарушение неравенства Белла. Это доказывает существование квантовых нелокальных корреляции и запутанность спиновых состояний вылетевшего электрона с остальной частью исходной многоспиновой системы. Однако, спиновые состояния любой пары электронов многоспиновой системы не запутано. Эти результаты имеют принципиальное значение для будущих попыток построения квантовых компьютеров на спиновых состояниях электронов, являющихся подсистемой большого ансамбля.

22.05.2013

Список литературы:

1. Schliemann J., Cirac I., Lewenstein M., and Loss D. Quantum correlations in two-fermion systems // Phys. Rev. A. – 2001. – V. 64. – №022303
2. Eckert K., Schliemann J., BrussD. and Lewenstein M. Quantum Correlations in Systems of Indistinguishable Particles // Annals of Physics – 2002. –V. 88. – №299
3. Amico L., Fazio L., Osterloh A. andVedral V. Entanglement in many-body systems // Rev. Mod. Phys. – 2001. –V. 80. – №517.
4. Buscemi F., Bordone P. and Bertoni A. Linear entropy as an entanglement measure in two– fermion systems // Phys. Rev. A – 2007. –V. 75. – №032301
5. Zutic I., Fabian J., and Sarma S. D. Spintronics: Fundamentals and applications// Rev. Mod. Phys. – 2004. –V.76. – №323
6. Валиев К.А., Кокин А. А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность. М.: Регулярная и хаотическая динамика. – 2004. – 320 с.
7. Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления. М.: МЦНМО. – 1999. – 192 с.
8. Cirac J., Zoller P. Quantum Computations with Cold Trapped Ions// Phys. Rev. Lett. – 1995. – V. 74. – №20.
9. КилинС. Я.Квантовая информация // Успехи физ. наук. – 1999– Т.169– №5. – С. 507–527.
10. Арифуллин М. Р., Бердинский В. Л. Спиновые состояния мультиэлектронных систем и действие мультиспиновых запретов // Журнал физической химии. – 2013. – Т.87. – №7. – С. 1208-1212.
11. Зельдович Я.Б., Бучаченко А.Л., Франкевич Е.Л. Магнитно-спиновые эффекты в химии и молекулярной физике // Успехи физ. наук. – 1988. – Т.155. – №1. – С. 3–45.
12. Nielsen M. A., Chuang I. L. Quantum Computation and Information. Cambridge: Univ. Press. – 2000. – P. 700.
13. Bouwmeester D., Ekkert A.and Zeilinger A. The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computations. Berlin: Springer-Verlag. – 2000. – 314 c.
14. Hanson R., Kouwenhoven L. P., Petta J. R., Tarucha S., Vandersypen L. M. K. Spins in few-electron quantum dots // Rev. Mod. Phys. – 2006. – V. 79. – №4.
15. Арифуллин М. Р., Бердинский В. Л. Квантовая запутанность спиновых состояний неразличимых фермионов // Вестник ОГУ. – 2013. – №.8.
16. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Phys. Rev. – 1935. – V.47. – №10.
17. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., and Holt R. A. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V. 23. – №880.
18. Aspect A., Grangier P., Roger G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V.49. – P. 91-94

Сведения об авторе:
Арифуллин Марсель Равшанович, ассистент кафедры физики конденсированного состояния Оренбургского государственного университета, e-mail: arifullinm@.mail.ru
Бердинский Виталий Львович, заведующий кафедрой физики конденсированных сред Оренбургского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, тел. (3532) 360361, e-mail: bvl@unpk.osu.ru

UDC 539.1.01
Arifullin M.R., Berdinskiy V. L.
Orenburg state university, e-mail: arifullinm@mail.ru
NONLOCAL CORRELATIONS OF INDISTINGUISHABLE FERMIONS MULTISPIN STATES
Any large system of N fermions, such as electrons with spin S = 1/2, the spin state of any particle are shown to be entangled with the other part of the system containing N-1 particle. However, the spin state of this electron is not entangled with any other particle, and spin state of any electron pair is not entangled. These properties of spin states manifest in the Einstein-Podolsky-Rosen as confirmation or violation of the Bell inequalities indicating the presence of non-local quantum spin correlations.
Keywords: quantum entanglement, density matrix, Pauli's principle, quantum correlations

Bibliography:
1. Schliemann J., Cirac I., Lewenstein M., and Loss D. Quantum correlations in two-fermion systems // Phys. Rev. A. – 2001. –V. 64. – №022303
2. Eckert K., Schliemann J., Bruss D. aAnd Lewenstein M. Quantum Correlations in Systems of Indistinguishable Particles // Annals of Physics – 2002. –V. 88. – №299
3. Amico L., Fazio L., Osterloh A. and Vedral V. Entanglement in many-body systems // Rev. Mod. Phys. – 2001. –V. 80. – №517.
4. Buscemi F., Bordone P. and Bertoni A. Linear entropy as an entanglement measure in two– fermion systems // Phys. Rev. A – 2007. –V. 75. – №032301
5.Zutic I., Fabian J., and Sarma S. D. Spintronics: Fundamentals and applications // Rev. Mod. Phys. – 2004. –V.76. – №323
6.Valiev K. A., Kokin A. A. Quantum Computers: Hopes and Reality. M.: Regular and Chaotic Dynamics. – 2004. – 320 p.
7. Kitaev A., Shen A., Vayliy M. Classical and quantum computing. M. MCCME. – 1999. – 192 p.
8. Cirac J., Zoller P. Quantum Computations with Cold Trapped Ions // Phys. Rev. Lett. – 1995. – V. 74. – №20.
9. Kilin S. Ya. Quantum Information // Physics-Uspekhi. – 1999– V.169– №5. – pp. 507–527.
10. Arifullin M. R., Berdinskii V. L. Spin States of Multielectron Systems and the Action of Multi-Spin Bans // Russian Journal of Physical Chemistry A, 2013, Vol. 87, No. 7, pp. 1186–1190.
11. Zel'dovich Ya. B., Buchachenko A. L., Frankevich E. L. Magnetic-spin effects in chemistry and molecular physics // Physics-Uspekhi. – 1988. – V.155. – №1. – pp. 3–45.
12. Nielsen M. A., Chuang I. L. Quantum Computation and Information. Cambridge: Univ. Press. – 2000. – P. 700.
13. Bouwmeester D., Ekkert A.and Zeilinger A. The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computations. Berlin: Springer-Verlag. – 2000. – 314 c.
14. Hanson R., Kouwenhoven L. P., Petta J. R., Tarucha S., Vandersypen L. M. K. Spins in few-electron quantum dots // Rev. Mod. Phys. – 2006. – V. 79. – №4.
15. Arifullin M. R., Berdinskii V. L Quantum entanglement of spin states of indistinguishable Fermions // Vestnik OSU. – 2013. – №.8.
16. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Phys. Rev. – 1935. – V.47. – №10.
17. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., and Holt R. A. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V. 23. – №880.
18. Aspect A., Grangier P., Roger G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V.49. – P. 91-94