УДК 539.1.01

Арифуллин М.Р., Бердинский В.Л.
Оренбургский государственный университет
E-mail: arifullinm@mail.ru

КВАНТОВАЯ ЗАПУТАННОСТЬ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ НЕРАЗЛИЧИМЫХ ФЕРМИОНОВ

Построены спиновые матрицы плотности системы, состоящей из произвольного четного числа N неразличимых фермионов со спином S=1/2, описываемых антисимметричной полной волновой функцией. Доказано, что неразличимость частиц и принцип Паули однозначно определяют спиновые состояния, спиновые корреляции и запутанность спиновых состояний фермионов. Увеличение числа частиц в многофермионной системе уменьшает корреляции между спинами любой пары фермионов. Показано, что в полной запутанной системе N электронов спиновое состояние любой пары не запутано и является некогерентной суперпозицией синглетного и триплетных состояний.

Ключевые слова: квантовая запутанность, матрица плотности, принцип Паули, квантовые корреляции

Введение

Фундаментальная характеристика фермионов – спин S=1/2, так же как и заряд, определяет не только индивидуальные, но и коллективные свойства системы, например, симметрию многофермионной волновой функции и статистические свойства ансамбля. Перспективы применения спина электрона в качестве носителя информации в спинтронике, квантовых вычислений и квантовой криптографий [1-2] требуют знания спиновых состояний многофермионных систем, например, спиновых состояний ансамбля электронов в полупроводниках, сверхпроводниках и спиновой жидкости. Однако, чтобы использовать спин электрона в качестве носителя квантовой информации, его необходимо "извлечь" из ансамбля неразличимых частиц. Если этот процесс происходит достаточно быстро, то электронный спин не успеет изменить свое состояние и, следовательно, будет нести "память" о своем пребывании в большом ансамбле. Поэтому необходимо знание состояний многоспиновых систем и, в частности, запутанности таких состояний.

Запутанность – важная характеристика квантовых состояний, необходимая для создания алгоритмов квантовых вычислений и разработки протоколов квантовой криптографии [3-4]. Это обстоятельство, с одной стороны, определило активное, главным образом, теоретическое изучение запутанности, а с другой, – оттеснило на задний план важное значение запутанности квантовых состояний для описания свойств реальных физических систем и физических процессов. Это «физическое» значение запутанности квантовых состояний однозначно следует из основного свойства матрицы плотности запутанных систем [5]

$$\rho^{AB} \neq \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B , \qquad (1)$$

где ρ^A и ρ^B матрицы плотности подсистем. Это неравенство означает, что матрица плотности ρ^{AB} объединенной системы не может быть получена как сумма прямых произведений матриц плотности ρ^A и ρ^B и, следовательно, полную систему нельзя образовать простым соединением независимых физических подсистем. Таким образом, запутанными являются физические системы, которые нельзя образовать простым объединением невзаимодействующих подсистем. Если сложная система может быть образована из независимых подсистем, то она является незапутанной. Поэтому в образовании запутанных систем важную роль играют "правила отбора", управляющие физическими процессами, приводящими к образованию запутанных систем из независимых. Примером таких правил отбора являются спиновые правила отбора, управляющие образованием частиц в синглетных (запутанных) спиновых состояниях из предшественников с некоррелированными электронными спинами [6].

Классическим примером запутанных спиновых состояний являются белловские двухчастичные состояния [7]. Изучению запутанности посвящено большое количество работ, однако зачастую они ограничивались двухспиновыми моделями [8]; число трехспиновых моделей очень ограничено. При этом практически не изученной оставалось запутанность спиновых состоянии многофермионных систем. В литературе имеются указания на то, что многофермионная запутанность может играть важную роль в физике конденсированного состояния [9].

Информационная значимость запутанности квантовых состояний [10-11] известна и хорошо описана в литературе. Гораздо меньше внимания уделялось проблеме происхождения запутанности в реальных спиновых системах. Большинство работ, посвященных изучению разных случаев запутанности, не ставили проблему ее происхождения. Основной причиной считались взаимодействия между частицами, например, кулоновское или обменное взаимодействие [12-13]. Строго говоря, обменные взаимодействия проявляются лишь в случае сильного перекрывания волновых функций фермионов, а «реализация» обменного взаимодействия является следствием принципа Паули, требующего антисимметрии полной волновой функции фермионов ψ.

Цель данной работы – построение многоспиновых матриц плотности в виде, допускающем их обобщение на любые виды фермионов со спином $S = 1/2$, исследование свойств этих матриц и описываемых ими спиновых состояний, в частности, спиновой запутанности многофермионных систем.

Спиновые состояния многофермионной системы

Проблема запутанности квантовых состояний и запутывания в многофермионной системе привлекала много внимания в последние десятилетия и была главной целью многих исследований [16-19]. В результате многочисленных теоретических исследований выработалось общее мнение [20], что антисимметричная волновая функция ψ, которая может быть представлена в виде детерминанта Слетера, имеющая ранг равный 1, описывает незапутанные состояния. Следовательно, в простейшем случае чистое состояние двух фермионов, общая волновая функция которых представлена как определитель Слетера

$$\left|\Psi(r_1,r_2\right\rangle = 2^{-1/2}\left\{\left|\varphi_1(r_1)\right\rangle\left|\varphi_2(r_2)\right\rangle - \left|\varphi_2(r_1)\right\rangle\left|\varphi_1(r_2)\right\rangle\right\}$$

где $\left|\varphi_1(i)\right\rangle$ и $\left|\varphi_2(i)\right\rangle$ – волновые функции одночастичных ортогональных состояний, описывает незапутанное состояние. Однако, если рассматривать волновую функцию $\left|\varphi_i(r_j)\right\rangle$ каждого фермиона как произведение пространственных и спиновых частей, например, в виде $\left|\varphi_j(r_i)\right\rangle = \phi(r_i)\left|s\right\rangle$, то определитель Слетера принимает следующий вид

$$\left|\Psi(r,s)\right\rangle = 2^{-1/2}\det\left|\varphi_1(r,s)\varphi_2(r,s)\right| =$$
$$= 2^{-1/2}\det\begin{vmatrix}\phi(r_1)\left|\alpha_1\right\rangle & \phi(r_2)\left|\beta_1\right\rangle \\ \phi(r_1)\left|\alpha_2\right\rangle & \phi(r_2)\left|\beta_2\right\rangle\end{vmatrix} =$$
$$= 2^{-1/2}\left(\phi(r_1)\phi(r_2)\right)\left(\left|\alpha_1\right\rangle\left|\beta_2\right\rangle - \left|\alpha_2\right\rangle\left|\beta_1\right\rangle\right),$$

где $\left|\alpha_i\right\rangle$ и $\left|\beta_i\right\rangle$ – проекции спина $S = 1/2$ на ось OZ. Очевидно, что спиновая подсистема находится в синглетном состоянии

$$\left|S_{12}\right\rangle = (2)^{-1/2}\left|\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right\rangle,$$

которое является примером классического запутанного Белловского состояния. Этот простой пример показывает, что запутанность спиновых подсистем неразличимых фермионов требует отдельного рассмотрения, и она не всегда следует из свойств полной системы.

Для полного описания всех свойств многофермионной системы в общем случае необходимо знание полной волновой функции Ш, которая зависит от всех степеней свободы системы. Однако для описания состояний и свойств спиновой подсистемы достаточно знания редуцированной спиновой матрицы плотности *с* [14]. Далее будет показано, что для построения спиновой матрицы плотности достаточно воспользоваться основным свойством волновой функции неразличимых фермионов – ее антисимметрией относительно любых перестановок пар частиц (принцип Паули).

Известно, что любая антисимметричная функция может быть представлена в виде суперпозиции детерминантов Слетера, построенных из одночастичных волновых функций, включающих спиновые переменные отдельных фермионов. Однако в данной работе для простоты будем считать, что для описания полной системы достаточно однодетерминантной функции Слетера. Для системы N фермионов со спином $S=1/2$, характеризуемых набором $N/2$ волновых функций $\psi_1(r,s), \psi_2(r,s), ... \psi_{N/2}(r,s)$ детерминант Слетера имеет вид:

$$\left|\Psi(r,s)\right\rangle = (N!)^{-1/2}\det\left|\psi_1(r,s)\psi_2(r,s)...\psi_{N/2}(r,s)\right| \quad (2)$$

где $\psi_i(r,s) = \varphi_i(r_j)\left|s_j\right\rangle$ ($\varphi_i(r)$ – описывает пространственную часть волновой функции, а $\left|s_j\right\rangle$ – спиновую часть полной волновой функции). Спиновая матрица плотности является редуцированной матрицей плотности, которая получается взятием следа по всем неспиновым переменным исходной матрицы плотности $\rho = \left|\Psi(r_j, s_j)\right\rangle\left\langle\Psi(r_j, s_j)\right|$ полной системы.

$$\rho^N = Tr_{\varphi(r)}\left|\Psi(r_j, s_j)\right\rangle\left\langle\Psi(r_j, s_j)\right| = \\ = \sum_k \left\langle\Phi_k(r_j)\right\|\Psi(r_j, s_j)\rangle\langle\Psi(r_j, s_j)\left\|\Phi_k(r_j)\right\rangle \quad (3)$$

где векторы $\left\langle\Phi_k\right|$ – представляют собой прямые произведения пространственных волновых функции $\varphi_i(r)$ со всеми возможными размещениями фермионов. При вычислении следа в формуле (3) используется условие ортогональности пространственных одночастичных волновых функций.

После расчета детерминанта Слетера методом Лапласа и взятия следа по «пространственным» переменным спиновая матрица может быть представлена в «унифицированном» виде как сумма неортогональных проекторов на многоспиновые синглетные состояния и для системы N фермионов имеет вид:

$$\rho^N = \frac{2^{N/2}(N/2)!}{N!}\sum_P P\left(\left|S_{ij}S_{kl}S_{mn}...\right\rangle\left\langle S_{ij}S_{kl}S_{mn}...\right|\right) (4)$$

В выражении (4) сумма берется по всем возможным размещениям N частиц по $N/2$ синглетным спиновым состояниям. Оператор P – это оператор перестановок по всем парным синглетным состояниям. Количество таких слагаемых

$$2^{-N/2}N!/(N/2)!$$

в точности равно количеству всевозможных румеровских спариваний фермионов [21]. Полученное выражение (4) и представляет собой искомую спиновую матрицу плотности многофермионной системы. Оно не зависит от конкретного вида пространственных одноэлектронных волновых функций $u_i(r_j)$. Спиновая матрица плотности c^N однозначно определяется принципом неразличимости квантовых частиц и принципом Паули.

Вид оператора матрицы плотности c^N делает очевидной его симметрию относительно любых перестановок частиц. Перестановки спинов внутри одного синглетного состояния изменяют знак спинового вектора $\left|S_{ij}\right\rangle = 2^{-1/2}\left|\alpha_i\beta_j - \beta_i\alpha_j\right\rangle$, но не изменяют знак тензорного произведения $\left|S_{ij}\right\rangle\left\langle S_{ij}\right|$. Перестановки спинов между разными синглетными векторами сводятся к простой перестановке операторов проектирования. Поскольку все парные синглетные состояния инвариантны относительно вращений, то и матрица плотности c^N инвариантна относительно этих преобразований. Таким образом, показано, как из антисимметричной волновой функции Ш получается симметричная матрица плотности c^N.

Спиновые матрицы плотности двухфермионных подсистем

Спиновые состояния системы двух фермионов, например, двух электронов, являются наиболее изученным объектом теории квантовой запутанности, на котором отработаны ее основные положения и понятия. В реальных экспериментальных ситуациях система, состоящая из двух электронов, либо является подсистемой многоэлектронной системы, либо извлекается из «материнской» большой системы. Исключением являются лишь такие простые независимые двухэлектронные системы, как молекула водорода или атом гелия. Поэтому необходимо, во-первых, знать спиновые состояния реальных двухэлектронных систем, экстрагируемых из большой «материнской» системы, и, во-вторых, знать их отличия от свойств «идеальной» и хорошо изученной двухспиновой системы.

Далее будут рассматриваться двухспиновые системы, которые изначально входили в состав большого ансамбля неразличимых фермионов, находящихся в основном состоянии и описываемого матрицей плотности (1). Очевидно, что для описания всех свойств двухспиновой подсистемы достаточно знать редуцированную двухспиновую матрицу плотности c^{12}, которая определяется как след c^N по спиновым переменным «лишних» частиц. Поскольку все частицы неразличимы и эквивалентны, то далее будем брать след по переменным всех частиц с номерами $N > 2$.

$$\rho^{12} = Tr_{N-2}\left(\rho^N\right) \quad (5)$$

Для таких вычислений исходную матрицу плотности (4) удобно представить в виде суммы двух многочленов: в первом будут находиться только слагаемые, содержащие состояния $\left|S_{12}\right\rangle\left\langle S_{12}\right|$ (два спина принадлежат одному синглетному состоянию), а во втором – только слагаемые, содержащие члены $\left|S_{1k}S_{2l}\right\rangle\left\langle S_{1k}S_{2l}\right|$ (первый и второй спин образуют синглетные состояния с различными фермионами, $k,l \neq 1,2$). Количество слагаемых первого типа можно легко определить по обычным комбинаторным правилам; их число равно

$$\frac{(N-2)!}{2^{(N-2)/2}((N-2)/2)!}. \qquad (6)$$

Слагаемые первого типа дадут в искомой матрице плотности c_2 члены

$$(N-1)^{-1}\left|S_{12}\right\rangle\left\langle S_{12}\right|.$$

Таким же образом можно определить и количество слагаемых второго типа; их число равно

$$\frac{(N)!}{2^{N/2}(N)/2)!}-\frac{(N-2)!}{2^{(N-2)/2}((N-2)/2)!}. \qquad (7)$$

В искомой матрице плотности c_2 они дадут слагаемые

$$\begin{aligned}&4^{-1}(N-2)(N-1)^{-1}\Big(\left|S_{12}\right\rangle\left\langle S_{12}\right|+\left|T_{12}^{+}\right\rangle\left\langle T_{12}^{+}\right|+\\&+\left|T_{12}^{0}\right\rangle\left\langle T_{12}^{0}\right|+\left|T_{12}^{-}\right\rangle\left\langle T_{12}^{-}\right|\Big)=\\&=4^{-1}(N-2)(N-1)^{-1}I_1\otimes I_2\end{aligned} \qquad (8)$$

В результате матрица плотности ρ^{12} приводится к простому виду, описывающему некогерентную суперпозицию синглетных и триплетных состояний двух фермионов

$$\begin{aligned}&\rho^{12}=4^{-1}\frac{(N+2)}{(N-1)}\left|S_{12}\right\rangle\left\langle S_{12}\right|+\\&+4^{-1}\frac{(N-2)}{(N-1)}\Big(\left|T_{12}^{+}\right\rangle\left\langle T_{12}^{+}\right|+\left|T_{12}^{0}\right\rangle\left\langle T_{12}^{0}\right|+\left|T_{12}^{-}\right\rangle\left\langle T_{12}^{-}\right|\Big)\end{aligned} \qquad (9)$$

Соотношение синглетных и триплетных состояний зависит от общего числа фермионов N. Из этой формулы следует, что только система, состоящая из двух электронов ($N=2$), может находиться в чистом синглетном состоянии и описываться матрицей плотности $\rho=\left|S_{12}\right\rangle\left\langle S_{12}\right|$. В любых других случаях (четные $N>2$) любая подсистема, состоящая из двух неразличимых фермионов, будет находиться в спиновом состоянии, являющемся некогерентной суперпозицией синглетных и триплетных состояний.

Матрица плотности (9) позволяет находить коэффициенты корреляции r двух спинов $S=1/2$ в ансамбле произвольного четного числа фермионов

$$r=\left\langle\vec{S}_1\vec{S}_2\right\rangle=Tr\left(\vec{S}_1\vec{S}_2\rho_{12}\right)/\left(\left|\vec{S}_1\right|\cdot\left|\vec{S}_2\right|\right)=-(N-1)^{-1},$$

где $\left|\vec{S}_i\right|=\sqrt{S(S+1)}=3^{1/2}/2$. Знак минус, показывает, что вероятность обнаружить спины с антипараллельной ориентацией всегда больше вероятности обнаружить параллельные спины. В общем случае коэффициент корреляции r зависит только от числа спинов ансамбле: он достигает максимального значения для двух фермионов (N = 2) и стремится к нулю при $N\to\infty$.

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle\vec{S}_1\vec{S}_2\right\rangle=-\lim_{N\to\infty}(N-1)^{-1}=0$$

В бесконечно большой системе (при $N\to\infty$) спиновое состояние двухфермионной подсистемы описывается матрицей плотности

$$\begin{aligned}&\rho^{12}(\mathrm{N}\to\infty)=\frac{1}{4}\Big(\left|S\right\rangle\left\langle S\right|+\left|T^{+}\right\rangle\left\langle T^{+}\right|+\\&+\left|T^{0}\right\rangle\left\langle T^{0}\right|+\left|T^{-}\right\rangle\left\langle T^{-}\right|\Big)=\frac{1}{4}I_1\otimes I_2\end{aligned} \qquad (10)$$

Очевидно, что это состояние является некогерентной суперпозицией спиновых состояний двух независимых неполяризованных фермионов. Следовательно, увеличение числа частиц в многофермионнной системе приводит к уменьшению корреляции между спинами любой пары фермионов и эти корреляции полностью отсутствуют при бесконечном числе частиц.

В завершение этого раздела полезно отметить, что состояние двухспиновой подсистемы четырехфермионной системы определяется матрицей плотности

$$\begin{aligned}&\rho^{12}(N=4)=\frac{1}{2}\left|S_{12}\right\rangle\left\langle S_{12}\right|+\\&+\frac{1}{6}\Big(\left|T_{12}^{+}\right\rangle\left\langle T_{12}^{+}\right|+\left|T_{12}^{0}\right\rangle\left\langle T_{12}^{0}\right|+\left|T_{12}^{-}\right\rangle\left\langle T_{12}^{-}\right|\Big)\end{aligned} \qquad (11)$$

которая описывает незапутанное состояние и для которой известно [22] представление в виде суммы произведений матриц плотности односпиновых подсистем, явно доказывающее отсутствие запутанности.

Запутанность многоспиновых состояний фермионов

Многофермионная спиновая система, которая описывается оператором спиновой матрицы плотности (4), может быть разделена на две подсистемы произвольной размерности. Примерами физической реализацией такого разделения могут быть самопроизвольный распад типа радиоактивного распада атомных ядер или распад, инициируемый внешним воздействием, например, фотоионизация, в результате которой вылетают один или несколько электронов. Поэтому возникает вопрос, существует ли запутанность этих подсистем? Например, существует ли в полупроводниках запутанность между спиновыми состояниями валентных электронов и спиновыми состояниями электронов проводимости, возникших в результате межзонных переходов? Существует ли запутанность спиновых состояний этих электронов в зоне проводимости, обусловленная их общим происхождением из ансамбля электронов валентной зоны?

Удобным критерием запутанности является критерий Переса-Городецкого [23–24], который устанавливает связь между запутанностью и наличием отрицательных собственных значений $л_i$ частично транспонированной матрицы плотности. Согласно критерию Переса-Городецкого, для того, чтобы между двумя подсистемами *A* и *B* существовала запутанность, необходимо и достаточно, чтобы у частично транспонированной матрицы ρ^{T_B} существовало хотя бы одно отрицательное собственное значение. Однако наличие отрицательных собственных значений эквивалентно утверждению, что ρ^{T_B} уже не является матрицей плотности, а для операции частичного транспонирования матрицы плотности запутанных состояний не может быть физических реализаций.

Критерий Переса-Городецкого очень удобен при анализе конкретных простых систем. Например, для четырехспиновой системы, описываемой спиновой матрицы плотности (5) и представленной как объединение двух одинаковых двухфермионных подсистем, частично транспонированная матрица плотности ρ^{T_B} имеет отрицательные собственные значения $л_i$ = (1/2, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, -1/6, -1/6, -1/6). Если в качестве меры запутанности в соответствии с работами [25–26] принять удвоенную сумму отрицательных собственных значений, то получим

$$E = -2\sum_i(\lambda_i) = -2(-1/6 - 1/6 - 1/6) = 1.$$

Этот результат означает, что в рассматриваемой четырехспиновой системе между двухспиновыми подсистемами существует максимальная запутанность, такая же, которая существует между двумя спинами, находящимися в суммарном синглетном состоянии.

Очевидно, что критерий Переса-Городецкого трудно применить в общем виде для матриц больших размерностей [23], для которых невозможны вычисления собственных значений в аналитическом виде, например, для спиновых состояний многофермионных систем, описываемых матрицами плотности (4). Однако появление отрицательных собственных значений эквивалентно выходу матрицы ρ^{T_B} из класса положительно определенных матриц. Следовательно, для доказательства существования запутанности между подсистемами достаточно доказать нарушение положительной определенности этой матрицы [27], например, с помощью критерия Сильвестра [28]. Среди разных вариантов критерия Сильвестра самым эффективным является требование неотрицательности главных миноров матрицы ρ^{T_B}, например, главных миноров второго порядка типа

$$M = \rho_{ii}^T \rho_{jj}^T - \rho_{ij}^T \rho_{ji}^T = \rho_{ii}^T \rho_{jj}^T - \left|\rho_{ij}^T\right|^2 > 0 \quad (12)$$

Удобнее всего доказать нарушение критерия Сильвестра для матрицы ρ^{T_B}, представив исходную матрицу плотности (4) в мультипликативном базисе в виде блочной матрицы $\rho(S_z, S_z^{'})$ в полном пространстве всех возможных спиновых состояний системы *N* фермионов, где S_z и $S_z^{'}$ – значения проекции суммарного спина полной системы. Очевидно, что единственным ненулевым блоком такой «расширенной» матрицы плотности ρ^S будет блок, соответствующий значениям $S_z = 0$ и $S_z^{'} = 0$. Матричные элементы всех остальных блоков ($S_z \neq 0$ и $S_z^{'} \neq 0$) – диагональные ρ_{ii} и недиагональные ρ_{ij} – равны нулю.

Мультипликативный базис представляет собой набор ортогональных базисных векторов $|i\rangle$ и $|j\rangle$ каждый из которых является прямым произведением векторов отдельных спинов, а векторы состояния $|i\rangle$ и $|j\rangle$ могут быть представлены в виде прямых произведений векторов состояний спина каждого фермиона ($|\uparrow\rangle$ или $|\downarrow\rangle$), которые, в свою очередь, могут быть объединены в мультипликативные векторы состояний подсистем A и B произвольной размерности N_A и N_B ($N_A + N_B = N$)

$$|i\rangle = |1\rangle \otimes |2\rangle \otimes .....|N\rangle = |m_A\rangle \otimes |l_B\rangle$$

$$|j\rangle = |1'\rangle \otimes |2'\rangle \otimes .....|N'\rangle = |n_A\rangle \otimes |k_B\rangle$$

где $|m_A\rangle$ и $|n_A\rangle$ – векторы спиновых состояний подсистемы A произвольной, но одинаковой размерности, а $|l_B\rangle$ и $|k_B\rangle$ – векторы спиновых состояний подсистемы B в мультипликативном базисе. Сумма проекций спинов подсистем A и B удовлетворяют условию $S_z^A + S_z^B = 0$ для всех пар мультипликативных векторов синглетного подпространства ($|m_A\rangle, |l_B\rangle$) и ($|n_A\rangle, |k_B\rangle$). Однако состояния $|m_A\rangle$ и $|n_A\rangle$ для одной и той же подсистемы A, а также состояния $|l_B\rangle$ и $|k_B\rangle$ для подсистемы B могут отличаться значениями проекции полного спина $S_z(m_A) \neq 0$ и $S_z(l_B) \neq 0$., а также $S_z(l_B) \neq S_z(k_B)$. Более того, такие различные векторы обязательно присутствуют в полных наборах спиновых векторов подсистем A и B. Это обстоятельство можно легко показать на примере шестиспиновой системы (N =6). Например,

$$|p\rangle = |m_A\rangle \otimes |l_B\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle_B$$

и

$$|q\rangle = |n_A\rangle \otimes |k_B\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle_B.$$

Частичная транспозиция исходной шестиспиновой матрицы плотности, записанной в мультипликативном базисе матрицы, сводится к перестановке векторов $|l_B\rangle \Leftrightarrow |k_B\rangle$. При этом спиновые векторы полной системы перейдут в новые векторы

$$|p\rangle \Rightarrow |p'\rangle = |m_A\rangle \otimes |k_B\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle_B$$

и

$$|q\rangle \Rightarrow |q'\rangle = |n_A\rangle \otimes |l_B\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle_B.$$

с полным спином $S = 3$ и проекциями $S_z = \pm 3$.

В мультипликативном базисе все слагаемые оператора матрицы плотности (4) имеют вид

$$\rho_{ij}|i\rangle\langle j| = \rho_{ij}|m_A l_B\rangle\langle n_A k_B|\ .$$

Для оператора частично транспонированной матрицы ρ^{T_B} они переходят в слагаемые

$$\rho_{i'j'}^T|i'\rangle\langle j'| = \rho_{ij}|m_A k_B\rangle\langle n_A l_B|\ .$$

Очевидно, что при такой операции диагональные элементы не изменяются и

$$\rho_{i'i'}^T|i'\rangle\langle i'| = \rho_{ii}|m_A k_B\rangle\langle m_A k_B| = \rho_{ii}|i\rangle\langle i|\ .$$

Однако изменяются недиагональные матричные элементы, в частности, в блоках с $S_z \neq 0$ появляются ненулевые элементы $\rho_{i'j'}^T \neq 0$, но при этом остаются неизменными соответствующие им нулевые диагональные элементы $\rho_{i'i'}^T = 0$ и $\rho_{j'j'}^T = 0$. Поэтому среди главных миноров матрицы ρ^{T_B} обязательно найдутся отрицательные

$$M = \rho_{ii}^T \rho_{ii}^T - \rho_{ij}^T \rho_{ji}^T = -\left|\rho_{ji}^T\right|^2 < 0, \quad (13)$$

что доказывает нарушение критерия неотрицательности матрицы ρ^{T_B}. Следовательно, среди собственных чисел матрицы ρ^{T_B} найдется хотя бы одно отрицательное собственное число $\lambda < 0$ и, согласно критерию Переса-Городецкого, исходная спиновая матрица плотности (4) описывает запутанные спиновые состояния. В виду произвольности разбиения системы на подсистемы A и B любые подсистемы окажутся запутанными.

Заключение

Доказано, что принцип неразличимости частиц и принцип Паули однозначно определяют спиновые состояния фермионов, их спиновые корреляции и запутанность их спиновых состояний. Состояния спиновой подсистемы фермионов описываются спиновой матрицей плотности, которая представима в виде суммы неортогональных проекторов на всевозможные многоспиновые синглетные состояния.

На примере четырехфермионной системы показано, что в многочастичных запутанных системах могут быть незапутанные подсистемы: 4-х спиновая система максимально запутана, 3-х спиновая подсистема частично запутана, двухфермионная спиновая подсистема не запутана и не может быть в чистом синглетном состоянии. Доказано, что матрица плотности ρ описывает запутанные состояния, если для частично транспонированной матрицы ρ^T нарушается условие неотрицательности и оказывается, что для некоторых элементов $\rho_{ij}^T \rho_{ji}^T > \rho_{ii}^T \rho_{jj}^T$, то есть нарушается критерий Сильвестра (требование неотрицательности главных миноров матрицы ρ^{T_B}). Увеличение числа частиц в многофермионной системе приводит к уменьшению корреляции между спинами любой пары фермионов и эти корреляции полностью отсутствуют при бесконечном числе частиц.

22.05.2013

Список литературы:

1. *Zutic I., Fabian J., and Sarma S. D.* Spintronics: Fundamentals and applications // Rev. Mod. Phys. – 2004. –V.76. – № 323
2. *Валиев К.А., Кокин А. А.* Квантовые компьютеры: надежды и реальность. М.: Регулярная и хаотическая динамика. – 2004. – 320 с.
3. *Китаев А., Шень А., Вялый М.* Классические и квантовые вычисления. М.: МЦНМО. – 1999. – 192 с.
4. *Cirac J., Zoller P.* Quantum Computations with Cold Trapped Ions // Phys. Rev. Lett. – 1995. – V. 74. – № 20.
5. *Килин С. Я.* Квантовая информация // Успехи физ. наук. – 1999. – Т. 169 – № 5. – С. 507–527.
6. *Зельдович Я.Б., Бучаченко А.Л., Франкевич Е.Л.* Магнитно-спиновые эффекты в химии и молекулярной физике // Успехи физ. наук. – 1988. – Т.155. – №1. – С. 3–45.
7. *Bouwmeester D., Ekkert A.and Zeilinger A.* The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computations. Berlin: Springer-Verlag. – 2000. – 314 c.
8. *Wang X. and Zanardi P.* Quantum entanglement and Bell inequalities in Heisenberg spin chains // Phys.Rev. Lett. A – 2002. – V. 301. – P. 1-6.
9. *Lunkes C., Brukner C., Vedral V.* Natural multiparticle entanglement in a Fermi gas // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. 95. – № 030503.
10. *Nielsen M. A., Chuang I. L.* Quantum Computation and Information. Cambridge: Univ. Press. – 2000. – P. 700.
11. *Валиев К.А.* Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Успехи физ. наук. – 2005. – Т.175. – №1. – С. 3–39.
12. *Vedral V.* Entanglement in the Second Quantization Formalism // Central Eur. J. Phys. – 2003. – V. 1. – P. 289-306.
13. *Oh S. and Kim J.* Entanglement of electron spins of noninteracting electron gases // Phys. Rev. A – 2004. –V. 69. – № 054305
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука – 1974. – 754 с.
15. *Блум К.* Теория матрицы плотности и ее приложения. М.: Мир. – 1983. – 248 с.
16. *Schliemann J., Cirac I., Lewenstein M., and Loss D.* Quantum correlations in two-fermion systems // Phys. Rev. A. – 2001. – V. 64. – № 022303
17. *Eckert K., Schliemann J., Bruss D. and Lewenstein M.* Quantum Correlations in Systems of Indistinguishable Particles // Annals of Physics – 2002. –V. 88. – № 299
18. *Amico L., Fazio L., Osterloh A. and Vedral V.* Entanglement in many-body systems // Rev. Mod. Phys. . – 2081. –V. 80. – № 517.
19. *Buscemi F., Bordone P.and Bertoni A.* Linear entropy as an entanglement measure in two– fermion systems // Phys. Rev. A – 2007. –V. 75. – № 032301
20, *Zander C., Plastino A. R., Casas M., Plastino A.* Entropic entanglement criteria for Fermion systems // The European Physical Journal D – 2012. – V. 66 – № 14
21. *Румер Ю. Б., Фет А. И.* Теория унитарной симметрии. М.: Наука – 1970. – 400 с.
22. *Алдошин С. М., Фельдман Э. Б.и Юрищев М. А.* Квантовая запутанность в нитрозильных комплексах железа // ЖЭТФ. – 2008. – Т.134. – С.940.
23. *Peres A.* Separability Criterion for Density Matrices // Phys. Rev. Lett. – 1996. – V. 77. – №1413.
24. *Horodecki M., Horodecki P.and Horodecki R.* Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions // Phys. Lett. A. – 1996. – V. 223. – 1
25. *Vidal G. and Werner R. F. A.* Computable measure of entanglement // Phys. Rev. A. – 2002. – V. 65. – №032314
26. *Nielsen M.A.* Conditions for a class of entanglement transformations // Phys. Rev. Lett. – 1999. – V. 83. – № 436.
27. *Белоусов Ю. М., Манько В. И.* Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике. М.: МФТИ – 2004. – 163 с.
28. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц М.: Наука – 1966. – 576 с.

Сведения об авторе:

Арифуллин Марсель Равшанович – ассистент кафедры физики конденсированного состояния Оренбургского государственного университета, e-mail: arifullinm@.mail.ru

Бердинский Виталий Львович – заведующий кафедрой физики конденсированных сред Оренбургского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

460018, г. Оренбург, пр-т Победы 13, Физический факультет, кафедра ФКС, 8(3532)360361, e-mail: bvl@unpk.osu.ru

UDC 539.1.01
Arifullin M. R., Berdinsky V. L.
E-mail: arifullinm@mail.ru

QUANTUM ENTANGLEMENT OF SPIN STATES OF INDISTINGUISHABLE FERMIONS

Spin density matrices of the system, containing arbitrary even number N of indistinguishable fermions with spin S = 1/2, described by antisymmetric wave function, have been calculated. The indistinguishability and the Pauli principles are proved to determine uniquely spin states, spin correlations and entanglement of fermion spin states. Increase of the particle number in the multifermion system reduces the spin correlation in any pair of fermions. The fully entangled system of N electrons are shown to be composed by pairs with nonentangled spin states that is the incoherent superposition of the singlet and triplet states.

Keywords: quantum entanglement, density matrix, Pauli’s principle, quantum correlations