УДК 51(091)

Шухман Е.В.
Оренбургский государственный педагогический университет
E-mail: shukhman.elena@gmail.com

НЕДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ В РАБОТАХ Г.В. ЛЕЙБНИЦА И Л. ЭЙЛЕРА

В статье проведен сравнительный анализ результатов Г.В. Лейбница и Л. Эйлера, связанных с недесятичными дробями. Изучение опубликованных работ, переписки и неопубликованных рукописей показало, что Г.В. Лейбниц впервые исследовал двоичные дроби и попытался их применить для изучения трансцендентных чисел. Однако, он не добился значительных успехов, потому что не использовал эффективный метод для перевода дробных чисел в двоичную систему счисления. Л. Эйлер владел методом перевода дробных чисел, аналогичным современному, и успешно применял двоичные представления дробей для вычисления сумм рядов и бесконечных произведений.

Ключевые слова: история математики, недесятичные дроби, Готфрид Вильгельм Лейбниц, Леонард Эйлер.

История недесятичных позиционных систем счисления вызывает интерес в связи с их широким использованием в теоретической информатике и вычислительной технике. Системы счисления выступали предметом исследования и инструментом для решения различных задач в трудах многих математиков, но далеко не все результаты были опубликованы. Поэтому полная картина раннего периода развития этой области математики стала проясняться только в последние десятилетия после публикации архивных материалов: рукописей и переписки математиков XVII-XVIII вв. Так, до середины XX века основоположником двоичной арифметики заслуженно считался Готфрид Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716), опубликовавший свои результаты [1] в 1703 г. Однако в 1951 г. Дж. Ширли представил заметку [2] о том, что английский математик Томас Хэрриот (Thomas Harriot, 1560–1621) применял двоичную систему в своих рукописях задолго до Г.В. Лейбница. До последнего времени оставались неизвестными широкому кругу исследователей достижения Леонарда Эйлера (Leonhard Euler, 1707–1783), рассмотренные в наших предыдущих статьях [3], [4]. В настоящей статье впервые проведен сравнительный анализ результатов Г.В. Лейбница и Л. Эйлера, связанных с двоичными дробями.

Впервые двоичную арифметику Г.В. Лейбниц исследует в рукописи «De Progressione Dyadica» («О двоичной прогрессии», 15(25) марта 1679 г.), первая часть которой опубликована в сборнике [5]. В начале этого мемуара Г.В. Лейбниц рассматривает принцип двоичной записи целых чисел, приводит двоичное представление натуральных чисел от 1 до 100, а также рассматривает алгоритм перевода целого числа в двоичную систему счисления путем многократного деления на два с выписыванием остатков как двоичных цифр. После этого в рукописи приводятся правила выполнения арифметических действий и примеры сложения, вычитания, умножения и деления с остатком целых чисел в двоичной системе счисления. В конце первой части Г.В. Лейбниц указывает, что операции с двоичными числами можно реализовать с помощью специальной вычислительной машины и кратко описывает ее возможное устройство.

В статье Г. Лаутца [6] приводится очень краткое описание и фотография первой страницы неопубликованной второй части работы Г.В. Лейбница «De Progressione Dyadica. Pars 2» («О двоичной прогрессии. Часть 2»). Г. Лаутц пишет, что в этой работе Г.В. Лейбниц делает неудачную попытку выражения $\pi/4$ в двоичной системе счисления, а также исследует применение двоичной системы для упрощения решения диофантовых уравнений, изучения свойств простых чисел и нахождения приближенных выражений трансцендентных чисел. К сожалению, вторая часть основополагающей работы Г.В. Лейбница до сих пор остается неопубликованной, подробный разбор применений двоичных дробей в трудах Г.В. Лейбница не производился.

Статья Г.В. Лейбница [1], вышедшая в 1703 году, стала первой публикацией по теме двоичной арифметики в научном журнале. С математической точки зрения в этой статье Г.В. Лейбниц излагает очень мало результатов. Он даже не приводит алгоритмы перевода в двоичную систему и обратно для целых чисел. Г.В. Лейбниц отмечает исключительную простоту действий над двоичными числами, отсутствие необходимости использования таблиц сложения и умножения. Он также пишет о закономерностях в чередовании двоичных цифр в числах, образующих арифметическую прогрессию. Двоичные дроби в статье не упоминаются.

Наиболее полно работы Г.В. Лейбница по двоичной системе счисления рассмотрены в сборнике Г. Захера [7]. Кроме подробного обзора результатов Г.В. Лейбница, а также перечня его работ, связанных с двоичной системой счисления, в сборнике приведено 28 оригинальных текстов ученого, в том числе 23 письма из переписки Г.В. Лейбница (включая ответные) и 5 отдельных работ. Но в этих текстах двоичные дроби упоминаются только в переписке, на уровне постановки проблемы, прежде всего, для вычисления отношения длины окружности к ее диаметру (известного нам как число π), которое Г.В. Лейбниц называл формулой (или числом) Лудольфа ван Цейлена (Ludolph van Ceulen, 1540-1610), вычислившего в 1596 г. его значение с точностью до 35 знаков в дробной части.

Возможно, впервые применять двоичную арифметику для вычисления длины окружности Г.В. Лейбниц предлагает в письме от 26 июня 1701 г. [8] к швейцарскому математику Якобу Герману (Jacob Hermann, 1678 – 1733), который в 1725 г. стал первым академиком-математиком Российской Академии наук. Далее, в письме от 2-3 апреля 1703 г. к иезуиту-миссионеру Иоахиму Буве (Joachim Bouvet, 1656–1730), работавшему в Китае [9], Г.В. Лейбниц обсуждает возможные применения двоичной арифметики при «выражении несоизмеримых геометрических величин с помощью серий целых чисел, приближающихся к бесконечности; чего не достает (в качестве примера) формуле круга Лудольфа ван Цейлена, где отсутствует правило, чтобы ее продолжать».

В письме от 23 июня 1705 г. к французскому математику, проживавшему в Голландии, Сезару Казе (César Caze, 1641–1719) Г.В. Лейбниц предполагает, что «основное применение двоичной арифметики возможно для усовершенствования геометрии для оценки значений определенных бесконечных рядов: тех, которые мы обычно используем, но не определенных точно» [7]. Он считает, что при выражении иррациональных величин запись цифр не повторяется, однако они подчиняются определенному закону, который очень сложно узнать.

Снова задачу записи числа π в двоичной системе счисления Г.В. Лейбниц ставит в переписке со швейцарским математиком Якобом Бернулли (Jakob Bernoulli, 1654—1705). В письме от 28 ноября 1704 г. [10] Г.В. Лейбниц утверждает, что применение двоичной арифметики – лучший способ для отыскания общего правила вычисления цифр в трансцендентных числах, таких как число Лудольфа. Очень интересно ответное письмо Я. Бернулли от 28 февраля 1705 г. [10] Я. Бернулли выражает сомнение в том, что для последовательностей или трансцендентных чисел, не имеющих периода в десятичной записи, обязательно найдется общий закон вычисления двоичных цифр. Я. Бернулли берет известные 36 цифр числа π (полученные Л. ван Цейленом), не учитывая при этом десятичную запятую, и переводит полученное 36-значное целое число в двоичную систему счисления по правилу перевода целых чисел, получая 118-значное двоичное число:

1111001000000100111111011001100011011011
01100 1100001001111001001011001010110110
1101010001101110010101000000001111010000

Заменяя повторяющиеся последовательности нулей и единиц на количество повторений, Я. Бернулли записывает полученный результат в сокращенном виде

42161261222321212122224124212 11
2211112121211113213211111174114

и делает вывод, что ни периода, ни закона получения последовательности цифр найти не удалось.

В ответном письме, написанном в апреле 1705 г. [10], Г.В. Лейбниц пишет, что выводы Я. Бернулли слишком поспешные. В двоичной записи Лудольфова числа цифры не будут периодически повторяться, но Г.В. Лейбниц не сомневается в существовании более сложного закона их получения. Г.В. Лейбниц утверждает, что, вероятно, такой закон существует и для десятичной записи, но для двоичной записи, которая является наиболее простой, такой закон обнаружить значительно проще. К сожалению, обсуждение двоичной системы счисления в переписке Г.В. Лейбница и Я. Бернулли прервалось в связи с кончиной Я. Бернулли в августе 1705 г.

Для более полной оценки результатов Г.В. Лейбница необходимо исследование его рукописей из архива в г. Ганновере, хранящего более 225000 страниц. В электронном каталоге рукописей Г.В. Лейбница [11] представлено около 80 наименований заметок, судя по названию папки, заголовку, или начальным словам, связанных с двоичной системой счисления. Из них к настоящему моменту опубликовано только восемь. Все упомянутые рукописи относятся к отделу LH XXXV архива, включающему математические рукописи [12]. Внутри отдела для точной идентификации листа будем указывать название папки, номер документа в папке и номер листа в папке, как это было введено Эдуардом Бодеманном (Eduard Bodemann, 1827–1906), который в конце XIX в. провел систематизацию рукописей Г.В. Лейбница и издал их краткое описание [13].

В настоящей статье мы представляем только предварительные результаты исследования рукописей Г.В. Лейбница, выполненного на основе копий с микроформ, поскольку полная расшифровка пока не производилась. Уже беглый просмотр указанных рукописей позволил установить, что Г.В. Лейбниц неоднократно использовал двоичные дроби.

Так, в уже упомянутой рукописи «De Progressione Dyadica. Pars 2» («О двоичной прогрессии. Часть 2», IIIb, 2, л. 3об.-4об.) на л. 4 он приводит значения двоичных дробей:

$$\frac{1}{2}\,aqu.\frac{1}{10}\,aqu.\ 010000\ etc.$$
$$\frac{1}{3}\,aqu.\frac{1}{11}\,aqu.\ 00101010\ etc.$$
$$\frac{1}{4}\,aqu.\frac{1}{100}\,aqu.\ 00100000\ etc.$$
$$\frac{1}{5}\,aqu.\frac{1}{101}\,aqu.\ 000110011001100\ etc.$$
$$\frac{1}{6}\,aqu.\frac{1}{110}\,aqu.\ 00010101010\ etc.$$
$$\frac{1}{7}\,aqu.\frac{1}{111}\,aqu.\ 0001001001001\ etc.$$
$$\frac{1}{8}\,aqu.\frac{1}{1000}\,aqu.\ 0001000000$$
$$\frac{1}{9}\,aqu.\frac{1}{1001}\,aqu.\ 000011100011100011100\ etc.$$

При этом он не выделяет дробную часть и для обозначения равенства использует сокращение aqu.

Для вычисления двоичной дроби Г.В. Лейбниц делит числитель на знаменатель в двоичной системе счисления, используя наиболее распространенный в то время алгоритм деления («испанский способ» по терминологии В.К. Беллюстина [14]). Г.В. Лейбниц останавливает вычисления, когда находит период двоичной дроби. Здесь же ученый проводит проверку вычислений, например, складывает дробную часть $\frac{4}{5}$, полученную сдвигом на две позиции влево из $\frac{1}{5}$, и собственно $\frac{1}{5}$: 110011001100 и 001100110011, в результате получая дробную часть 1111111111, которая соответствует целому числу 1.

Аналогичные вычисления встречаются и других заметках Г.В. Лейбница, прежде всего в собрании разрозненных записей о двоичной системе (IIIb, 5), включающем 105 листов. Так, на л. 11 Г.В. Лейбниц приводит двоичные выражения для $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, а также проверяет найденный период 0011 путем умножения на 5 (101 в двоичной системе), получая 0,1111111... = 1. Далее Г.В. Лейбниц предлагает интересный способ для определения двоичных цифр с помощью метода неопределенных коэффициентов. Он обозначает двоичные цифры в периоде дроби $\frac{1}{5}$ латинскими буквами lmnp, затем складывает дробь $\frac{1}{5}$ с дробью $\frac{4}{5}$ (сдвинутой на 2 цифры влево) и, зная известный результат 1111111..., вычисляет значения цифр:

$$\begin{array}{r} l\,m\,n\,p\,l\,m\,n\,p\,l\,m\,n\,p \\ \underline{l\,m\,n\,p\,l\,m\,n\,p\,l\,m\,n\,p} \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{array},$$

$$p = 1,\ n = 1,\ m = 0,\ l = 0.$$

Аналогично с помощью этого метода Г.В. Лейбниц находит период 001 для дроби $\frac{1}{7}$ путем сложения трех слагаемых: дроби без сдвига, со сдвигом на 1 цифру и со сдвигом на 2 цифры (учитывая, что $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=1$). Далее он таким же образом вычисляет период 000111 для дроби $\frac{1}{9}$.

На следующем л. 12 Г.В. Лейбниц пытается применить свой метод для двоичного выражения $\frac{1}{11}$. Обозначая последовательные цифры дроби как $\gamma\beta\alpha zyxwutvqpml$, Г.В. Лейбниц выписывает сумму трех слагаемых: дроби, дроби со сдвигом на 1 цифру влево и дроби со сдвигом на 3 цифры влево. Фактически он записал сумму $\frac{1}{11}+\frac{2}{11}+\frac{8}{11}=1=0{,}1111111\ldots$ Это дает ему возможность вычислить цифры l=1, m=0, n=1, p=1, q=1, r=0, s=1, t=0, u=1, w=0, x=0, y=0. Здесь Г.В. Лейбниц прерывает вычисления, по-видимому, обнаружив ошибку (на самом деле u=0). Вычисления двоичных выражений для дробей вида $\frac{1}{n}$ встречаются также на л. 47, 48, 51, 52.

Интересные вычисления также приведены на л. 89-90 об. Г.В. Лейбниц пытается получить двоичные выражения для дробей путем перемножения уже найденных, например, вычислить выражение для $\frac{1}{15}$ как $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$. При этом получается неправильный промежуточный результат 0,0000111100001111..., который он превращает в известный правильный ответ 0,000100010001... путем добавления некоторой периодической дроби. Для более подробного изучения закономерностей умножения периодических дробей Г.В. Лейбниц приводит несколько примеров вычислений в десятичной системе: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{81}$. Затем он пытается получить двоичное представление для $\frac{1}{9}$ как $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$, но получается результат 0,000111000111110110001111110..., в котором правильные только первые 9 цифр после запятой.

Также интересны две озаглавленные заметки Г.В. Лейбница. В заметке «Pro fractionibus dyadica exprimendi» («О выражении двоичных дробей», IIIb, 6, л. 2-3), датированной 20 декабря 1699 г., Г.В. Лейбниц начинает с получения двоичного выражения для $\frac{1}{3}$, а затем вводит обозначение (b) для числа, которое называет обратным для b в двоичной системе (анти-b), то есть, если $b=0$, то $(b)=1$ и наоборот. Далее он получает различные формулы для (b), пытаясь их применить при вычислении произведений двоичных дробей в общем виде.

Вторая заметка «Tentata expressio circuli per progressionem dyadicam» («Попытка выражения окружности через двоичную прогрессию», XII, 2, л. 97) описывает начальные шаги перевода $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$ в двоичную систему счисления. Г.В. Лейбниц пытается соотнести сумму выбранных членов прогрессии $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\frac{1}{256}\ldots$ с суммой ряда. Так, он получает неравенства $\frac{1}{2}<1-\frac{1}{3}$, $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$. На следующем шаге Г.В. Лейбниц ошибается и делает неправильный вывод, что $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, то есть во второй позиции после запятой должна быть цифра 0. Разумеется, дальнейшие попытки оценить сумму ряда были безуспешны.

Таким образом, анализ переписки и рукописей Г.В. Лейбница показывает, что он знал принцип записи двоичных дробей, умел выполнять действия над ними, впервые предложил использовать двоичную систему счисления для вычисления трансцендентных чисел. В то же время, для вычисления двоичных дробей он использовал либо деление, либо метод неопределенных цифр, эффективный алгоритм перевода в двоичные дроби ему не был известен.

Впервые алгоритм перевода дробных чисел из одной системы счисления в другую, аналогичный современному, был приведен ал-Каши в трактате «Ключ арифметики» в 1427 г. [4]. Для двоичной системы, по-видимому, такой алгоритм был впервые применен Л. Эйлером.

Результаты Л. Эйлера, связанные с недесятичными дробями, были обнаружены в его неопубликованных записных книжках, включающих двенадцать переплетенных томов общим объемом более 3000 страниц [15]. Записные книжки в настоящее время хранятся в Санкт-Петербургском филиале Архива Российской Академии наук [16].

Так, в записной книжке № 131 [16], датированной 1736–1740 гг., на л. 208 об. Л. Эйлер переводит число π, взятое с 12 знаками после запятой в двоичную систему и выписывает окончательный результат в нижней части следующего л. 209 с 53 двоичными знаками после запятой:

$$11{,}001001000011111101101010100010001000010110100011000001_2\,.$$

При этом Л. Эйлер отдельно переводит целую часть: 3=11, а дробную часть переводит двумя способами: в верхней части л. 208 об. с помощью последовательных делений на 5, а в нижней части – с помощью последовательных удвоений повторяет вычисления с большим количеством шагов.

На том же л. 208 об., но другими, более темными, чернилами сделана приписка: «Это число можно представить с помощью арифметики с основанием 24 как $c,ciniaalla = 3+\frac{3}{24}+\frac{9}{24^2}+\frac{13}{24^3}+\frac{9}{24^4}+\dots$ » Здесь Л. Эйлер обозначает цифры буквами a=1, b=2, c=3,... Чуть ниже, видимо вспомнив про то, что необходим символ для обозначения нуля, Л. Эйлер выписывает обозначения a=0, b=1, c=2, ... и переводит в 24-ричную систему счисления число 1745 = das. Вероятнее всего, 1745 обозначает год, когда было сделано это дополнение.

Что же заставило Л. Эйлера больше чем через 5 лет вернуться к своей заметке и дополнить ее? Нам кажется, что его побудила к этому переписка с немецким математиком Христианом Гольдбахом (Christian Goldbach, 1690 – 1764) [17]. Именно в 1745 г. тема двоичной арифметики возникла в переписке Х. Гольдбаха и Л. Эйлера в связи с приближенным вычислением значения числа π . Возможно, Х. Гольдбах почерпнул свои идеи из изданной в середине 1745 г. двухтомной переписки Г.В. Лейбница с Иоганном Бернулли. Известно, что Л. Эйлер получил эту книгу в сентябре 1745 г.

В письме от 9 ноября 1745 г. Х. Гольдбах пишет: «Нет сомнений в том, что в числе, $\frac{31415\cdots}{10000\cdots}$, представляющем длину окружности с диаметром 1, цифры числителя располагаются в определенном порядке, который сложно найти» [17]. Для упрощения поиска этого порядка Х. Гольдбах предложил представить длину окружности в виде $m+\frac{a}{10}+\frac{b}{100}+\frac{c}{1000}+\dots$, где m –такое число, чтобы каждый из числителей a, b, c, и т.д. был бы либо 0, либо 1, и далее попытаться найти определенный порядок в чередовании нулей и единиц. Понятно, что последовательность нулей и единиц не может быть периодической, потому что тогда все число должно быть рациональным, но возможно получение непериодической последовательности, которая имеет очевидный порядок, например, 0+1+0+0+1+0+0+0+1+... и т.п. Х. Гольдбах предположил, что после такого преобразования определить закономерность в десятичных цифрах π не сложнее, чем в цифрах $\sqrt{2}$. Х. Гольдбах пишет: «Можно было бы $\sqrt{2}$ представить как $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{d}{8}\dots$, так что a, b, c, d и т.д. всегда будут 0 или 1, и здесь я почти уверен, что скоро смогу показать порядок».

Эйлер в ответном письме от 19 ноября 1745 г. пишет: «Предложение представлять выражение 3,1415926535 удобным способом, так, чтобы одновременно найти закон прогрессии, сводится к тому, что нужно получить известное число m, цифры которого на бесконечности с вышеупомянутыми или одинаковы, или были бы только меньше на 1, тогда остаток $\pi-m$ будет выражаться через такую десятичную дробь, что все ее цифры будут или 0, или 1. Но я еще не вижу метода, которым удалось бы получить заявленное число m. Более того, я хотел бы принять разность $\pi-m$ как известное, например, $\pi-m=0{,}01001000100001\dots$, тогда m=3,13158265258978..., и нужно только увидеть, может ли число m быть выражено через конечное иррациональное выражение» [17]. Далее Эйлер пишет: «В двоичной арифметике для $\sqrt{2}$ находится выражение в следующем виде: из $\sqrt{2}=1.41421356236$ получается путем последовательного удвоения (continuo duplando) за вертикальной линией следующим образом:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 41421356236 \\ 0 & 82842712472 \\ 1 & 65685424944 \\ 1 & 31370849888 \\ 0 & 62741699776 \\ 1 & 25483399552 \end{array}$$

...

Полученные до вертикальной линии цифры 0 и 1 дадут искомые цифры в двоичной системе, а именно

$\sqrt{2} = 1.01101010000010011110011001100111111001$, где никакого закона нельзя увидеть». В дальнейших письмах Л. Эйлер и Х. Гольдбах пришли к выводу, что двоичная арифметика не может помочь найти последовательности цифр в иррациональных числах.

Двоичные дроби нашли применение в записных книжках Л. Эйлера для вычисления значений иррациональных чисел. Так, на л.89 об. записной книжки 131, датированной 1736-1740 гг., Л. Эйлер вычисляет значение суммы

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+\dots,$$

представляя каждое слагаемое в виде суммы геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2^1}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{8^1}+\frac{1}{16^1}+\frac{1}{32^1}+\frac{1}{64^1}+\dots\\
\frac{1}{3} &= \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{32^2}+\frac{1}{64^2}+\dots\\
\frac{1}{7} &= \frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{32^3}+\frac{1}{64^3}+\dots\\
\dots
\end{aligned}$$

Далее Л. Эйлер, начиная с n+1 строки, сворачивает суммы по столбцам по формулам суммы геометрической прогрессии и получает:

$$1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{1\cdot 2^n}+\frac{1}{3\cdot 4^n}+\frac{1}{7\cdot 8^n}+$$
$$+\frac{1}{15\cdot 16^n}+\frac{1}{31\cdot 32^n}+\frac{1}{63\cdot 64^n}+\dots$$

Ниже Л. Эйлер приводит приближенное значение вычисляемого числа, причем не только в десятичной системе 1,60669515241527, но и в двоичной

1,1001101101010000011000000111000000110010000000001.

Вычисления в двоичной системе здесь удобнее, поскольку приходится суммировать дроби, в знаменателе которых стоят степени двойки.

Вычисленное число в современной математике носит название константы Эрдёша-Борвейна. Здесь Л. Эйлер для вычисления константы получил тождество $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{mn}}$.

В других заметках и опубликованных работах Л. Эйлер получил еще три тождества для вычисления константы Эрдёша-Борвейна и нашел ее значение с точностью до 15 цифр после запятой. Подробно результаты Л. Эйлера, связанные с вычислением константы Эрдёша-Борвейна, представлены в нашей статье [17].

Несколько позже, на л. 52 об. записной книжки № 133, датированной 1749–1753 гг. Л. Эйлер использовал двоичные дроби в заметке, связанной с его знаменитой пентагональной теоремой: при развертывании произведения

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\cdots$$

получается ряд

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+\cdots,$$

в котором содержатся только такие степени x, показатели которых имеют вид $\frac{3n^2\pm n}{2}$ (пятиугольные числа), при этом слагаемые будут отрицательны для нечетного n и положительны для четного n [19]. Л. Эйлер применяет теорему для $x=\frac{1}{2}$, что дает ему возможность вычислить произведение в двоичной системе

$$(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{2^2})(1-\tfrac{1}{2^3})(1-\tfrac{1}{2^4})\cdots=$$

$$=0{,}0100100111101110000001000011111110\ldots=$$

$$=0{,}288788095088\ldots$$

Здесь необходимость использования двоичной системы также связана с использованием дробей со степенями двойки в знаменателе.

Таким образом, Л. Эйлер разработал алгоритм перевода десятичных чисел в двоичную систему счисления, аналогичный современному, и использовал его не позднее 1739 г. Позже, в 1745 г., Л. Эйлер сообщил свой алгоритм Х. Гольдбаху. В записных книжках Л. Эйлер успешно использовал двоичные представления дробей для вычисления сумм рядов и бесконечных произведений.

1.11.2013

Исследования выполнены при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № 12-06-31060 мол-а

Список литературы:
1. Leibniz, G.W. Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures Chinoies de Fohy / G.W. Leibniz //Die mathematische schriften von Gottfried Wilheim Leibniz, vol. VII C. I. Gerhardt (ed) – Halle:1863.– pp. 223-227.
2. Shirley, J. W. Binary numeration before Leibniz / J. W. Shirley // American Journal of Physics. –1951. –Vol. 19. – pp. 452-454.
3. Шухман, Е.В. Заметки о недесятичных системах счисления в опубликованных работах и записных книжках Леонарда Эйлера / Е.В. Шухман, А.Е.Шухман // Математика в высшем образовании.–2008. –№ 6. –С. 143-146.
4. Шухман, Е.В. О недесятичных представлениях дробных чисел в работах математиков XVII-XVIII вв. / Е.В. Шухман / / История науки и техники.– 2013. – №1. – С. 3-16.
5. Greve, J. Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins/ J. Greve, H. Gumin, E. Hochsteller. – Berlin, München: SiemensAG, 1966. – 62 p.
6. Lautz, G. 300 Jahre leibnizsches dualzahlensystem / G. Lautz // Biological Cybernetics. –1979. –Vol. 35. –No. 3. –pp. 175-181.
7. Zacher, H.J. Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz: Ein Beitr. zur Geschichte des binären Zahlensystems / H.J. Zacher.– Frankfurt a. M.: Klostermann, 1973. – 384 s.
8. Lettres de M. de Leibnitz б M. Herman // Histoire de l'Academie royale des sciences et belles lettres, Tom 13. – Berlin:1759. – pp. 469-483.
9. Лейбниц, Г.В. Письма и эссе о китайской философии и двоичной системе исчисления/ Г.В. Лейбниц / пред., переводы и примечания В.М. Яковлева. – М.: Институт философии РАН, 2005. – 404 с.
10. Bernoulli, J. Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli / J. Bernoulli. – Basel: Birkhauser, 1993. – 309 p.
11. Der Online-Ritterkatalog [Электронный ресурс]. – URL: http://leibniz.bbaw.de/ritter/
12. Leibniz G.W. Leibniz-Handschriften. – XXXV.– Niedersachsen Landesbibliothek Hannover.
13. Bodemann, E. Die Leibniz-Handschriften der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu Hannover / E. Bodemann. – Hannover, 1895. – 383 s.
14. Беллюстин, В.К. Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики / В.К. Беллюстин. – М.:Учпедгиз, 1941. – 200 с.
15. Матвиевская, Г.П. О рукописном наследии и записных книжках Эйлера / Г.П. Матвиевская // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука.– М.: Наука, 1988. – С. 122-129.
16. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН (ПФА РАН). Ф. 136. Оп.1. № 129-140.
17. Шухман, Е.В. Приближенное вычисление некоторых математических констант в опубликованных и неопубликованных работах Л. Эйлера / Е.В. Шухман. // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2010. – №9. – С. 74-80.
18. Juskevic, A.P. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764 / A.P. Juskevic, E. Winter. – Berlin:Akademie-Verlag, 1965. – 420 p.
19. Ожигова, Е.П. Развитие теории чисел в России / Е.П. Ожигова – М.:УРСС, 2003. - 360 с.

Сведения об авторе:
Шухман Елена Владимировна, старший преподаватель кафедры информатики и методики преподавания информатики Оренбургского государственного педагогического университета, кандидат физико-математических наук, e-mail: shukhman.elena@gmail.com

UDC 51(091)
Shukman E.V.
Orenburg state pedagogical university, e-mail: shukhman.elena@gmail.com
NON-DECIMAL FRACTIONS IN PAPERS BY G.W. LEIBNIZ AND L. EULER
The article provides a comparative analysis between Leibniz's and Euler's results associated with non-decimal fractions. The study of papers, letters and unpublished manuscripts shows that Leibniz first explored binary fractions and tried to apply them to study transcendental numbers. However he had no significant progress because he did not use an effective method for converting fractional numbers into binary system. Euler knew the method for converting fractional numbers similar to the modern, and successfully applied binary fraction representations to calculate sums of series and infinite products.
Key words: history of mathematica, non-decimal fractions, Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler.