

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ЭЛЛИПСОИДА ИНТЕНСИВНОСТИ ОТРАЖЕННОГО СВЕТА

Рассматривается моделирование трехмерной поверхности. Отражающие свойства земной поверхности задаются эллипсоидом интенсивности, который определяется по трем фотографиям подстилающей поверхности. По лучам освещения и зеркального отражения находится нормаль в каждой точке. Построение трехмерной модели начинается с угловой точки, а обход всех точек осуществляется в шахматном порядке.

Ключевые слова: трехмерная поверхность, подстилающая поверхность, векторы нормали, эллипсоид интенсивности отраженных лучей, высоты.

Проблематика моделирования элементов подстилающей поверхности обусловлена необходимостью решения ряда научных и прикладных задач, затрагивающих вопросы рационального землепользования, экологической и продовольственной безопасности. Наряду с этим на основе полученных моделей осуществляется: прогнозирование естественных и техногенных стоков; прокладка транспортных магистралей, кадастровый учет зданий и сооружений, проектирование площадей под промышленное и гражданское строительство, плановая подготовка лесных насаждений.

При получении снимков со спутника имеется информация о его орбите и трех моментах фотографирования. Это позволяет определить, предварительно рассчитав положение солнца и зафиксировав его, углы лучей освещения и видения для сфотографированных участков в виде направляющих косинусов (cv_{ij} , co_j , $i=1,...,3, j=1,...,3$).

Отражательные свойства земной поверхности варьируются в диапазоне от ламбертовой поверхности, отражающей свет во всех направлениях одинаково, до зеркальной, отражающей свет в одном направлении [1], [3], определенном законом равенства угла падения углу отражения (см. рисунок 1). В общем случае интенсивность отраженных в разных направлениях лучей будет формировать эллипсоид вокруг линии зеркального отражения с той или иной степенью вытянутости вдоль нее. Эту поверхность относительно главных осей эллипсоида можно описать формулой

$$\frac{\varepsilon^2}{a^2} + \frac{\varphi^2}{b^2} + \frac{\psi^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

где ε , φ , ψ – координаты точек эллипса, отсчитываемые от начала в отражающей точке поверхности; a , b , c – длины полуосей эллипсоида.

Чтобы восстановить этот эллипсоид, необходимо задать три его точки. Трех уравнений, составленных по координатам этих точек, достаточно для определения длин полуосей. Это означает, что необходимо одну и ту же часть подстилающей поверхности сфотографировать с трех ракурсов.

На рисунке 2 изображены лучи освещения $\vec{o}$, зеркального отражения $\vec{z}$, три луча VI , VII , $VIII$ интенсивности отраженного света, зафиксированные на спутниковых фотографиях, и нормаль $\vec{n}$ к отражающей поверхности.

В общем случае эллипсоид интенсивности отраженного света повернут относительно своих главных осей. Если известны направляющие косинусы главных осей (t_{ij} , где $i, j = 1, ..., 3$), то можно воспользоваться формулой поворота осей. Тогда уравнение эллипсоида в нашей системе координат примет вид [2]:

$$\frac{t_{11}x + t_{12}y + t_{13}z}{p^2} + \frac{t_{21}x + t_{22}y + t_{23}z}{q^2} + \frac{t_{31}x + t_{32}y + t_{33}z}{r^2} = 1. \quad (2)$$

Зная направляющие косинусы луча фотографирования, можно определить координаты трех точек на поверхности эллипсоида через интенсивности отраженного света VI , VII , $VIII$:

$$\begin{aligned} x_1 &= VI \cdot cv_{11}; \quad y_1 = VI \cdot cv_{21}; \quad z_1 = VI \cdot cv_{31} \\ x_2 &= VII \cdot cv_{12}; \quad y_2 = VII \cdot cv_{22}; \quad z_2 = VII \cdot cv_{32} \\ x_3 &= VIII \cdot cv_{13}; \quad y_3 = VIII \cdot cv_{23}; \quad z_3 = VIII \cdot cv_{33}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив полученные координаты трех точек в уравнение (2) и добавив к ним уравнения, отражающие ортогональность осей, определим направляющие косинусы самой длинной полу-

оси эллипсоида, совпадающей с лучом зеркального отражения: t_{11}, t_{12}, t_{13} . Задавшись единичной длиной вектора зеркального отражения по этим косинусам, определим три его компоненты: z_1, z_2, z_3 . Задавшись единичной длиной вектора освещения по направляющим косинусам луча от солнца, определим его компоненты: o_1, o_2, o_3 .

Теперь можно определить направление нормали к отражающей поверхности из условия равенства угла падения углу отражения, а стало быть равенства следующих векторных произведений

$$\vec{o} \times \vec{n} = \vec{n} \times \vec{z}$$

или

$$\begin{cases} o_2 n_3 - n_2 o_3 = n_2 z_3 - z_2 n_3 \\ o_3 n_1 - o_1 n_3 = n_3 z_1 - n_1 z_3 \\ o_1 n_2 - o_2 n_1 = n_1 z_2 - n_2 z_1 \end{cases} \quad (4)$$

Отсюда можно определить компоненты вектора нормали: n_1, n_2, n_3 .

Процедуру определения нормали необходимо повторить для всех точек подстилающей поверхности. После этого можно перейти к построению трехмерной модели путем вычисления высот в каждой точке изображения. На рисунке 3 изображены точки подстилающей поверхности с соответствующими векторами нормалей.

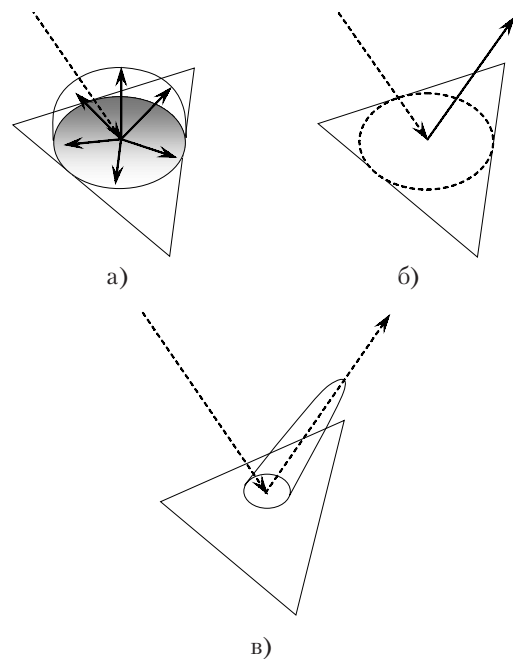
Построение трехмерной модели начинается с угловой точки. Плоскость, заданная нормалью в этой точке, описывается уравнением

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = 0. \quad (5)$$

Если распространить плоскость, заданную нормалью, в ней на три соседние точки, то плоскости, построенные по нормальям в этих точках, необходимо поднять на высоту, заданную этой плоскостью, в соответствующей точке. Расстояние от соседних точек до плоскости можно определить простой подстановкой их координат в уравнение (5). Однако это расстояние определяется как длина перпендикуляра, который по отношению к искомой высоте будет проходить под таким же углом как нормаль по отношению к оси z , поэтому для вычисления искомых высот необходимо разделить эти расстояния на направляющий косинус нормали по отношению к оси z . Окончательно имеем

$$h_{12} = \frac{n_1}{n_3} \Delta; h_{21} = \frac{n_2}{n_3} \Delta; h_{22} = \frac{n_1 + n_2}{n_3} \Delta, \quad (6)$$

где Δ – шаг по координатам.



а – ламбертова поверхность, б – зеркальная поверхность, в – общий случай

Рисунок 1. Схемы отражения лучей от поверхности

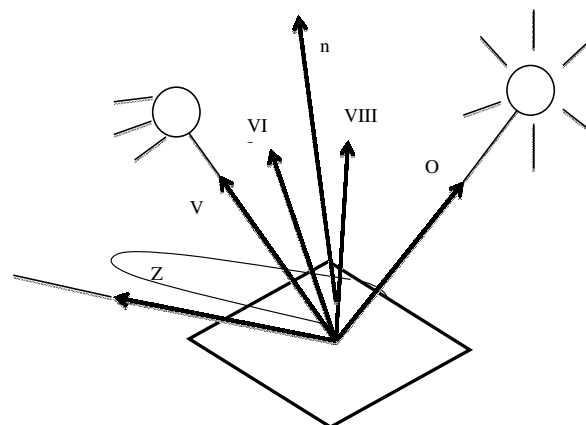


Рисунок 2. Схема хода лучей при фотографировании поверхности

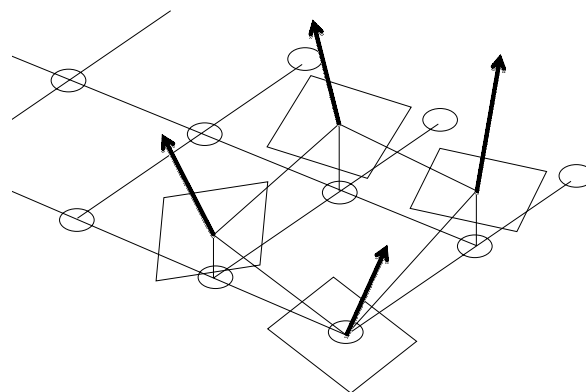


Рисунок 3. Схема вычисления высот

Далее повторяем эту процедуру для квадрата из следующих четырех точек, расположенного по диагонали к первому. После этого можно определить высоты подъема в следующих угловых квадратах. Это означает, что обход всех точек подстилающей поверхности производится в шахматном порядке.

Таким образом, в результате проведенных вычислений поверхность будет смоделирована матрицей высот.

Эксперимент проводился на пластилиновой модели, сфотографированной с трех ракурсов при одинаковом освещении. Программа была написана на языке Delphi 7.0. Полученные результаты приведены на рисунке 4. На рисунке представлены три фотографии пластилиновой волны, развернутые программой обработки изображений до одинаковой ориентации и часть графиков высот (графики перевернуты в силу отсчета координат от верхнего левого угла).

В описанном методе фактически применялась формула Эйлера, использующая первые два слагаемых разложения функции в ряд

$$y_{k+1} = y_k + f_k \Delta x. \quad (7)$$

Полученный результат довольно грубо отражает моделируемую поверхность, так как формула Эйлера неточна и увеличивает погрешность по мере удаления от опорной точки. В связи с этим программа была переписана с применением уточненной формулы Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(3f_k - f_{k-1})\Delta x. \quad (8)$$

Результат вычислений представлен на рисунке 5.

Как видим, результат более близок к действительности. Утолщение линий графиков на конце интервала отражает дополнительное исследование на сдвиг точек на трех фотографиях друг относительно друга.

Однако и этот результат недостаточно точен, поэтому предлагается продолжить работу с вычислениями по формуле Адамса

$$y_{k+1} = y_k + \left(f_k + \frac{1}{2} \nabla f_k + \frac{5}{12} \nabla^2 f_k + \frac{3}{8} \nabla^3 f_k + \frac{251}{720} \nabla^4 f_k + \frac{95}{288} \nabla^5 f_k + \dots \right) \Delta x. \quad (9)$$

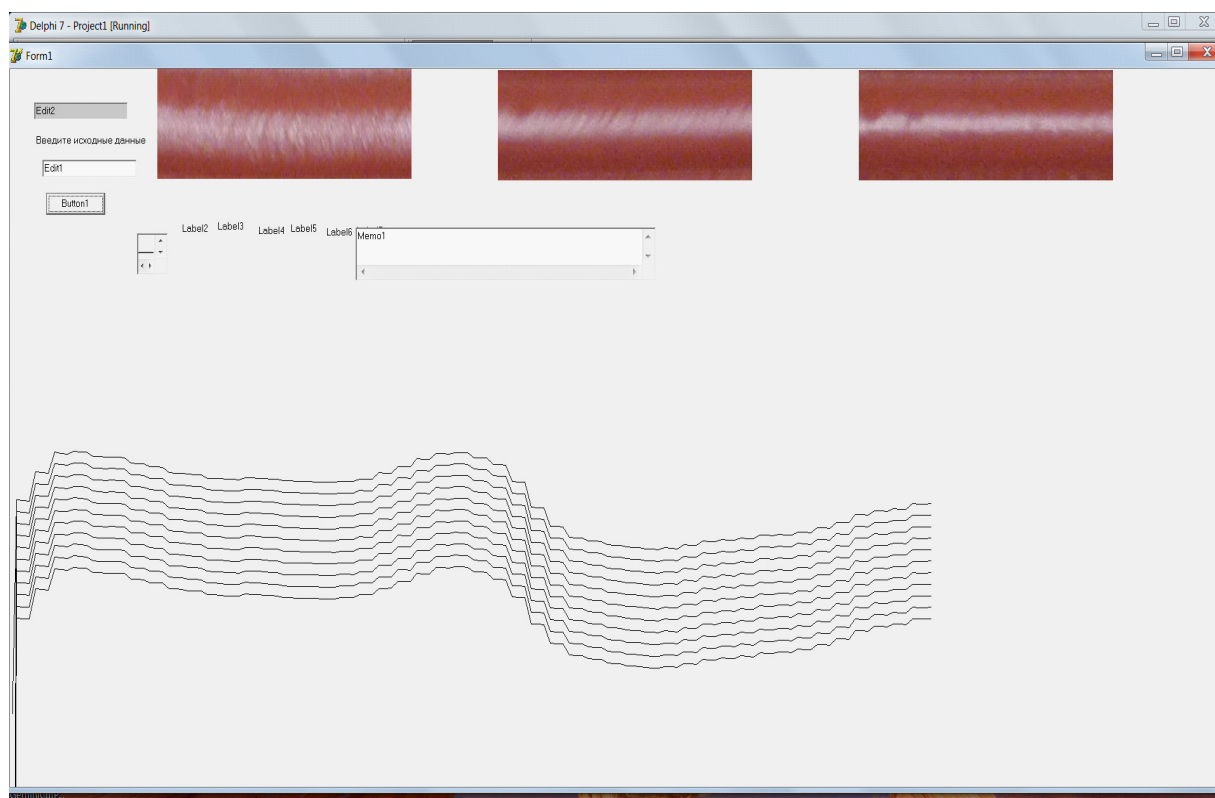


Рисунок 4. Результаты вычислений по формуле Эйлера

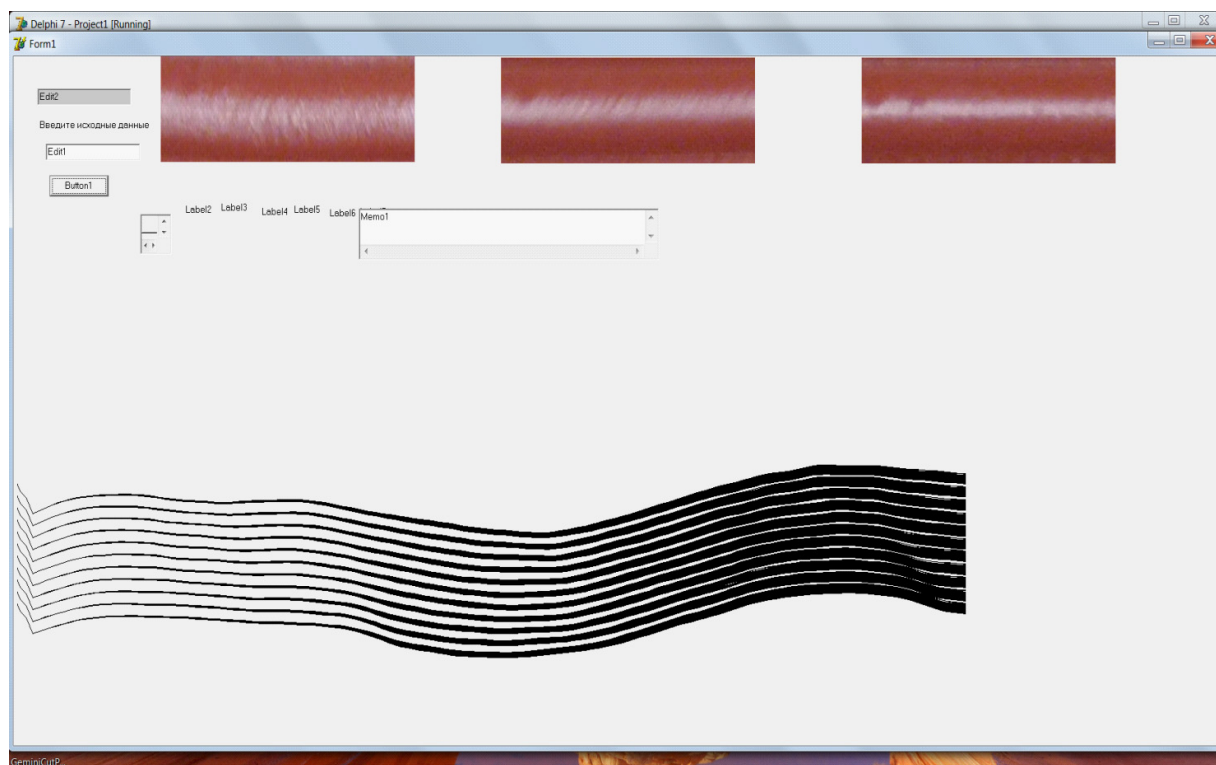


Рисунок 5. Результаты вычислений по уточненной формуле Эйлера

Тем не менее можно сделать вывод, что разработанный метод работоспособен. Дальнейшее

исследование должно выяснить границы его применения.

05.12.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №12-07-00330а)

Список литературы:

1. Коршунова, Т. И. Оптимизация углов хода лучей при контроле качества ткани / Т. И. Коршунова, А. М. Пищухин, О. А. Пищухина // Материалы н/п конференции «Современные информационные технологии в науке, образовании и практике». – Оренбург, 2008. – С. 409–412
2. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн – М., 1974. – 832 с.
3. Коршунова, Т. И. Контроль качества ткани с полотняным переплетением / Т. И. Коршунова, А. М. Пищухин, О. А. Пищухина // Контроль и диагностика. – 2012. – № 1. – С. 62–67.

Сведения об авторах:

Пищухин Александр Михайлович, декан факультета информационных технологий
Оренбургского государственного университета, доктор технических наук, профессор
Пищухина Татьяна Александровна, доцент кафедры управления и информатики в технических
системах Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук
Пищухина Ольга Александровна, ведущий программист центра информационных технологий
Оренбургского государственного университета
460019, г. Оренбург, Шарлыкское ш., 5, ауд. 14313, тел. (3532) 372507, e-mail: fit@unpk.osu.ru