УДК 514.76

Рустанов А.Р., Щипкова Н.Н.*
Московский педагогический государственный университет
*Оренбургский государственный университет
E-mail: aligadzhi@yandex.ru; ningeom@pochtamt.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА NC_{11}

В работе рассматривается новый класс почти контактных метрических многообразий, обобщающий класс AC-многообразий класса C_{11} в классификации Чинья и Гонзалеза. Получена полная группа структурных уравнений NC_{11}-многообразий, и на их основе подсчитаны компоненты тензора Римана-Кристоффеля, тензора Риччи и вычислена скалярная кривизна. Получены свойства NC_{11}-многообразий и некоторые тождества тензора римановой кривизны.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, тензор римановой кривизны, тензор Риччи, тензор Ф-голоморфной секционной кривизны, косимплектическое многообразие.

1. Определение и структурные уравнения NC_{11}-многообразий

В данной работе рассматриваются обобщения почти контактных метрических многообразий класса $\boldsymbol{C}_{11}$ в классификации Чинья и Гонзалеза, рассмотренных нами в работах [1] и [2]. Мы придерживаемся обозначений и терминологии, принятой в монографии [3]. Почти контактные метрические многообразия класса $\mathbf{C}_{11}$ характеризуются тождеством [4]:

$$\nabla_X(\Omega)(Y,Z) = -\eta(X)\nabla_\xi(\Omega)(\Phi Y,\Phi Z), \qquad (1)$$

где $X,Y \in X(M)$. Поскольку $\nabla_X(\Omega)(Y,Z) = \langle Y,\nabla_X(\Phi)Z\rangle = -\langle\nabla_X(\Phi)Y,Z\rangle$, то тождество (1) запишется в виде $-\langle\nabla_X(\Phi)Y,Z\rangle = -\eta(X)\langle\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y,\Phi Z\rangle$. Полученное равенство, с учетом соотношения $\langle\Phi X,\Phi Y\rangle = \langle X,Y\rangle - \eta(X)\eta(Y)$, перепишем в виде $\langle\nabla_X(\Phi)Y,Z\rangle = \eta(X)\langle\Phi\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y,Z\rangle$, $X,Y,Z \in X(M)$. Так как $Z \in X(M)$ произвольное векторное поле, то из последнего равенства получим:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \eta(X)\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y;\;\; X,Y \in X(M). \qquad (2)$$

Положим в тождестве (2) X=Y, тогда

$$\nabla_X(\Phi)X = \eta(X)\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X;\;\; X \in X(M). \qquad (3)$$

AC-многообразия, характеризуемые тождеством (3), назовем <u>*обобщенными многообразиями класса C_{11}*</u> (коротко, NC_{11}-многообразиями). Инволюционно поляризуя тождество (3), получим:

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = \eta(X)\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y + \eta(Y)\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X;\;\; X,Y \in X(M). \qquad (4)$$

Найдем явное аналитическое задание структурных тензоров NC_{11}-многообразий [3], [5].

Положим в тождестве (4) X равным ξ, тогда

$$\nabla_\xi(\Phi)X + \nabla_X(\Phi)\xi = \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X;\;\; X \in X(M). \qquad (5)$$

Из (5) при $X=\xi$ следует, что

$$\nabla_\xi(\Phi)\xi = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{G} = 0, \qquad (6)$$

т. е. шестой структурный тензор NC_{11}-многообразия равен нулю.

Поскольку для *AC*-многообразий имеем $\Phi\circ\nabla_X(\Phi)\xi = \nabla_X\xi,\; X \in X(M)$, то согласно (6) получим, что $\nabla_X\xi = 0,\; X \in X(M)$, т. е. интегральные кривые векторного поля ξ являются геодезическими.

Из (5) имеем $\nabla_X(\Phi)\xi = \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X - \nabla_\xi(\Phi)X$, а значит, $\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi = -\Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X - \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X$ и $\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = -\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X - \Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X,\; X \in X(M)$. Следовательно, для четвертого и пятого структурных тензоров NC_{11}-многообразия имеем:

$$E(X) = \Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X + \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X;$$
$$F(X) = 0;\;\; X \in X(M). \qquad (7)$$

Ковариантно дифференцируя равенство $\Phi^2 = -id + \eta\otimes\xi$, получим

$$\nabla_X(\Phi)\Phi Y + \Phi\circ\nabla_X(\Phi)Y = \nabla_X(\eta)(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi;$$
$$X,Y \in X(M). \qquad (8)$$

В последнем равенстве положим X равным ξ, тогда $\nabla_\xi(\Phi)\Phi X + \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)X = \nabla_\xi(\eta)(X)\xi + \eta(X)\nabla_\xi\xi$. Сделав в этом равенстве замену X на $\Phi^2 X$, получим $-\nabla_\xi(\Phi)\Phi X + \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X = 0$. Отсюда

$$\Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X + \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X = 0,\;\; X \in X(M), \qquad (9)$$

т. е.

$$E(X) = 0,\;\; X \in X(M). \qquad (10)$$

Сделаем в (4) замены X на ΦX, Y на ΦY, тогда: $\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y+\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi X=0;\ X,Y\in X(M)$, т. е.

$$\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y+\Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi X=0;\ X,Y\in X(M). \tag{11}$$

В равенстве (8) сделаем замены X на ΦX, Y на ΦY, тогда: $\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y+\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y=\nabla_{\Phi X}(\eta)(\Phi Y)\xi;$ $X,Y\in X(M)$. В полученном равенстве также сделаем замены X на ΦX, Y на ΦY: $-\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi Y+\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y=\nabla_{\Phi^2 X}(\eta)\left(\Phi^2 Y\right)\xi;\ X,Y\in X(M)$. Подействовав оператором Φ^2 на оба последних равенства, получим:

$$\begin{aligned}&1)\ \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi^2 Y=\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y;\\&2)\ \Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi Y=-\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y;\ X,Y\in X(M).\end{aligned} \tag{12}$$

С учетом (12) из тождества (11) получим

$$\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y-\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X=0;\ X,Y\in X(M). \tag{13}$$

Теперь в (4) сделаем замены X на $\Phi^2 X$, Y на $\Phi^2 Y$, тогда:

$$\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y+\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X=0;\ X,Y\in X(M),$$

т. е.

$$\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y+\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X=0;\ X,Y\in X(M). \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y+\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y=0;\ X,Y\in X(M). \tag{15}$$

А значит, для первого и второго структурных тензоров NC_{11}-структуры имеем:

$$B(X,Y)=0;\ \ C(X,Y)=-\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X=$$

$$=\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X;\ X,Y\in X(M). \tag{16}$$

В силу (7) и (9) для третьего структурного NC_{11}-структуры имеем

$$D(X)=-\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\xi}(\Phi)\Phi^2 X=\frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\xi}(\Phi)\Phi X;\ X,Y\in X(M). \tag{17}$$

Таким образом, с учетом Предложения 1.6 из [3], стр. 451, мы доказали следующие предложения.

Предложение 1. Структурные тензоры NC_{11}-структуры обладают свойствами:

1) $B(X,Y)=0;$

2) $C(X,Y)=-\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X)=\frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X);$

3) $D(X)=\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\xi}(\Phi)X=-\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\xi}(\Phi)\left(\Phi^2 X\right)=\frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi X);$

4) $E(X)=F(X)=0;$

5) $G=0;$

6) $\Phi\circ C(X,Y)=-C(\Phi X,Y)=-C(X,\Phi Y);$

7) $\langle\langle C(X,Y),Z\rangle\rangle+\overline{\langle\langle Y,C(X,Z)\rangle\rangle}=0;$

8) $C(X,Y)=-C(Y,X);$

9) $\Phi\circ D=-D\circ\Phi;$

10) $\langle D(X),Y\rangle=-\langle X,D(Y)\rangle,$

где $\langle\langle X,Y\rangle\rangle=\langle X,Y\rangle+\sqrt{-1}\Omega(X,Y)$ – каноническая эрмитова метрика на многообразии M [1].

Предложение 2. Пусть $S=(\Phi,\xi,\eta,g)$ – AC-структура на многообразии M. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $S=(\Phi,\xi,\eta,g)$ – NC_{11}-структура;

2. $B=C_0=D_0=E=F=G=0$;

3. S–AC-160–структура.

Расписывая (4) на пространстве присоединенной G-структуры получим, что компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}&1)\ \Phi^0_{a,0}=\Phi^0_{\hat a,0}=\Phi^a_{0,0}=\Phi^{\hat a}_{0,0}=0;\\&2)\ \Phi^0_{a,b}=\Phi^0_{\hat a,\hat b}=\Phi^a_{0,b}=\Phi^{\hat a}_{0,\hat b}=\Phi^{\hat a}_{0,b}=\Phi^a_{0,\hat b}=\Phi^0_{a,\hat b}=\Phi^0_{\hat a,b}=0;\\&3)\ \Phi^a_{\hat b,c}=\Phi^{\hat a}_{b,\hat c}=0;\ \ 4)\ \Phi^a_{\hat c,\hat b}+\Phi^a_{\hat b,\hat c}=0;\ \ 5)\ \Phi^{\hat a}_{c,b}+\Phi^{\hat a}_{b,c}=0.\end{aligned} \tag{18}$$

Применяя процедуру восстановления тождества [3], [6] к равенствам 1) $\Phi^0_{0,a}=\Phi^b_{0,a}=\Phi^{\hat b}_{0,a}=0$; 2) $\Phi^0_{\hat a,b}=\Phi^c_{\hat a,b}=\Phi^{\hat c}_{\hat a,b}=0$, получим

Предложение 3. Для NC_{11}-структуры имеют место следующие тождества:

1) $\nabla_X(\Phi)\xi=0;$ 2) $\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y+\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y=0;\ \ \forall X,Y\in X(M)$

Из (18) и предложения 2 получим следующие предложения.

Предложение 4. NC_{11}-структура является AC-структурой класса C_{11} тогда и только тогда, когда $\nabla_{\Phi X}(\Phi)(\Phi Y)=0,\ \ X,Y\in X(M)$.

Следствие. NC_{11}-структура является AC-структурой класса C_{11} тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $B^{abc}=B_{abc}=0$.

Предложение 5. Пусть M – NC_{11}-многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) M – точнейше косимплектическое;

2) на пространстве присоединенной G-структуры $\Phi^{\hat a}_{b,0}=\Phi^a_{\hat b,0}=0$;

3) D=0;

4) $\nabla_{\xi}(\Phi)X=0,\ X\in X(M)$.

Предложение 5 дает примеры NC_{11}-многообразий.

Тензор Нейенхейса оператора Ф на пространстве присоединенной G-структуры имеет компоненты [3]:

$$1)\ N_{ab}^{0}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[a,b]}^{0};\ 2)\ N_{\hat{a}b}^{0}=N_{b\hat{a}}^{0}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{(\hat{a},b)}^{0};$$
$$3)\ N_{\hat{a}\hat{b}}^{0}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^{0};\ 4)\ N_{\hat{b}0}^{a}=-N_{0\hat{b}}^{a}=\frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{\hat{b},0}^{a}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,\hat{b}}^{a};$$
$$5)\ N_{b0}^{\hat{a}}=-N_{0b}^{\hat{a}}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,b}^{\hat{a}}-\frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{b,0}^{\hat{a}};\ 6)\ N_{\hat{b}\hat{c}}^{a}=\sqrt{-1}\Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{a};$$
$$7)\ N_{bc}^{\hat{a}}=\sqrt{-1}\Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}.$$

Для NC_{11}-многообразия эти компоненты примут вид:

$$\begin{aligned}&1)\ N_{\hat{b}0}^{a}=-N_{0\hat{b}}^{a}=\frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{\hat{b},0}^{a}-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,\hat{b}}^{a}=-\frac{1}{2}D^{ab};\\&2)\ N_{b0}^{\hat{a}}=-N_{0b}^{\hat{a}}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{0,b}^{\hat{a}}-\frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi_{b,0}^{\hat{a}}=-\frac{1}{2}D_{ab};\\&3)\ N_{\hat{b}\hat{c}}^{a}=\sqrt{-1}\Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{a}=2B^{abc};\ 3)\ N_{bc}^{\hat{a}}=\sqrt{-1}\Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}=2B_{abc}.\end{aligned}\tag{19}$$

Остальные компоненты этого тензора равны нулю.

Хорошо известно [7], что структура (Φ,ξ,η,g) интегрируема тогда и только тогда, когда её тензор Нейенхейса равен нулю. Отсюда, в силу тождеств (19) и предложений 4 и 5 следует, что интегрируемая NC_{11}-структура является косимплектической.

Легко показать, что нормальная NC_{11}-структура является косимплектической.

Согласно (18) первая группа структурных уравнений NC_{11}-структуры на пространстве присоединенной G-структуры примет вид:

$$\begin{aligned}&1)\ d\omega=0;\\&2)\ d\omega^{a}=-\theta_{b}^{a}\wedge\omega^{b}+B^{abc}\omega_{b}\wedge\omega_{c}+D^{ab}\omega\wedge\omega_{b};\\&3)\ d\omega_{a}=\theta_{a}^{b}\wedge\omega_{b}+B_{abc}\omega^{b}\wedge\omega^{c}+D_{ab}\omega\wedge\omega^{b},\end{aligned}\tag{20}$$

где

$$B^{abc}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{a},\ B_{abc}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}},\ B^{[abc]}=B^{abc},\ B_{[abc]}=B_{abc},$$
$$\overline{B^{abc}}=B_{abc},\ D^{ab}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},0}^{a},\ D_{ab}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,0}^{\hat{a}},\tag{21}$$
$$\overline{D^{ab}}=D_{ab},\ D^{ab}=-D^{ba},\ D_{ab}=-D_{ba}.$$

Стандартная процедура дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений (21) позволяет получить *вторую группу структурных уравнений NC_{11}-структуры*:

$$\begin{aligned}&d\theta_{b}^{a}+\theta_{c}^{a}\wedge\theta_{b}^{c}+2B^{adh}B_{hbc}\omega^{c}\wedge\omega_{d}=\\&=A_{bc}^{ad}\omega^{c}\wedge\omega_{d}+B_{bcd}D^{da}\omega^{c}\wedge\omega-B^{acd}D_{db}\omega_{c}\wedge\omega.\end{aligned}\tag{22}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Полная группа структурных уравнений AC-структуры класса NC_{11} на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид:

$$\begin{aligned}&1)\ d\omega=0;\\&2)\ d\omega^{a}=-\theta_{b}^{a}\wedge\omega^{b}+B^{abc}\omega_{b}\wedge\omega_{c}+D^{ab}\omega\wedge\omega_{b};\\&3)\ d\omega_{a}=\theta_{a}^{b}\wedge\omega_{b}+B_{abc}\omega^{b}\wedge\omega^{c}+D_{ab}\omega\wedge\omega^{b};\\&4)\ d\theta_{b}^{a}+\theta_{c}^{a}\wedge\theta_{b}^{c}+2B^{adh}B_{hbc}\omega^{c}\wedge\omega_{d}=\\&\quad=A_{bc}^{ad}\omega^{c}\wedge\omega_{d}+B_{bcd}D^{da}\omega^{c}\wedge\omega-B^{acd}D_{db}\omega_{c}\wedge\omega.\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}&1)\ dB^{abc}+B^{dbc}\theta_{d}^{a}+B^{adc}\theta_{d}^{b}+B^{abd}\theta_{d}^{c}=B^{abcd}\omega_{d}+B^{abc0}\omega;\\&2)\ dD^{ab}+D^{cb}\theta_{c}^{a}+D^{ac}\theta_{c}^{b}=D^{abc}\omega_{c}-B^{abd}D_{dc}\omega^{c}+D^{ab0}\omega;\\&3)\ dB_{abc}-B_{dbc}\theta_{a}^{d}-B_{adc}\theta_{b}^{d}-B_{abd}\theta_{c}^{d}=B_{abcd}\omega^{d}+B_{abc0}\omega;\\&4)\ dD_{ab}-D_{cb}\theta_{a}^{c}-D_{ac}\theta_{b}^{c}=D_{abc}\omega^{c}-B_{abd}D^{dc}\omega_{c}+D_{ab0}\omega.\end{aligned}\tag{23}$$

Следствие 1. Полная группа структурных уравнений AC-структуры класса C_{11} на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид:

$$\begin{aligned}&1)\ d\omega=0;\\&2)\ d\omega^{a}=-\theta_{b}^{a}\wedge\omega^{b}+D^{ab}\omega\wedge\omega_{b};\\&3)\ d\omega_{a}=\theta_{a}^{b}\wedge\omega_{b}+D_{ab}\omega\wedge\omega^{b};\\&4)\ d\theta_{b}^{a}+\theta_{c}^{a}\wedge\theta_{b}^{c}+2B^{adh}B_{hbc}\omega^{c}\wedge\omega_{d}=A_{bc}^{ad}\omega^{c}\wedge\omega_{d};\\&5)\ dD^{ab}+D^{cb}\theta_{c}^{a}+D^{ac}\theta_{c}^{b}=D^{ab0}\omega;\\&4)\ dD_{ab}-D_{cb}\theta_{a}^{c}-D_{ac}\theta_{b}^{c}=D_{ab0}\omega.\end{aligned}$$

Следствие 2. Полная группа структурных уравнений точнейше косимплектической структуры на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид:

$$\begin{aligned}&1)\ d\omega=0;\\&2)\ d\omega^{a}=-\theta_{b}^{a}\wedge\omega^{b}+B^{abc}\omega_{b}\wedge\omega_{c};\\&3)\ d\omega_{a}=\theta_{a}^{b}\wedge\omega_{b}+B_{abc}\omega^{b}\wedge\omega^{c};\\&4)\ d\theta_{b}^{a}+\theta_{c}^{a}\wedge\theta_{b}^{c}+2B^{adh}B_{hbc}\omega^{c}\wedge\omega_{d}=A_{bc}^{ad}\omega^{c}\wedge\omega_{d};\\&5)\ dB^{abc}+B^{dbc}\theta_{d}^{a}+B^{adc}\theta_{d}^{b}+B^{abd}\theta_{d}^{c}=B^{abcd}\omega_{d};\\&6)\ dB_{abc}-B_{dbc}\theta_{a}^{d}-B_{adc}\theta_{b}^{d}-B_{abd}\theta_{c}^{d}=B_{abcd}\omega^{d}.\end{aligned}$$

В теореме 1 $\{A_{bc}^{ad}\}$ – глобально определенная система функций на пространстве присоединенной G-структуры, симметричная по верхним и нижним индексам. Они образуют чистый тензор на M^{2n+1}, называемый тензором Ф-голоморфной секционной кривизны [3]. Тензор $A: L\times L\times L\to L$ задается соотношением

$$A(X,Y,Z)=A_{bc}^{ad}X^bY^cZ_d\varepsilon_a+A_{ad}^{bc}X_bY_cZ^d\varepsilon_{\hat a}, \tag{24}$$

где $L=\ker\eta$.

Непосредственным подсчетом легко проверить, что тензор Ф-голоморфной секционной кривизны обладает свойствами:

$$A(\Phi X,Y,Z)=A(X,\Phi Y,Z)=-A(X,Y,\Phi Z)=\Phi\circ A(X,Y,Z). \tag{25}$$

В самом деле,
$$\begin{aligned}&A(\Phi X,Y,Z)=A_{bc}^{ad}(\Phi X)^bY^cZ_d\varepsilon_a+A_{ad}^{bc}(\Phi X)_bY_cZ^d\varepsilon_{\hat a}=\sqrt{-1}A_{bc}^{ad}X^bY^cZ_d\varepsilon_a-\\&-\sqrt{-1}A_{ad}^{bc}X_bY_cZ^d\varepsilon_{\hat a}=A_{bc}^{ad}X^b(\Phi Y)^cZ_d\varepsilon_a+A_{ad}^{bc}X_b(\Phi Y)_cZ^d\varepsilon_{\hat a}=A(X,\Phi Y,Z).\end{aligned}$$

Аналогично,
$$\begin{aligned}&A(\Phi X,Y,Z)=A_{bc}^{ad}(\Phi X)^bY^cZ_d\varepsilon_a+A_{ad}^{bc}(\Phi X)_bY_cZ^d\varepsilon_{\hat a}=\sqrt{-1}A_{bc}^{ad}X^bY^cZ_d\varepsilon_a-\\&-\sqrt{-1}A_{ad}^{bc}X_bY_cZ^d\varepsilon_{\hat a}=-A_{bc}^{ad}X^bY^c(\Phi Z)_d\varepsilon_a-A_{ad}^{bc}X_bY_c(\Phi Z)^d\varepsilon_{\hat a}=-A(X,Y,\Phi Z).\end{aligned}$$

Продифференцировав внешним образом равенство (22), получим:

$$dA_{bc}^{ad}+A_{bc}^{hd}\theta_h^a+A_{bc}^{ah}\theta_h^d-A_{hc}^{ad}\theta_b^h-A_{bh}^{ad}\theta_c^h=A_{bch}^{ad}\omega^h+A_{bc}^{adh}\omega_h+A_{bc0}^{ad}\omega, \tag{26}$$

где $\{A_{bch}^{ad}\}$ и $\{A_{bc}^{adh}\}$ – системы функций на пространстве присоединенной *G*-структуры, служащих компонентами взаимно сопряженных чистых тензоров типов $\begin{pmatrix}3&2\\0&0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}$ соответственно. Кроме того, получим следующие тождества:

$$\begin{aligned}
&1)\ A_{b[cd]}^{ah}=2B^{ahg}B_{gb[cd]}=-B^{ahg}B_{gcdh};\\
&2)\ A_{bc}^{a[dh]}=2B^{a[d|g|h]}B_{gbc}=-B^{ahdg}B_{gbc};\\
&3)\ A_{b[c}^{ag}B_{|g|dh]}=2B^{agf}B_{fb[c}B_{|g|dh]};\\
&4)\ A_{bg}^{a[c}B^{|g|dh]}=2B^{a[c|g}B_{gbf}B^{f|dh]};\\
&5)\ A_{b[c}^{ah}D_{|h|d]}=2B^{agh}B_{hb[c}D_{|g|d]}+B_{bcdh}D^{ha}+B^{ahg}B_{hcd}D_{gb}-B_{b[c|h}B^{hag}D_{g|d]};\\
&6)\ A_{bh}^{a[c}D^{|h|d]}=2B^{a[c|h}B_{hbg}D^{g|d]}+B_{bhg}D^{ga}B^{hcd}+B^{acdh}D_{hb}-B^{a[c|h}B_{hbg}D^{g|d]};\\
&7)\ A_{bc0}^{ad}=-D^{adh}B_{hbc}-B^{adh}D_{hbc}.
\end{aligned} \tag{27}$$

2. Компоненты тензора Римана-Кристоффеля

Поскольку для тензорных компонент формы римановой связности имеем на пространстве присоединенной *G*-структуры [3]:

$$\begin{aligned}&1)\ \theta_{\hat b}^a=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat b,k}^a\omega^k;\ \ 2)\ \theta_b^{\hat a}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,k}^{\hat a}\omega^k;\\&3)\ \theta_0^a=\sqrt{-1}\Phi_{0,k}^a\omega^k;\ \ 4)\ \theta_0^{\hat a}=-\sqrt{-1}\Phi_{0,k}^{\hat a}\omega^k;\\&5)\ \theta_a^0=-\sqrt{-1}\Phi_{a,k}^0\omega^k;\ \ 6)\ \theta_{\hat a}^0=\sqrt{-1}\Phi_{\hat a,k}^0\omega^k.\end{aligned} \tag{1}$$

Равенства (1) для NC_{11}-структуры примут вид:

$$1)\ \theta_{\hat b}^a=B^{abc}\omega_c-D^{ab}\omega;\ \ 2)\ \theta_b^{\hat a}=B_{abc}\omega^c-D_{ab}\omega;\ \ 3)\ \theta_0^a=\theta_0^{\hat a}=\theta_a^0=\theta_{\hat a}^0=0. \tag{2}$$

Дифференцируя внешним образом (2), получим:

$$
\begin{aligned}
&1)\ d\theta_{\hat b}^{a} = -B^{dbc}\theta_d^a \wedge \omega_c - B^{adc}\theta_d^b \wedge \omega_c + D^{cb}\theta_c^a \wedge \omega + D^{ac}\theta_c^b \wedge \omega + \\
&+B^{abh}B_{hcd}\omega^c \wedge \omega^d - B^{ab[cd]}\omega_c \wedge \omega_d - \left(B^{abc0} + D^{abc}\right)\omega_c \wedge \omega; \\
&2)\ d\theta_b^{\hat a} = B_{dbc}\theta_a^d \wedge \omega^c + B_{adc}\theta_b^d \wedge \omega^c - D_{cb}\theta_a^c \wedge \omega - D_{ac}\theta_b^c \wedge \omega - \\
&-B_{ab[cd]}\omega^c \wedge \omega^d + B_{abh}B^{hcd}\omega_c \wedge \omega_d - \left(B_{abc0} + D_{abc}\right)\omega^c \wedge \omega; \\
&3)\ d\theta_0^a = d\theta_0^{\hat a} = d\theta_a^0 = d\theta_{\hat a}^0 = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Расписывая вторую группу структурных уравнений римановой связности [3]

$$d\theta_j^i + \theta_k^i \wedge \theta_j^k = \frac{1}{2}R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \tag{4}$$

где $\left\{R_{jkl}^i\right\}$ – компоненты тензора Римана-Кристоффеля, на пространстве присоединенной G-структуры, получим:

$$
\begin{aligned}
&1)\ R_{bc\hat d}^a = A_{bc}^{ad} - B^{adh}B_{hbc};\quad 2)\ R_{\hat bc\hat d}^{\hat a} = -A_{ac}^{bd} + B^{bdh}B_{hac}; \\
&3)\ R_{\hat bcd}^a = R_{d\hat a\hat b}^{\hat c} = 2B^{abh}B_{hcd};\quad 4)\ R_{\hat b\hat c\hat d}^a = -2B^{ab[cd]} = -B^{acdb}; \\
&5)\ R_{bcd}^{\hat a} = -2B_{ab[cd]} = -B_{acdb},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

а остальные компоненты нулевые.

Ковариантные компоненты тензора Риччи на пространстве расслоения реперов вычисляются по формуле $S_{ij} = -R_{ijk}^k$, которая на пространстве присоединенной G-структуры, в силу (5), принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&1)\ S_{00} = 0;\ 2)\ S_{0a} = S_{a0} = 0;\ 3)\ S_{0\hat a} = S_{\hat a0} = 0; \\
&4)\ S_{ab} = S_{\hat a\hat b} = 0;\ 5)\ S_{a\hat b} = S_{\hat ba} = A_{ac}^{bc} + 3B^{bcd}B_{acd}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Тогда скалярная кривизна вычисляется по формуле:

$$\chi = 2A_{ab}^{ab} + 6B^{abc}B_{abc}. \tag{7}$$

Рассмотрим некоторые тождества на тензор Римана-Кристоффеля NC_{11}-многообразия.

1) Применим процедуру восстановления тождества [3], [6] к равенствам $R_{00a}^0 = R_{00a}^b = R_{00a}^{\hat b} = 0$, тогда получим

$$R\left(\xi, \Phi^2 X\right)\xi = 0,\ X \in X(M), \tag{8}$$

т. е. с учетом равенства $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$, имеем

$$R(\xi, X)\xi = 0,\ X \in X(M). \tag{9}$$

2) Применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R_{0ab}^0 = R_{0ab}^c = R_{0ab}^{\hat c} = 0$, получим:

$$R\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\xi - R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0,\ X, Y \in X(M). \tag{10}$$

Последнее тождество с учетом равенства $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$ и тождества (9) можно переписать в виде:

$$R(X, Y)\xi - R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0,\ X, Y \in X(M) \tag{11}$$

3) Применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R_{0a\hat b}^0 = R_{0a\hat b}^c = R_{0a\hat b}^{\hat c} = 0$, получим:

$$R\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\xi + R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0,\ X, Y \in X(M). \tag{12}$$

Последнее тождество с учетом равенства $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$ и тождества (9) можно переписать в виде:

$$R(X, Y)\xi + R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0,\ X, Y \in X(M). \tag{13}$$

Из (10) – (13) имеем

$$
\begin{aligned}
&R(X, Y)\xi = R(\Phi X, \Phi Y)\xi = \\
&= R\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\xi = 0,\ X, Y \in X(M).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

4) Применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R_{a0b}^0 = R_{a0b}^c = R_{a0b}^{\hat c} = 0$, получим:

$$R\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0,\ X, Y \in X(M). \tag{15}$$

Последнее тождество с учетом равенства $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$ и тождества (9) можно переписать в виде:

$$R(\xi, X)Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0,\ X, Y \in X(M). \tag{16}$$

5) Применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R_{a0\hat b}^0 = R_{a0\hat b}^c = R_{a0\hat b}^{\hat c} = 0$, получим:

$$R\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0,\ X, Y \in X(M). \tag{17}$$

Последнее тождество с учетом равенства $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$ и тождества (9) можно переписать в виде:

$$R(\xi, X)Y + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0,\ X, Y \in X(M). \tag{18}$$

Из (15) – (18) получим:

$$
\begin{aligned}
&R(\xi, X)Y = R(\xi, \Phi X)\Phi Y = \\
&= R\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y = 0,\ X, Y \in X(M).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

6) Рассмотрим отображение

$$B : X(M) \times X(M) \to X(M),$$

определенное по формуле:

$$B(X, Y) = B_{abc}X^bY^c\varepsilon^a + B^{abc}X_bY_c\varepsilon_a, \tag{20}$$

где $\left\{B^{abc}; B_{abc}\right\}$ – компоненты структурного тензора NC_{11}-контактной структуры.

Это отображение определяет тензор типа (2,1), называемый композиционным, и определяет в модуле *X(M)*, задающую в ней структуру Q-алгебры [8], [9]. Отображение B обладает свойствами:

$$1)\ B(\xi,Y)=B(X,\xi)=0;$$

$$2)\ B(\Phi X,Y)=B(X,\Phi Y)=-\Phi\circ B(X,Y). \qquad (21)$$

Поскольку B является тензором типа (2,1), то, по Основной теореме тензорного анализа, имеем

$$dB^i_{jk}+B^l_{jk}\theta^i_l-B^i_{lk}\theta^l_j-B^i_{jl}\theta^l_k=B^i_{jk,l}\omega^l,$$

где $\left\{B^i_{jk,l}\right\}$ – система функций, служащая на пространстве расслоения всех реперов компонентами ковариантного дифференциала тензора B. Расписывая это равенство на пространстве присоединенной G-структуры, получим:

$$1)\ B^a_{bc,0}=-D^{ab}B_{dbc};\ 2)\ B^a_{bc,\hat{d}}=-B^{adh}B_{hbc};$$

$$3)\ B^a_{b\hat{c},d}=B^{ach}B_{hbd};\ 4)\ B^a_{b\hat{c},0}=-B^{acd}D_{db};\ 5)\ B^a_{\hat{b}c,0}=B^{abd}D_{dc};$$

$$6)\ B^a_{\hat{b}c,d}=-B^{abh}B_{hcd};\ 7)\ B^a_{\hat{b}\hat{c},0}=-D^{abc};\ 8)\ B^a_{\hat{b}\hat{c},\hat{d}}=B^{abcd};$$

$$9)\ B^{\hat{a}}_{bc,0}=-D_{abc};\ 10)\ B^{\hat{a}}_{bc,d}=B_{abcd};\ 11)\ B^{\hat{a}}_{b\hat{c},0}=B_{abd}D^{dc};$$

$$12)\ B^{\hat{a}}_{b\hat{c},\hat{d}}=-B_{abh}B^{hcd};\ 13)\ B^{\hat{a}}_{\hat{b}c,0}=B_{acd}D^{db};14)\ B^{\hat{a}}_{\hat{b}c,\hat{d}}=B_{ach}B^{hbd};$$

$$15)\ B^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c},0}=-D_{ad}B^{dbc};\ 16)\ B^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c},d}=-B_{adh}B^{hbc}, \qquad (22)$$

остальные компоненты нулевые.

Применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R^0_{abc}=-B_{0bca}=0,\ R^d_{abc}=-B_{\hat{d}bca}=0,$ $R^{\hat{d}}_{abc}=-B_{dbca}$, получим:

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z-$$
$$-R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-R\left(\Phi X,\Phi Y\right)\Phi^2Z=$$
$$=-\nabla_{\Phi^2Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)+\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)+$$
$$+\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)+\nabla_{\Phi^2Z}(B)(\Phi X,\Phi Y),$$
$$X,Y,Z\in X(M). \qquad (23)$$

Последнее тождество с учетом тождеств (14) и (19) можно переписать в виде:

$$R(X,Y)Z-R(X,\Phi Y)\Phi Z-R(\Phi X,Y)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi Y)Z=$$
$$=\nabla_{\Phi^2Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)-\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)-$$
$$-\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)-\nabla_{\Phi^2Z}(B)(\Phi X,\Phi Y),$$
$$X,Y,Z\in X(M).$$

7) Применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R^0_{ab\hat{c}}=A^{0c}_{ab}-B^{0ch}B_{hab}=0,$ $R^d_{ab\hat{c}}=A^{dc}_{ab}-B^{dch}B_{hab},\ R^{\hat{d}}_{abc}=A^{\hat{d}c}_{ab}-B^{\hat{d}ch}B_{hab}=0,$ т. е. $R^i_{ab\hat{c}}=A^{ic}_{ab}-B^{ich}B_{hab}$, т. е. $R(\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}})\varepsilon_a=A(\varepsilon_a,\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{c}})+\nabla_{\varepsilon_{\hat{c}}}(B)(\varepsilon_a,\varepsilon_b)$, получим:

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z-$$
$$-R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z+R\left(\Phi X,\Phi Y\right)\Phi^2Z=$$
$$=A\left(\Phi^2Z,\Phi^2X,\Phi^2Y\right)+A\left(\Phi^2Z,\Phi X,\Phi Y\right)+$$
$$+A\left(\Phi Z,\Phi^2X,\Phi Y\right)-A\left(\Phi Z,\Phi X,\Phi^2Y\right)+$$
$$+\nabla_{\Phi^2Y}(B)\left(\Phi^2Z,\Phi^2X\right)-\nabla_{\Phi Y}(B)\left(\Phi^2Z,\Phi X\right)-$$
$$-\nabla_{\Phi Y}(B)\left(\Phi Z,\Phi^2X\right)-\nabla_{\Phi^2Y}(B)(\Phi Z,\Phi X),$$
$$X,Y,Z\in X(M). \qquad (24)$$

Полученное тождество с учетом тождеств (1.25), (14), (19) примет вид:

$$R(X,Y)Z+R(X,\Phi Y)\Phi Z-R(\Phi X,Y)\Phi Z+R(\Phi X,\Phi Y)Z=$$
$$=4A(Z,X,Y)-\nabla_{\Phi^2Y}(B)\left(\Phi^2Z,\Phi^2X\right)+\nabla_{\Phi Y}(B)\left(\Phi^2Z,\Phi X\right)+$$
$$+\nabla_{\Phi Y}(B)\left(\Phi Z,\Phi^2X\right)+\nabla_{\Phi^2Y}(B)(\Phi Z,\Phi X),\ \ X,Y,Z\in X(M).$$

8) Применяя процедуру восстановления тождества к равенствам $R^0_{\hat{a}bc}=2B^{0ah}B_{hbc}=0,$ $R^d_{\hat{a}bc}=2B^{dah}B_{hbc},\ R^{\hat{d}}_{\hat{a}bc}=2B^{\hat{d}ah}B_{hbc}=0$, получим:

$$R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+$$
$$+R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-R\left(\Phi X,\Phi Y\right)\Phi^2Z=$$
$$=-2\nabla_{\Phi^2Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)-2\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)-$$
$$-2\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)+$$
$$+\nabla_{\Phi^2Z}(B)(\Phi X,\Phi Y),\ \ X,Y,Z\in X(M). \qquad (25)$$

И это тождество с учетом тождеств (14) и (19) перепишется в виде:

$$R(X,Y)Z+R(X,\Phi Y)\Phi Z+R(\Phi X,Y)\Phi Z-$$
$$-R(\Phi X,\Phi Y)Z=2\nabla_{\Phi^2Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)+$$
$$+2\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)+2\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)-$$
$$-\nabla_{\Phi^2Z}(B)(\Phi X,\Phi Y),\ \ X,Y,Z\in X(M).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Тензор римановой кривизны NC_{11}-многообразия удовлетворяет следующим тождествам:

$$1)\ R(\xi,X)\xi=0;\ \ 3)\ R(X,Y)\xi-R(\Phi X,\Phi Y)\xi=0;$$
$$5)\ R(X,Y)\xi+R(\Phi X,\Phi Y)\xi=0;$$
$$6)\ R(X,Y)\xi=R(\Phi X,\Phi Y)\xi=0;$$
$$7)\ R(\xi,X)Y-R(\xi,\Phi X)\Phi Y=0;$$
$$9)\ R(\xi,X)Y+R(\xi,\Phi X)\Phi Y=0;$$
$$10)\ R(\xi,X)Y=R(\xi,\Phi X)\Phi Y=0;$$
$$11)\ R(X,Y)Z-R(X,\Phi Y)\Phi Z-R(\Phi X,Y)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi Y)Z=$$
$$=\nabla_{\Phi^2Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)-\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)-$$

$$\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi X,\Phi^2 Y\right)-\nabla_{\Phi^2 Z}(B)(\Phi X,\Phi Y);$$

$$12)\ R(X,Y)Z+R(X,\Phi Y)\Phi Z-R(\Phi X,Y)\Phi Z+$$
$$+R(\Phi X,\Phi Y)Z=4A(Z,X,Y)-$$
$$-\nabla_{\Phi^2 Y}(B)\left(\Phi^2 Z,\Phi^2 X\right)+\nabla_{\Phi Y}(B)\left(\Phi^2 Z,\Phi X\right)+$$
$$+\nabla_{\Phi Y}(B)\left(\Phi Z,\Phi^2 X\right)+\nabla_{\Phi^2 Y}(B)(\Phi Z,\Phi X);$$

$$13)\ R(X,Y)Z+R(X,\Phi Y)\Phi Z+R(\Phi X,Y)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi Y)Z=$$
$$=2\nabla_{\Phi^2 Z}(B)\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)+2\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi^2 X,\Phi Y\right)+$$
$$+2\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi X,\Phi^2 Y\right)-\nabla_{\Phi^2 Z}(B)(\Phi X,\Phi Y),$$
$$X,Y,Z\in X(M).$$

Следствие [2]. Тензор римановой кривизны AC-многообразия класса C_{11} удовлетворяет следующим тождествам:

$$1)\ R(\xi,X)\xi=0;\quad 2)\ R(X,Y)\xi-R(\Phi X,\Phi Y)\xi=0;$$
$$3)\ R(X,Y)\xi+R(\Phi X,\Phi Y)\xi=0;$$
$$4)\ R(X,Y)\xi=R(\Phi X,\Phi Y)\xi=0;$$
$$5)\ R(\xi,X)Y-R(\xi,\Phi X)\Phi Y=0;$$
$$6)\ R(\xi,X)Y+R(\xi,\Phi X)\Phi Y=0;$$
$$7)\ R(\xi,X)Y=R(\xi,\Phi X)\Phi Y=0;$$
$$8)\ R(X,Y)Z=R(\Phi X,\Phi Y)Z;$$
$$9)\ R(X,Y)Z-R(\Phi X,Y)\Phi Z=2A(Z,X,Y);$$
$$10)\ R(X,\Phi Y)\Phi Z+R(\Phi X,Y)\Phi Z=0;\quad X,Y,Z\in X(M).$$

В заключение рассмотрим контактные аналоги известных тождеств А. Грея кривизны почти эрмитовых многообразий. Таковыми являются тождества кривизны для почти контактных метрических многообразий:

$$CR_1:\ \left\langle R\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z,\Phi^2 W\right\rangle=\left\langle R\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)\Phi Z,\Phi W\right\rangle;$$
$$CR_2:\ \left\langle R\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z,\Phi^2 W\right\rangle=\left\langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2 Z,\Phi^2 W\right\rangle+$$
$$+\left\langle R\left(\Phi X,\Phi^2 Y\right)\Phi Z,\Phi^2 W\right\rangle+\left\langle R\left(\Phi X,\Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z,\Phi W\right\rangle;$$
$$CR_3:\ \left\langle R\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z,\Phi^2 W\right\rangle=\left\langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\right\rangle;$$
$$X,Y,Z\in X(M).$$

На пространстве присоединенной G-структуры эти тождества равносильны следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}&CR_1\ \Leftrightarrow\ R^a_{bcd}=0,\ R^a_{\hat{b}cd}=0,\ R^{\hat{a}}_{bcd}=0;\\&CR_2\ \Leftrightarrow\ R^{\hat{a}}_{bcd}=0,\ R^a_{bcd}=0;\\&CR_3\ \Leftrightarrow\ R^a_{bcd}=0.\end{aligned}\qquad(26)$$

Поскольку $R^a_{bcd}=0$, то NC_{11}-многообразие является AC-многообразием класса CR_3. С учетом (5) соотношения (26) для NC_{11}-многообразия примут вид:

$$CR_1\ \Leftrightarrow\ B_{acdb}=0,\ B^{abh}B_{hcd}=0;\quad CR_2\ \Leftrightarrow\ B_{acdb}=0.\qquad(27)$$

Пусть NC_{11}-многообразие M является AC-многообразием класса CR_2. Тогда согласно (27) $B_{acdb}=0$, т. е. согласно (23),

$$\nabla_{\Phi^2 Z}(B)\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)-\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi^2 X,\Phi Y\right)-$$
$$-\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi X,\Phi^2 Y\right)-\nabla_{\Phi^2 Z}(B)(\Phi X,\Phi Y)=0,$$
$$X,Y,Z\in X(M.\qquad(28)$$

Пусть NC_{11}-многообразие M является AC-многообразием класса CR_1. Тогда согласно (27) $B^{abh}B_{hcd}=0$. Свернем последнее равенство сначала по индексам a и c, а затем по индексам b и d, тогда получим $B^{abc}B_{abc}=\sum\limits_{a,b,c}\left|B_{abc}\right|^2=0$. Отсюда следует, что $B_{hcd}=0$. И согласно следствию к предложению 4 получим, что NC_{11}-многообразие класса CR_1 является AC-многообразием класса C_{11}. Подытожив изложенное выше, сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. NC_{11}-многообразие M является AC-многообразием класса CR_3. NC_{11}-многообразие класса CR_1 является AC-многообразием класса C_{11}. NC_{11}-многообразие M является AC-многообразием класса CR_2 тогда и только тогда, когда имеет место тождество

$$\nabla_{\Phi^2 Z}(B)\left(\Phi^2 X,\Phi^2 Y\right)-\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi^2 X,\Phi Y\right)-$$
$$-\nabla_{\Phi Z}(B)\left(\Phi X,\Phi^2 Y\right)-$$
$$-\nabla_{\Phi^2 Z}(B)(\Phi X,\Phi Y)=0,\ X,Y,Z\in X(M).$$

21.10.2012

Список литературы:

1. Рустанов, А. Р. Дифференциальная геометрия почти контактных метрических многообразий класса C_{11} / А. Р. Рустанов, Н. Н. Щипкова // Вестник ОГУ. – 2010. – № 9. – С. 65–68.
2. Рустанов, А. Р. Тождества кривизны многообразий класса C_{11} / А. Р. Рустанов, Н. Н. Щипкова // Вестник ОГУ. – 2011. – № 6. – С. 169–171.
3. Кириченко, В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко. – М. : МПГУ, 2003. – 495 с.
4. Chinea, D. Claccification of almost contact metric structures / D. Chinea, C. Gonzalez // Annali di Matematica pura ed applicata. – (IV).V.CLVI. – 1990. – P. 15–36.

5. Кириченко, В. Ф. Контактные геодезические преобразования почти контактных метрических структур / В. Ф. Кириченко, Н. Н. Дондукова // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, вып. 2. – С. 209–219.
6. Кириченко, В. Ф. Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий / В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов // Математический сборник. – 2002. – Т. 193, № 8. – С. 71–100.
7. Goldberg, S. Intesrability of almost cosymplectic structures / S. Goldberg, K. Yano // Pacif. J. Math. – 1969. – Vol. 31, № 2. – P. 373–382.
8. Кириченко, В. Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные АН-структуры / В. Ф. Кириченко // Изв. АН СССР. – Т. 47, № 6. – С. 1208–1223.
9. Кириченко, В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории контактных многообразий / В. Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – М. : ВИНИТИ РАН СССР, 1986. – Т. 18. – С. 25–71.

Сведения об авторах:
Рустанов Алигаджи Рабаданович, доцент кафедры теории и социологии
Московского педагогического государственного университета, кандидат физико-математических наук
119571, г. Москва, пр-т Вернадскаого, д. 88, корп. 1, ком. 1204, e-mail: aligadzhi@yandex.ru
Щипкова Нина Николаевна, доцент кафедры геометрии и топологии
Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2534, тел. (3532)372532, e-mail:ningeom@pochtamt.ru

UDC 514.76
Rustanov A.R., Shchipkova N.N.
E-mail: aligadzhi@yandex.ru; ningeom@pochtamt.ru

Differential geometry of almost contact metric manifolds of NC_{11} class

This paper considers a new class of almost contact metric manifolds, which generalizes the class of AC-manifolds of the C_{11} class by the classification of Chinya and Gonzalez. The complete group of structural equations for NC_{11}-manifolds derived, and components of Riemann-Christoffel tensor, Ricci tensor and the scalar curvature are computed basing on these equations. Properties of NC_{11}-manifolds are derived. Some identities of the Riemann curvature tensor are derived, too.

Key words: almost contact metric manifold, Riemann curvature tensor, Ricci tensor, F-holomorphic sectional curvature tensor, cosymplectic manifold.

Bibliography:

1. Rustanov, A. R. Differential geometry of almost contact metric manifold of class C_{11} / A. R. Rustanov, N. N. Shchipkova // Vestnik OSU. – 2010. – № 9. – P. 65–68.
2. Rustanov, A. R. The identities of the curvature manifolds of class C_{11} / A. R. Rustanov, N. N. Shchipkova // Vestnik OSU. – 2011. – № 6. – P. 169–171.
3. Kirichenko, V. F. Differential-geometric structures on manifolds / V. F. Kirichenko. – Moscow : Moscow State Pedagogical University, 2003. – 495 p.
4. Chinea, D. Classification of almost contact metric structures / D. Chinea, C. Gonzalez // Annali di Matematica pura ed applicata. – (IV).V.CLVI. – 1990. – P. 15–36.
5. Kirichenko,V. F. Contact geodesic transformations of almost contact metric structures / V. F. Kirichenko, N. N. Dondukova // Mathematical notes. – 2006. – Vol. 80, № 2. – P. 209–219.
6. Kirichenko, V. F. Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds / V. F. Kirichenko, A. R. Rustanov // Sbornik : mathematics. – 2002. – Vol. 193, № 8. – P. 71–100.
7. Goldberg, S. Integrability of almost cosymplectic structures / S. Goldberg, K. Yano // Pacif. J. Math. – 1969. – Vol. 31, № 2. – P. 373–382.
8. Kirichenko, V. F. Quasihomogeneous manifolds and generalized en-structure / V. F. Kirichenko // Math. USSR Academy of Sciences. – Vol. 47, № 6. – P. 1208–1223.
9. Kirichenko, V. F. Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of contact manifolds / V. F. Kirichenko // Results of science and technology. The problems of geometry. – Moscow : VINITI AN SSSR, 1986. – Vol. 18. – P. 25–71.