УДК 512.554.36

Кучеров А.А.
Оренбургский государственный университет
E-mail: bx24su@yandex.ru

О ПОЧТИ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ С НУЛЕВЫМ РАДИКАЛОМ ДЖЕКОБСОНА И ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНОМ РАДИКАЛЕ ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ

В работе доказывается аналог теоремы Ф. Кубо [1] для почти локально разрешимых специальных алгебр Ли с нулевым радикалом Джекобсона. Также показано, что для специальных алгебр Ли над полем характеристики нуль PI -неприводимо представленный радикал совпадает с локально нильпотентным. Приведен пример алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым.

Ключевые слова: алгебра Ли, специальная алгебра Ли, неприводимое PI -представление, радикал Джекобсона, локально нильпотентный радикал, редуктивная алгебра Ли, почти локально разрешимая алгебра Ли.

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008), Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

Эта работа направлена на выяснение некоторых аспектов гомологического описания радикала Джекобсона и локально нильпотентного радикала.

1. О почти локально разрешимых алгебрах Ли с нулевым радикалом Джекобсона

Следующее определение радикала Джекобсона было дано Е. Маршаллом: назовем радикалом Джекобсона $J(L)$ алгебры Ли L пересечение максимальных идеалов и саму алгебру L, если их нет [2] (у Е. Маршалла было только пересечение максимальных идеалов, прибавка «сама алгебра L, если их нет» добавлена Ф. Кубо для бесконечномерных алгебр Ли [3]).

Назовем нильпотентным радикалом $N(L)$ для конечномерной алгебры Ли L пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений [3].

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [2].

Е. Маршалл доказал следующую теорему.

Теорема 1. Если конечномерная алгебра Ли L над полем характеристики нуль имеет разложение Леви в прямую сумму $L = S \oplus \sigma(L)$, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где S – полупростая алгебра, а $\sigma(L)$ – разрешимый радикал L.

В формулировке следующей теоремы важную роль играет понятие подидеала. Назовем подидеалом идеал идеала алгебры Ли.

Теорема 2 ([4]). Если алгебра Ли L порождена конечномерными локальными подидеалами L, тогда радикал Джекобсона алгебры Ли L равен $J(L) = [L, \sigma(L)]$, где $\sigma(L)$ – максимальный локально разрешимый идеал L.

Свойства радикала Джекобсона для бесконечномерных алгебр Ли исследовал также Ф. Кубо [1].

Он показал, что результаты Е. Маршалла и Н. Камийя в общем случае неверны для бесконечномерных алгебр Ли даже в случае локально-конечных алгебр.

Им были также изучены бесконечномерные алгебры Ли с нулевым радикалом Джекобсона.

Теорема 3 ([1]). Пусть L – локально-конечная алгебра Ли. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ – центр алгебры L, S – подалгебра L такая, что $J(S) = 0$.

В 1963 г. В.Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [5], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI-алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$.

Назовем присоединенной ассоциативной алгеброй $\mathrm{Ad}\, L$ ассоциативную алгебру, порожденную в алгебре $\operatorname{End} L$ линейными преобразованиями $\{\operatorname{ad} x \mid x \in L\}$, где $\operatorname{ad} x(y) = [x, y], x, y \in L$.

Следующее определение, обобщающее определение В.Н. Латышева, было дано С.А. Пихтильковым [6].

Алгебра Ли L называется обобщенно специальной, если ее присоединенная алгебра $\operatorname{Ad} L$ является PI-алгеброй.

Свойство быть обобщенно специальной алгеброй сохраняется при гомоморфизмах в отличие от специальности [6], [7].

Назовем алгебру Ли L почти разрешимой (почти локально разрешимой), если в ней существует разрешимый (локально разрешимый) идеал R такой, что алгебра L/R – конечномерна.

Пусть R – идеал алгебры Ли L, G – подалгебра. Скажем, что L представима в виде полупрямого произведения $L = G\lambda R$, если:

1. $L = G + R$;

2. $G \cap R = 0$.

Пусть R – разрешимый (почти разрешимый) радикал алгебры Ли L, если он существует.

Назовем полупростую конечномерную подалгебру G алгебры Ли L подалгеброй Леви, если L представима в виде полупрямого произведения $L = G\lambda R$.

Теорема 4 (Леви [8]). Пусть L – конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль с радикалом R. Тогда в L существует полупростая подалгебра G такая, что $L = G\lambda R$.

Заметим, что подалгебра G является подалгеброй Леви.

Ю.А. Бахтурин доказал следующий аналог теоремы Леви.

Теорема 5 ([9]). Пусть L – конечно порожденная почти разрешимая специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль. Тогда в L существует подалгебра Леви.

Ю.А. Терехова следующим образом обобщила теорему Ю.А. Бахтурина.

Теорема 6 ([10]). Пусть L – специальная алгебра Ли над полем характеристики нуль, R – локально разрешимый радикал, фактор-алгебра L/R – конечномерна. Тогда в L существует полупростая конечномерная подалгебра G такая, что L представима в виде полупрямой суммы $L = G\lambda R$.

Обобщим теорему Е. Маршалла на случай почти локально разрешимых алгебр Ли. Доказательство теоремы основано на идеях из [2].

Теорема 7. Пусть L – почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Если алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus R$, где S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(L) = 0$, а S – разрешимый радикал, то $J(L) = [L, R]$.

Доказательство. Сделаем сначала очевидное замечание: радикал Джекобсона абелевой алгебры Ли равен нулю.

Следовательно, $J(L) \subset L^2$.

Пусть I – максимальный идеал алгебры L. Фактор – алгебра L/I не содержит собственных идеалов, является простой или абелевой.

Если алгебра L/I – простая, то идеал I содержит R и представим в виде $I=M+R$, где M – максимальный идеал S. Мы пользуемся тем, что алгебра $S \cap R$ является разрешимой и, следовательно, $S \cap R = 0$.

Полупростая конечномерная алгебра S над полем характеристики нуль представима в виде суммы идеалов, являющихся простыми алгебрами Ли.

Следовательно, пересечение идеалов I таких, что фактор-алгебра L/I – простая, совпадает с R и $J(L) \subset R$.

Учитывая замечание, получили $J(L) \subset L^2 \cap R$.

Если фактор-алгебра L/I – абелева, то I содержит L^2 и пересечение всех таких идеалов содержит L^2.

Пересечение всех максимальных идеалов содержит $L^2 \cap R$.

Получаем включение $J(L) \supset L^2 \cap R$.

Следовательно, $J(L) = L^2 \cap R$.

Запишем один из коммутаторов алгебры L.

Пусть $l_i = s_i + r_i$, где $i = 1,2, s_i \in S, r_i \in R$.

Тогда

$[l_1, l_2] = [g_1, g_2] + [g_1, r_2] + [r_1, g_2] + [r_1, r_2]$.

Если $[l_1, l_2] \in R$, то $[g_1, g_2] = 0$.

Тогда $[l_1, l_2] = [g_1, r_2] + [r_1, g_2] + [r_1, r_2]$.

Следует, что $L^2 \cap R \subset [L, R]$.

Включение $[L, R] \subset L^2 \cap R$ – очевидно.

Окончательно получили $J(L) = [L, R]$.

Докажем следствие, которое является аналогом теоремы Ф. Кубо.

Следствие 1. Пусть L – специальная почти локально разрешимая алгебра Ли над полем F характеристики нуль. Справедливо: $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли L имеет разложение Леви $L = S \oplus Z(L)$, где $Z(L)$ – центр алгебры L, S – конечномерная подалгебра L такая, что $J(S) = 0$.

Доказательство. Пусть L – специальная почти локально разрешимая алгебра Ли, R – ее локально разрешимый радикал.

Согласно теореме 6, для алгебры L имеет место разложение Леви $L = S + R$, где S – полупростая конечномерная алгебра, а R – локально разрешимый радикал.

Из теоремы 7 получаем $J(L) = [L, R]$.

Следовательно, $J(L) = 0$ тогда и только тогда, когда $R = Z(L)$.

2. О локально нильпотентном радикале для алгебр Ли

Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли является обобщением нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли [3], [12].

Если модуль M – конечномерный, то наибольший идеал U алгебры L такой, что эндоморфизм x_M, соответствующий элементу x, является нильпотентным для всех $x \in L$, в алгебре $End\ M$, – называется наибольшим идеалом нильпотентности представления.

Для конечномерной алгебры Ли L нильпотентный радикал $N(L)$ характеризуется также как пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений алгебры L [3].

Назовем PI-представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $End\ M^{(-)}$ модуля M над алгеброй L, для которого ассоциативная ассоциированная алгебра представления $A(L)$, порожденная образами элементов из L, является PI-алгеброй.

Обозначим через $IrrPI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L, если их нет. Назовем идеал $IrrPI(L)$ алгебры Ли L PI-неприводимо представленным радикалом.

Если алгебра Ли имеет точное PI-представление, то она является специальной. Для PI-представлений алгебр Ли можно ввести аналог наибольшего идеала нильпотентности.

Теорема 8 ([12]). Пусть алгебра Ли L имеет PI-представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M. Тогда

i) все идеалы J алгебры L такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in L$, содержатся в одном из них, например U;

ii) образ $\overline{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $End\ M$;

iii) идеал U является множеством элементов $x \in L$ таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L.

По аналогии с конечномерными алгебрами, назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности представления.

Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F.

В работе [12] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

В работе [13] показано включение $N(L) \subset IrrPI(L)$ для специальных алгебр Ли над полем F характеристики нуль. Этот результат обобщает следующая теорема.

Теорема 9. Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль справедливо равенство $N(L) = IrrPI(L)$.

Скажем, что алгебра Ли – редуктивная, если она является произведением полупростой и коммутативной подалгебр [3].

Для доказательства теоремы нам потребуется следующие леммы.

Лемма 1. Пусть Δ – тело характеристики нуль, удовлетворяющее полиноминальному тождеству.

Рассмотрим алгебру матриц $L = \Delta_n^{(-)}$ как алгебру Ли по отношению к операции коммутирования над простым подполем Q. Рассмотрим лиевский разрешимый идеал I алгебры L.

Тогда множество I лежит в центре алгебры матриц Δ_n.

Доказательство. Обозначим через Z центр тела Δ. Согласно теореме Капланского, тело Δ является конечномерным над центром Z.

Рассмотрим представление Δ_n над Δ^n (пространство векторов-столбцов) с помощью левых умножений.

Хорошо известно, что такое представление матричной алгебры над телом – неприводимо.

Алгебра L имеет точное конечномерное над Z представление. Следовательно, $N(L)=0$.

Согласно [3], алгебра Ли L – редуктивна.

Редуктивная алгебра L является произведением полупростой алгебры S и центра Z.

Полупростая конечномерная алгебра Ли S над полем характеристики нуль раскладывается в произведение простых подалгебр $\sigma_i, i = 1,...,k$.

Подалгебры σ_i являются идеалами алгебры Ли L. Любой идеал алгебры L является суммой нескольких идеалов σ_i и, возможно, Q-подпространства центра Z.

Множество ZI является разрешимым лиевским идеалом алгебры Ли L над Z. Оно не может содержать простых подалгебр σ_i.

Следовательно, $ZI \subset Z$ и $I \subset Z$.

Лемма 2. Пусть алгебра Ли L над полем F характеристики нуль имеет неприводимое PI-представление в алгебре эндоморфизмов $End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над F. Пусть I – некоторый локально разрешимый идеал L. Тогда образ $\bar{I}$ идеала I в алгебре $End(M)^{(-)}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

Доказательство. Пусть M-неприводимый $A(L)$-модуль, алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\bar{L}$ алгебры Ли L.

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI-алгеброй.

Согласно теореме Капланского [11], она простая, конечномерная над своим центром Z изоморфна алгебре матриц над телом $A(L) \cong \Delta_m, m \in N$.

Пусть $\bar{I}$ – гомоморфный образ идеала I в алгебре $A(L)$. В конечномерной алгебре локально разрешимый идеал является разрешимым.

Согласно лемме 1, идеал $\bar{I}$ лежит в центре Z алгебры $A(L)$.

Следовательно, идеал $\bar{I}$ лежит в центре алгебры $\bar{L}$.

Доказательство теоремы. Локально нильпотентный радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным [12]. Заметим, что локально нильпотентный идеал является локально разрешимым.

Пусть специальная алгебра Ли L имеет неприводимое PI-представление в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \to End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F.

Тогда, согласно лемме 2, $\varphi(N(L)) \subset Z(\varphi(L))$.

Алгебра Ли $\varphi(L)$ порождает ассоциативную алгебру $A(L)$. Ее центр $Z(\varphi(L))$ лежит в центроиде неприводимого L-модуля M.

Согласно лемме Шура [11], центроид неприводимого модуля является телом. Вложение в тело можно было также вывести из теоремы Капланского.

Следовательно, ненулевые элементы $\varphi(N(L))$ не лежат в наибольшем идеале локальной нильпотентности модуля M. Получили $\varphi(N(L))$.

Из произвольности неприводимого PI-представления M следует включение $N(L) \subset IrrPI(L)$.

Снова рассмотрим неприводимое PI-представление алгебры Ли L в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \to End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F.

Согласно пункту iii теоремы 6, наибольший идеал U локальной нильпотентности представления является пересечением $\bar{L} \cap P(A(L))$.

Первичный радикал ассоциативной алгебры $A(L)$ является локально нильпотентным идеалом алгебры $A(L)$ и, следовательно, содержится в радикале Джекобсона $P(A(L)) \subset J(L)$.

Алгебра $A(L)$ является примитивной ассоциативной алгеброй, радикал Джекобсона которой равен нулю.

Следовательно, U содержится в ядре неприводимого PI-представления M алгебры L.

Тогда в нем же будет содержаться локально нильпотентный радикал $N(L)$ алгебры Ли L.

Учитывая произвольность неприводимого PI-представления получаем включение $IrrPI(L) \subset N(L)$, которое завершает доказательство теоремы.

Также как и для специальных алгебр Ли, назовем локально нильпотентным радикалом N(L) алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F и саму алгебру Ли, если их нет.

Приведем пример алгебры Ли, локально нильпотентный радикал которой не является ни локально нильпотентным, ни локально разрешимым.

Он основан на примере Ф. Кубо [1], но используется для других целей.

Пример 1. Пусть L – множество линейных отображений конечного ранга бесконечномерного векторного пространства V над полем F в себя.

Обозначим через S множество отображений из L со следом нуль. Рассмотрим L и S как алгебры Ли по отношению к операции коммутирования.

Легко проверить, что $L^2 = S, S$ – простая алгебра Ли.

Все нетривиальные идеалы L – это векторные пространства, содержащие S.

Алгебра Ли S не является специальной и, следовательно, содержится в аннуляторах неприводимых PI-представлений.

Алгебра $H = L / S$ является абелевой. Радикал Джекобсона абелевой алгебры Ли равен нулю. Следовательно, $J(H) = 0$ и $IrrPI(H) = 0$.

Установили равенства $J(L) = S, IrrPI(L) = S$.

Фактор-алгебра $H = L / S$ – абелева и, следовательно, специальная. Локально нильпотентный радикал $N(H)$ алгебры H равен нулю. Получили $N(L) = S$.

Алгебра S не является ни локально разрешимой, ни локально нильпотентной.

Следовательно, радикал Джекобсона $J(L)$, $IrrPI(L)$ и локально нильпотентный радикал $N(L)$ произвольной алгебры Ли L могут не быть ни локально разрешимыми, ни локально нильпотентными.

14.11.2012

Список литературы:
1. Kubo, F. Infinite-dimensional Lie algebras with null Jacobson radical / F. Kubo // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Nat. Sci. – 1991. – V. 38. – P. 23–30.
2. Marshall, E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra / E. I. Marshall // J. London Math. Soc. – 1967. – V. 42. – P. 416–422.
3. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли (главы I–III) / Н. Бурбаки. – М. : Мир, 1976. – 496 с.
4. Kamiya, N. On the Jacobson radicals of infinite-dimensional Lie algebras / N. Kamiya // Hiroshima Math. J. – 1979. – V. 9. – P. 37–40.
5. Латышев, В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями / В. Н. Латышев // Сиб. мат. журнал. – 1963. – Т. 4. – Р. 821–829.
6. Пихтильков, С. А. О специальных алгебрах Ли / С. А. Пихтильков // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, № 6. – Р. 225–226.
7. Биллиг, Ю. В. О гомоморфном образе специальной алгебры Ли / Ю. В. Биллиг // Матем. сборник. – 1988. – Т. 136, № 3. – С. 320–323.
8. Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. – М. : Мир, 1964. – 355 с.
9. Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли / Ю. А. Бахтурин. – М. : Наука, 1985. – 447 с.
10. Терехова, Ю. А. О теореме Леви для специальных алгебр Ли / Ю. А. Терехова // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. – Тула : Изд-во ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1994. – С. 97–103.
11. Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. – М. : Мир, 1972. – 191 с.
12. Пихтильков, С. А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли / С. А. Пихтильков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8, вып. 3. – С. 769–782.
13. Кучеров, А. А. О гомологическом описании локально нильпотентного радикала для специальных алгебр Ли / А. А. Кучеров, С. А. Пихтильков, О. А. Пихтилькова // Вестник ОГУ. – 2010. – № 9. – С. 40–43.

Сведения об авторе:
Кучеров А.А., старший преподаватель кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, тел. (3532) 372533, e-mail: bx24su@yandex.ru

UDC 512.554.36
Kucherov A.A.
Orenburg state university, e-mail: bx24su@yandex.ru

ON ALMOST LOCALLY SOLVABLE ALGEBRAS WITH NULL JACOBSON RADICAL AND LOCALLY NILPOTENT RADICAL FOR ALGEBRAS

The analog of the F. Kubo theorem [1] for almost locally solvable special Lie algebras with null Jacobson radical is proved in the artocle. It is also shown, that for special algebras over a characteristic field zero the irreducible PI-presented radical coincides with the locally nilpotent. There is given an example the algebra which locally nilpotent radical is not neither locally nilpotent, nor locally solvable.

Key words: Lie algebra, special Lie algebra, irreducible PI-representation, Jacobson radical, locally nilpotent radical, reductive Lie algebra, almost locally solvable algebra.