

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПОЛОСЕ (СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА)

Даются примеры решения классической краевой проблемы теории упругости о распределении напряжений в прямоугольной полуполосе со свободными продольными сторонами и заданными на ее торце нормальными и касательными напряжениями. Решения строятся в виде разложений по системам функций Фадля-Папковича. Коэффициенты искомого разложения находятся в явном виде.

Ключевые слова: краевая задача, функции Фадля-Папковича, аналитические решения.

1. Формулировка краевой проблемы

Рассмотрим решение первой основной краевой задачи теории упругости в полуполосе $\{x \geq 0, |y| \leq 1\}$. Допустим, что на длинных сторонах полуполосы $y = \pm 1$ напряжения равны нулю, то есть

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad (1.1)$$

а на торце полуполосы $x = 0$ заданы напряжения

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y). \quad (1.2)$$

Условие равенства нулю граничных напряжений (1.1) не принципиально, так как в случае ненулевых граничных условий (1.1) решение будет представлять собой суперпозицию а) решения для бесконечной полосы $\{|y| \leq 1, |x| < \infty\}$ и б) решения для полуполосы с нулевыми граничными условиями (1.1) и граничными условиями

$$\sigma_x(0, y) = \sigma(y) - p(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau(y) - q(y)$$

на торце полуполосы, где $p(y)$ и $q(y)$ – соответственно нормальное и касательное напряжения в сечении $x = 0$ в решении для бесконечной полосы. Решение а) достаточно просто находится при помощи преобразования Фурье. Как правило, его удобно представлять в виде рядов по тем же системам функций Фадля-Папковича. Это легко делается при помощи теоремы о вычетах. Таким образом, в любом случае решение представляется в виде разложений по функциям Фадля-Папковича.

Кроме того, будем считать, что функция $\sigma(y)$ самоуравновешена на отрезке $|y| \leq 1$, то есть такая, что интеграл

$$\int_{-1}^1 \sigma(y) dy = 0 \quad (1.3)$$

Если это не так, то к рассматриваемому решению нужно будет добавить элементарное ре-

шение, соответствующее растяжению (сжатию) полуполосы равномерной нагрузкой равной по величине

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(y) dy.$$

Будем считать, что функция $\sigma(y)$ – четная, а $\tau(y)$ – нечетная. Тогда деформация полуполосы симметрична относительно оси x .

Благодаря введению функции Эри $\Phi(x, y)$, связанной с напряжениями известными соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, & \sigma_y(x, y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

рассматриваемую краевую задачу можно сформулировать следующим образом: найти решение бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi(x, y) = 0, \quad (1.5)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) при } y = \pm 1 \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \\ \text{b) при } x = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma(y), \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \tau(y) \\ \text{c) при } x \rightarrow \infty \quad \sigma_x(x, y) \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Последнее условие автоматически выполняется, если выполнено условие (1.3).

Обычный путь решения краевой задачи (1.5), (1.6) состоит в использовании метода разделения переменных. При этом бигармоническая функция $\Phi(x, y)$ представляется в виде произведения двух функций следующим образом:

$$\Phi(x, y) = \varphi(y) e^{\lambda x}. \quad (1.7)$$

Подставляя выражение (1.7) в уравнение (1.5) и граничные условия (1.6а), приходим к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального оператора

$$\frac{d^4 \varphi}{dy^4} + 2\lambda^2 \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \lambda^4 \varphi = 0, \quad (1.8)$$

$$\varphi(\pm 1) = \frac{d\varphi}{dy}(\pm 1) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(\lambda_k, y),$$

где $\varphi(\lambda_k, y)$ и λ_k ($k \geq 1$) – соответственно, собственные функции и собственные числа краевой задачи (1.8), а числа a_k – неизвестные коэффициенты разложений. Тогда функция $\Phi(x, y)$ будет иметь вид

$$\Phi(x, y) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}. \quad (1.9)$$

Числа λ_k – множество $\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ всех комплексных нулей целой функции экспоненциального типа равного 2

$$L(\lambda) = \lambda + \sin \lambda \cos \lambda$$

с вещественной частью $\text{Re } \lambda_k < 0$. Числа λ_k асимптотически близки к числам $k\pi$. Это видно из следующего асимптотического равенства, справедливого при больших значениях номера корня $k \geq 1$

$$\lambda_k \approx (k\pi - \frac{\pi}{4} - \varepsilon_k) + \frac{i}{2} \ln(4k\pi - \pi - \varepsilon_k),$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{4k\pi} \ln(4k\pi - \pi)$$

Неизвестные коэффициенты разложения C_0, C_1, a_k ($k \geq 1$) должны быть найдены из граничных условий (1.6б), что приводит к известной проблеме разложения двух заданных на торце полуполосы функций $\sigma(y)$ и $\tau(y)$ в ряды (μ – коэффициент Пуассона)

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= C_1 + (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \sigma_x(\lambda_k, y), \\ \tau(y) &= (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 \tau_{xy}(\lambda_k, y) \quad y \in (-1, 1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Коэффициенту C_1 отвечает элементарное (сопроматовское) решение. Поэтому его можно считать известным. Окончательные формулы для напряжений в полуполосе имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= C_1 + (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \sigma_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \sigma_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= (1 + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 \tau_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Следующие функции называются функциями Фадля-Папковича:

$$\begin{aligned} \sigma_x(\lambda_k, y) &= (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ \sigma_y(\lambda_k, y) &= (\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ \tau_{xy}(\lambda_k, y) &= \cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y. \end{aligned} \quad (1.12)$$

С ростом номера корня числа λ_k все плотнее прижимаются к вещественной оси (так как $\frac{\text{Im } \lambda_k}{\text{Re } \lambda_k} \rightarrow 0$, когда $k \rightarrow \infty$). Поэтому можно ожидать определенной близости свойств сходимости рядов по функциям Фадля-Папковича и рядов по обычным тригонометрическим системам функций $\{\cos k\pi y\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\sin k\pi y\}_{k=1}^{\infty}$, которые получаются из (1.12), если принять $\lambda_k = k\pi$. С другой стороны, числа λ_k комплексные и их вдвое больше чем чисел $\pm k\pi$. Поэтому системы функций (1.12) будут, во-первых, комплекс-

нозначными и, во-вторых, вдвое более плотными на интервале $(-1, 1)$, чем тригонометрические системы функций, то есть переполненными на этом отрезке. Тогда как тригонометрические системы функций минимальны на нем. Эти два принципиальных отличия систем функций Фадля-Папковича и тригонометрических систем функций (комплекснозначность и неминимальность) являются причиной значительных различий разложений по функциям Фадля-Папковича и разложений по обычным тригонометрическим системам функций.

Так как числа λ_k комплексно сопряжены, то равенства (1.10), из которых нужно найти неизвестные коэффициенты разложений $\{a_k, \bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$, можно записать в следующей форме (множитель $(1 + \mu)$ внесен в a_k):

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \sigma_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \bar{\lambda}_k \sigma_x(\bar{\lambda}_k, y) \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^2 \tau_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \bar{\lambda}_k^2 \tau_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \end{cases} \quad (1.13)$$

2. Решение краевой задачи

Системы функций

$\{\sigma_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\sigma_y(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tau_{xy}(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ не образуют базиса на интервале $(-1, 1)$ и поэтому они не имеют биортогональных к ним систем функций на этом интервале. Следовательно, указать явные формулы для коэффициентов в разложениях (1.13) на основе классической теории базиса невозможно. Однако их можно определить на основе теории развитой в работах [1], [2]. Вкратце способ построения систем функций, биортогональных к функциям Фадля-Папковича, состоит в следующем.

Рассмотрим систему функций $\sigma_x(\lambda_k, y)$. Обозначим

$$\sigma_x(\lambda, y) =$$

$$= (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) \cos \lambda y - \lambda y \sin \lambda \sin \lambda y \quad (2.1)$$

функцией, порождающей соответствующую систему функций Фадля-Папковича (1.12), когда параметр $\lambda = \lambda_k$, и допустим, что на вещественной оси y имеется некоторая (зависящая от чисел λ_v) система четных функций $s_v(y)$ такая, что для нее выполняются равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\lambda, y) s_v(y) dy = \frac{L(\lambda)}{(\lambda^2 - \lambda_v^2) r_v} = R_v(\lambda),$$

$$r_v = \lambda_v^2 - \bar{\lambda}_v^2, v \geq 1. \quad (2.2)$$

Можно показать, что функции $s_v(y)$ не финитны и значит интеграл (2.2) не существует для комплексных значений $\lambda = \lambda_v$. Поэтому система функций, биортогональная к функциям Фадля-Папковича $\{\sigma_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$, вообще не может быть определена на вещественной оси. Решение проблемы заключается в аналитическом продолжении преобразования Фурье функций $s_v(y)$ до класса квазицелых функций экспоненциального типа равного 2. При этом контур интегрирования в интеграле (2.2) нужно будет

соответствующим образом деформировать. Обозначим этот контур через T . Конфигурация контура для дальнейших целей не важна. Важно лишь то, что такой контур существует.

В классе квазицелых функций экспоненциального типа 2 функции $s_v(y)$ существуют и определяются единственным образом. Не смотря на весьма сложные промежуточные преобразования, окончательные выражения для финитной части функции $s_v(y)$, которая непосредственно участвует в определении коэффициентов искомых разложений, просты и имеют такой вид:

$$\psi_v(y) = \begin{cases} \frac{1}{2r_v} \frac{\cos \lambda_v y}{\lambda_v \sin \lambda_v} & |y| \leq 1 \\ 0 & |y| > 1 \end{cases}$$

Аналогично (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}(\lambda, y) t_v(y) dy &= R_v(\lambda) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y(\lambda, y) \xi_v(y) dy &= \lambda^2 R_v(\lambda), \quad v \geq 1, \lambda \in R \end{aligned} \quad (2.3)$$

При определении коэффициентов a_k понадобится также финитная часть функции $t_v(y)$, являющаяся аналогом функции $\psi_v(y)$. Она имеет вид

$$\varphi_v(y) = \frac{d\psi_v(y)}{dy} = \frac{1}{2r_v} \frac{\sin \lambda_v y}{\sin \lambda_v}.$$

Осталось привести сами соотношения биортогональности, которые получаются в результате подстановки в формулы (2.2), (2.3) $\lambda = \lambda_k$

$$\begin{aligned} \int_T \sigma_x(\lambda_k, y) s_v(y) dy &= \begin{cases} M_k & \lambda_k = \lambda_v, \\ 0 & \lambda_k \neq \lambda_v, \end{cases} \\ \int_T \tau_{xy}(\lambda_k, y) t_v(y) dy &= \begin{cases} M_k & \lambda_k = \lambda_v, \\ 0 & \lambda_k \neq \lambda_v, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\int_T \sigma_y(\lambda_k, y) \xi_v(y) dy = \begin{cases} \lambda_k^2 M_k & \lambda_k = \lambda_v, \\ 0 & \lambda_k \neq \lambda_v, \end{cases}$$

$$M_k = \frac{\cos^2 \lambda_k}{\lambda_k (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)}.$$

Спроектируем первое равенство (1.13) на вещественное направление $\{s_v(y) + \bar{s}_v(y)\}$, а второе – на вещественное направление

$\{t_\nu(y) + \bar{t}_\nu(y)\}$. В силу соотношений биортогональности (2.5), для каждого номера $\nu \geq 1$ следующую систему из двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sigma_\nu^* = a_\nu \lambda_\nu M_\nu + \overline{a_\nu \lambda_\nu M_\nu} \\ \tau_\nu^* = a_\nu \lambda_\nu^2 M_\nu + \overline{a_\nu \lambda_\nu^2 M_\nu} \end{cases}, \quad (2.6)$$

где числа

$$\begin{aligned} \sigma_\nu^* &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) [\psi_\nu(t) + \overline{\psi_\nu(t)}] dt = \sigma_\nu + \overline{\sigma_\nu} \\ \tau_\nu^* &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) [\varphi_\nu(t) + \overline{\varphi_\nu(t)}] dt = \tau_\nu + \overline{\tau_\nu} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решая систему уравнений (2.6), найдем коэффициенты разложений

$$a_k = \frac{\tau_k^* - \sigma_k^* \overline{\lambda_k}}{(\lambda_k - \overline{\lambda_k}) \lambda_k N_k}, N_k = \frac{\cos^2 \lambda_k}{\lambda_k}. \quad (2.8)$$

Осталось подставить их в разложения (1.11). Полученные формулы, как показано в работе [3], содержат в неявном виде нетривиальные разложения нуля (что обусловлено комплекснозначностью систем функций Фадля-Папковича). Для получения надежных численных результатов нуль-ряды нужно выделять. Как это делается, также можно найти в [3].

Приведем окончательные зависимости (с выделенными нуль-рядами) для напряжений в полуплоскости, разбив на две группы: когда на торце полуплоскости приложены только нормальные напряжения, а касательные равны нулю и наоборот (нормальные нагрузки равны нулю, а касательные – нет)

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{N_k} e^{c_k x} \sigma_k \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{N_k} e^{c_k x} \sigma_k \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\sigma_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sigma_y(\lambda_k, y)}{N_k \lambda_k^2} e^{c_k x} \sigma_k \lambda_k \overline{\lambda_k} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\},$$

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sigma_x(\lambda_k, y)}{N_k} e^{c_k x} \tau_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right\},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tau_{xy}(\lambda_k, y)}{N_k} e^{c_k x} \tau_k \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) \right\}, \quad (2.10)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sigma_y(\lambda_k, y)}{N_k \lambda_k^2} e^{c_k x} \tau_k \left(2c_k \cos b_k x + \frac{c_k^2 - b_k^2}{b_k} \sin b_k x \right) \right\}.$$

Здесь введены обозначения: $c_k = \operatorname{Re} \lambda_k$, $b_k = \operatorname{Im} \lambda_k$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \int_{-1}^1 \sigma(y) \frac{\cos \lambda_k y}{2 \lambda_k \sin \lambda_k} dy, \\ \tau_k &= \int_{-1}^1 \tau(y) \frac{\sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} dy. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Эти формулы получаются непосредственно из формул (2.7) и выражений для функций $\psi_\nu(y)$ и $\varphi_\nu(y)$. Таким образом, полученные решения принципиально не сложнее известных решений

Файлона-Рибьера в тригонометрических рядах. Более того, можно показать, что когда числа $c_k \rightarrow k\pi$, а числа $b_k \rightarrow 0$ для всех $k \geq 1$ они превращаются в периодические решения для полуплоскости с заданными на торце полуплоскости нормальными или касательными напряжениями.

3. Примеры

Рассмотрим два примера.

1. Пусть на торце полуплоскости заданы только нормальные напряжения, представленные ступенчатой функцией

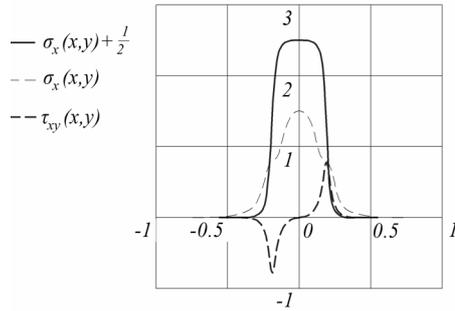


Рисунок 1. График распределения напряжения для расчетного сечения $x = 0.05$

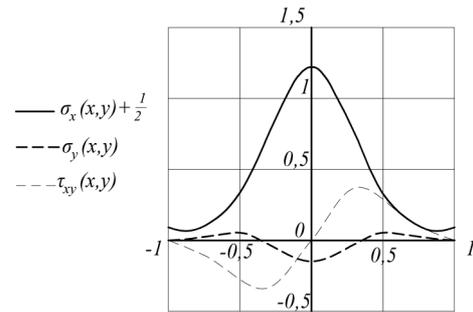


Рисунок 2. График распределения напряжения для расчетного сечения $x = 0.5$

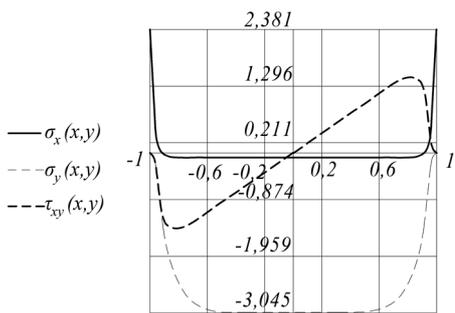


Рисунок 3. График распределения напряжения для расчетного сечения $x = 0.05$

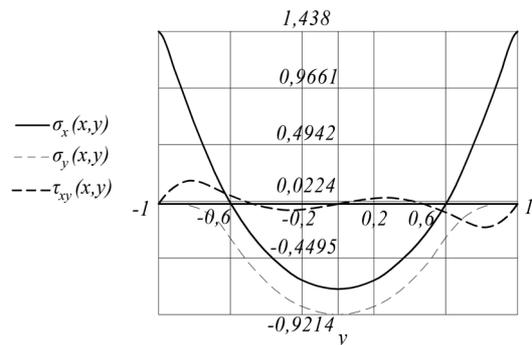


Рисунок 4. График распределения напряжения для расчетного сечения $x = 0.5$

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1/2a, & |y| \leq a \\ 0, & a < |y| \leq 1 \end{cases}$$

В этом случае $C_1 = -1/2$. По формуле (2.11) находим

$$\sigma_k = \int_{-a}^a \frac{1}{2a} \frac{\cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k} dy = \frac{\sin \lambda_k a}{2a\lambda_k^2 \sin \lambda_k}$$

Подставляя эти числа в формулы (2.9) получим решение задачи. Ниже приведены графики распределения напряжений для двух расчетных сечений: $x = 0.05$ (рис. 1) и $x = 0.5$ (рис. 2).

2. Пусть на торце полуполосы заданы только касательные напряжения $\tau(y) = -2y$. По второй формуле (2.11) находим

$$\tau_k = \int_{-1}^1 (-2y) \frac{\sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k} dy = \frac{2 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k}$$

Подставляя эти числа в формулы (2.10) получим решение задачи. Ниже приведены графики распределения напряжений для двух расчетных сечений: $x = 0.05$ (рис. 3) и $x = 0.5$ (рис. 4).

12.07.2012

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-05-00767-а)

Список литературы:

1. Коваленко, М.Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады РАН. – 1997. – Т. 352, №4. – С. 480–482.
2. Коваленко, М.Д. О преобразовании Бореля в классе W квазицелых функций // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – Т. 7, Вып. 3. – С. 761–774.
3. Коваленко М.Д., Клейн Н.В., Попов С.Н. Однородные решения теории упругости. Базисные свойства // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11, №2. – С. 209–225.

Сведения об авторе: **Гоголева Ольга Сергеевна**, старший преподаватель кафедры сопротивления материалов Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, тел. (3532) 372513, e-mail: kov08@inbox.ru