

КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ УСЛОЖНЯЮЩИХ ФАКТОРОВ

Предложена математическая модель, позволяющая определять частоты собственных колебаний тонкостенных стержней замкнутого профиля при различных значениях безразмерных параметров. Учет деформаций сдвига, эффекта Кармана и растяжения средней линии сечения при исследовании колебаний тонкостенного стержня позволил обнаружить дополнительную частоту и существенные различия в частотах, не учитывающих усложняющие факторы.

Ключевые слова: тонкостенный стержень, замкнутый профиль, деформация сдвига, эффект Кармана, растяжение срединной линии, сечение.

Тонкостенные криволинейные стержни рассматривались в работах разных авторов, в частности, в работах Е.А. Бейлина и его учеников. В них изучались задачи определения напряженно-деформированного состояния с учетом эффекта Кармана для стержней замкнутого контура.

В [1, 2] была предложена динамическая теория тонкостенных криволинейных стержней с учетом сдвигов, инерции вращения сечений и эффекта Кармана.

В работе [3] рассматривались свободные колебания тонкостенного криволинейного шарнирно-опертого стержня, полученные на основании уравнений (1) динамической теории тонкостенных криволинейных стержней, представленные в [2].

В данной работе исследуются колебания прямолинейного тонкостенного стержня замкнутого контура. На основании следующих уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\alpha G}{K_1} \left[\alpha^* \left(\varepsilon'' - \frac{\zeta}{R} - \beta' \right) - c f'' \right] - \frac{EF}{R} \left(\zeta - \frac{\varepsilon}{K} \right) &= 0; \\ \rho F \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - EF \left(\zeta'' - \frac{\varepsilon'}{R} \right) + \frac{\alpha G}{RK_1} \left[\alpha \left(\varepsilon' + \frac{\zeta'}{R} - \beta \right) - c f_2' \right] &= 0; \\ \rho I \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - \alpha_1 \frac{EI}{B} \left[\alpha_1 \beta'' + \frac{I}{R_1 R} (I f_1' + g f_1') \right] - \frac{\alpha G}{K_1} \left[\alpha \left(\varepsilon' + \frac{\zeta}{R} - \beta \right) - c f_2' \right] &= 0; \\ \rho F_{11} \frac{R_1^2 \partial + F_2}{R^2 \partial \varphi^2 \partial t^2} - \rho F_{22} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} - \frac{I_{22} E}{I_2 R_1} (I_{r\omega} f_1 - I_{2V} f_2) + \frac{c G}{K_1} \left[\alpha \left(\varepsilon'' + \frac{\zeta}{R} - \beta' \right) - c f_2'' \right] + \\ + \frac{IEI}{bRR_1} \left[\alpha_1 \beta' + \frac{1}{RR_1} (I f_2 + g f_1) \right] + I_v^2 \frac{E}{\rho^*} f_2 &= 0; \\ \rho \bar{I}^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{f_1}{R_1} \right) + g \frac{E \bar{I}}{R_B} \left[\alpha_1 \beta' + \frac{1}{RR_1} (I f_2 + g f_1) \right] + \frac{I_2 W^E}{I_2 R_4} (I_{2W} F_1 + I_{2V} f_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначения соответствуют принятым в [3].

В данной работе рассмотрим частный случай уравнений для прямолинейного стержня. Примем радиус кривизны R срединной линии сечения стержня равным ∞ и приходим к следующим уравнениям (2):

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\alpha G}{K_1} [\alpha (\xi'' - \beta') - c f_2''] &= 0; \\ \rho F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - EFS'' &= 0; \end{aligned}$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - \frac{\alpha_1 EI}{b} \alpha_{1\beta'} - \frac{\alpha G}{K_1} [\alpha(\xi' - \beta) - cf_2'] = 0; \quad (2)$$

$$\rho F_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} - \frac{I_{2V} E}{I_2 R_1^2} (I_{2\omega} f_1 - I_{2V} f_2) + \frac{cG}{K_1} [\alpha(\xi'' - \beta') - cf_2''] + I_V^2 \frac{E}{\rho^*} f_2 = 0;$$

$$\rho I^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{f_1}{R_1} \right) + \frac{I_{2W} E}{I_2 R_1} (I_{2W} F_1 + I_{2V} f_2) = 0.$$

Выбираем решения данной системы, удовлетворяющие условиям шарнирного закрепления. Разделив переменные по методу Фурье, принимаем решение в виде

$$\zeta = A_1 I^{i\omega t} \cos \frac{z}{\lambda}; \quad \xi = A_2 I^{i\omega t} \sin \frac{z}{\lambda}; \quad \beta = A_3 I^{i\omega t} \cos \frac{z}{\lambda}; \quad (3)$$

$$f_1 = A_4 I^{i\omega t} \sin \frac{z}{\lambda}; \quad f_2 = A_5 I^{i\omega t} \sin \frac{z}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{I}{n\pi},$$

где I – длина стержня, n – число полуволн.

Подставим (2) в (1), получим систему алгебраических уравнений относительно амплитуд A_i

$$\begin{aligned} -sF\omega^2 A_2 - \frac{\alpha G}{K_1} \left[\alpha \left(-A_2 \frac{I}{\lambda^2} + A_3 \frac{1}{\lambda} \right) + CA_5 \frac{I}{\lambda^2} \right] &= 0; \\ -sF\omega^2 A_3 - \frac{\alpha_1^2 EG}{b_1 \lambda^2} A_3 - \frac{\alpha G}{K_1} \left[\alpha \left(-A_2 \frac{I}{\lambda^2} - A_3 \right) - CA_5 \frac{I}{\lambda} \right] &= 0; \\ -s\bar{I}^* \frac{I}{R_1} A_4 \omega^2 + \frac{I_{2\omega} E}{I_2 R_1} (I_{2\omega} A_4 - I_{2V} A_5) &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$sF_2 \omega^2 A_5 - \frac{I_{2V} E}{I_2 R_1^2} (I_{2\omega} A_4 - I_{2V} A_5) + \frac{cG}{K_1} \left[\alpha \left(-A_2 \frac{I}{\lambda^2} + A_3 \frac{I}{\lambda} \right) + CA_5 \frac{I}{\lambda} + I_V^2 \frac{E}{\rho^*} A_5 \right] = 0.$$

Предположим, что деформации срединной линии контура сечения равны нулю. Тогда, используя условия нетривиальности решения, придем к частному определителю (5) четвертого порядка относительно ω^{*2} , где ω^* – безразмерная частота.

$$d_{et} // b_{ij} // = 0 (i, j = 1, 2, \dots),$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\alpha^2 GI^4}{b_1 \lambda^2 EI} - \omega^{*2}; & b_{12} &= \frac{\alpha^2 GeI}{K_1 \lambda EI}; \\ b_{13} &= 0; & b_{14} &= \frac{\alpha GeI^4}{K_1 \lambda^2 EI}; \\ b_{21} &= \frac{\alpha^2 GI^4 F}{K_1 \lambda EI}; & b_{22} &= \frac{\alpha^2 I^4 F}{b_1 \lambda^2 \bar{I}} - \omega^{*2} + \frac{\alpha^2 GI^4 F}{K_1 \lambda EI}; \\ b_{23} &= 0; & b_{24} &= \frac{\alpha Ge}{K_1 \lambda EI}; \\ b_{31} &= -\frac{cGL^4 F}{K_1 \lambda EI \bar{F}_2}; & b_{32} &= -\frac{cG\alpha I^4 F}{K_1 \lambda EI \bar{F}_2}; \\ b_{33} &= \frac{I_{2\omega} I_{2V} I^4 F}{I_2 R_1^2 \bar{I} F_2}; \\ b_{34} &= \omega^{*2} + \frac{I_{2V}^2 I^4 F}{IK_1^2 \bar{I} F_2} + \frac{c^2 GI^4 F}{K_1 \lambda EI \bar{F}_2}; \\ b_{41} &= 0; & b_{42} &= 0; & b_{43} &= \frac{I_{2\omega}^2 I^4 F}{I_2 \bar{I}^2} - \omega^{*2}; \\ b_{44} &= -\frac{I_{2\omega} I_{2V} F}{I_2 \bar{I}^2}; & \bar{\omega} &= \frac{\omega^{*2}}{I^4 \rho F} EI. \end{aligned} \quad (5)$$

Раскрывая частный определитель, приходим к частному уравнению (6) 4-й степени относительно $\bar{\omega}^* = \omega^{*2}$.

$$\bar{\omega}^{*4} + \tau_1 \bar{\omega}^{*3} + \tau_2 \bar{\omega}^{*2} - \tau_3 \omega^* + \tau_4 = 0 \quad (6)$$

Уравнение (6) дает четыре спектра частот, что соответствует четырем формам собственных колебаний стержня и описывает изгибно-продольные сдвиговые колебания.

Пронумеруем частоты полученного спектра. Первая полученная частота ω^* соответствует преимущественно искажениям контура сечения от его изгиба. Две последующие частоты ω_2^* и ω_3^* связаны с преимущественно продольными движениями оси стержня и растяжением срединной линии контура сечения.

На основании уравнения (6) были вычислены частоты собственных колебаний шарнирно-опертого тонкостенного стержня кольцевого сечения при

$$\frac{\delta^*}{R} = 0.02, \quad \frac{l}{h} = 20, \quad h = 2R. \quad (\text{рис. 1})$$

Сплошными линиями на графике обозначены зависимости, учитывающие все усложняющие факторы (искажения контура от изгиба,

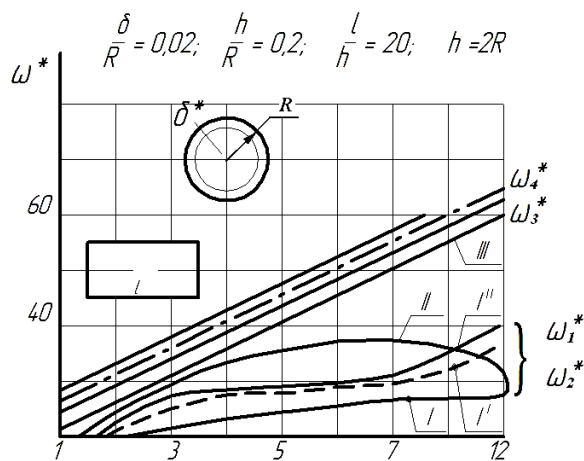


Рисунок 1. Частоты собственных колебаний шарнирно-опертого тонкостенного стержня кольцевого сечения

растяжения срединной линии, а также деформации сдвига поперечного сечения); штриховые линии отвечают частотам колебаний, подсчитанным без учета искажения контура, и, наконец, штрихпунктирные линии относятся к частотам, вычисленным по классической теории (без учета деформаций сдвига и искажения контура).

Кратко охарактеризуем полученные результаты. На графике приведены зависимости безразмерной частоты ω^* для замкнутого профиля от числа полуволн n .

Кривая I соответствует низшей частоте и относится к колебаниям с преимущественно изгибными деформациями стержня. Из графиков следует, что пренебрежение искажением контуров и деформации сдвига существенно сказывается на значениях частот; отмеченное особенно отчетливо проявляется при увеличении числа полуволн n (I, I', I'').

Кривая II относится к обнаруженному нами типу колебаний, в которое основной вклад вносит искажение контура сечения. Снижение градиента изменения ω^* с увеличением числа n объясняется тем, что с увеличением числа полуволн количество переменных формы искажения сечения увеличивается и относительный вклад в величину частоты ω^* и при переходе от n -ой к $n + 1$ -ой форме уменьшается.

Кривая III соответствует колебаниям, в которые основной вклад вносят деформации удлинения оси контура. Кривая VI соответствует спектру колебаний с преимущественно продольными деформациями сдвигов весьма незначительно.

На основании полученного решения можно сделать следующие выводы:

1. Учет эффекта Кармана и растяжения срединной линии сечения оказывает существенные изменения частот свободных колебаний тонкостенного стержня замкнутого контура.

2. Построенная теория дает возможность получить дополнительную частоту колебаний стержня, в которую основной вклад вносит эффект Кармана (кривая II на рисунке 1).

10.07.2012

Список литературы:

1. Корбут Б.А., Лазарева Г.В. (Куча Г.В.) О динамической теории тонкостенных криволинейных стержней // Прикл. механика. – 1982. – Т. XXIII. – №5. – С. 98–104.
 2. Куча Г.В., Рухлина А.Н. Динамическая теория тонкостенных криволинейных стержней замкнутого профиля / ОГУ. – Оренбург.

3. Бейлин Е.А., Лазарева Г.В. (Куча Г.В.) Определение частот свободных изгибно-крутильных колебаний тонкостенных криволинейных стержней с учетом деформации вращения сечений / Ленингр. инж.-строит. ин-т. – Л., 1985. – 13 с. Деп. ВИНТИ, 20.08.85 № 6143-85 ДЕП.

Сведения об авторах:

Куча Галина Васильевна, доцент кафедры теоретической механики Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук, доцент

Мосалева Ирина Ивановна, старший преподаватель кафедры теоретической механики Оренбургского государственного университета

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 4505, тел. (3532) 372563, e-mail: teorm@mail.osu.ru

UDC 519.86:534.114

Kucha G.V., Mosaleva I.I.

Orenburg state university, e-mail: teorm@mail.osu.ru

FLUCTUATIONS OF THE THIN-WALLED CORE IN VIEW OF COMPLICATING FACTORS

The account of deformations of shift, effect of the Karman and stretching of an average line of section at research of fluctuations of a thin-walled core will allow to detect additional frequency and essential distinctions in the frequencies which are not considering complicating factors. The mathematical model, allowing to define frequency of own fluctuations of thin-walled cores of the closed structure is offered at various values of dimensionless parameters.

Key words: the thin-walled core, the closed structure, deformation of shift, effect of the Karman, a stretching of a median line, section.

Bibliography:

1. Korbut B.A., Lazareva G.V. (Kucha G.V.) About the dynamic theory of thin-walled curvilinear cores // Prikl. mechanics. – 1982. – Vol. XXIII. – №5. – P. 98–104.
2. Kucha G.V., Ruhlina A.N. Dynamic theory of thin-walled curved rods closed profile / OSU. – Orenburg.
3. Beilin E.A., Lazarev G.V. (Kucha G.V.) Definition of free frequencies of flexural-torsional vibrations of thin-walled curved rods with consideration of deformation rotation sections / Leningr. ing.-builds. ying-t. – L., 1985. – 13 p. Chairman. TECHNICAL INFORMATION, 20.08.85 No. 6143-85 STA