

## ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

**Разработана методика прочностных расчетов тонкостенных стержней, совершающих свободные изгибные колебания, учитывающая необходимую для данных стержней жесткость. Определены зависимости между напряжениями, возникающими в стержнях и допускаемыми перемещениями сечений стержней.**

**Ключевые слова:** стержень, колебания, прочность, жесткость, изгибающий момент, напряжение.

В настоящее время тонкостенные стержневые системы достаточно широко распространены в строительстве, так как обладают меньшей ресурсоемкостью по сравнению с массивными стержнями.

При исследовании колебательных процессов в тонкостенных стержнях, как правило, определяются частоты собственных колебаний. Данные частоты позволяют исследовать возможность возникновения резонанса и соответствующих ему амплитуд колебаний. Тем не менее, в процессе колебаний стержни могут разрушиться не только вследствие резонансных явлений, но и в связи с их недостаточной прочностью. После снятия внешних нагрузок, стержень продолжает колебаться. Изменение формы говорит о наличии в сечениях стержня внутренних силовых факторов, а, следовательно, и напряжений, вызванных колебаниями. Если данные напряжения превысят допускаемые значения, то произойдет разрушение стержня.

Исходя из вышеизложенного, целью исследования являлась разработка методики определения максимальных напряжений, возникающих в стержнях при колебаниях с амплитудами, удовлетворяющими заданным условиям жесткости.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1) определение главных форм свободных изгибных колебаний тонкостенного стержня исходя из обеспечения желаемой жесткости;

2) определение внутренних силовых факторов и максимальных напряжений в сечениях стержня и проверка условий прочности.

Свободные колебания тонкостенных стержней по теории, учитывающей сдвиги, рассмотрены в [1]. Дальнейшее исследование уравнений с получением форм колебаний в виде мат-

ричного уравнения с использованием метода граничных условий представлено в [2].

Матричное уравнение изгибных колебаний стержня в безразмерных величинах:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}(z) \\ \beta_1(z) \\ \tilde{M}_1(z) \\ \tilde{Q}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) & A_{13}(z) & A_{14}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) & A_{23}(z) & A_{24}(z) \\ A_{31}(z) & A_{32}(z) & A_{33}(z) & A_{34}(z) \\ A_{41}(z) & A_{42}(z) & A_{43}(z) & A_{44}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}(0) \\ \beta_1(0) \\ \tilde{M}_1(0) \\ \tilde{Q}_2(0) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $\tilde{\eta}(z) = \frac{\eta(z)}{h}$ ,  $\beta_1(z)$ ,  $\tilde{M}_1(z) = \frac{M_1(z)h}{EJ_1}$ ,

$\tilde{Q}_2(z) = \frac{Q_2(z)}{\rho F \omega^2 h^2}$  – безразмерные характеристики прогиба, угла поворота сечения, изгибающего момента и поперечной силы;

$$\tilde{\eta}(0) = \frac{\eta(0)}{h}, \quad \beta_1(0), \quad \tilde{M}_1(0) = \frac{M_1(0)h}{EJ_1},$$

$\tilde{Q}_2(0) = \frac{Q_2(0)}{\rho F \omega^2 h^2}$  – безразмерные значения значений прогиба, угла поворота сечения, изгибающего момента и поперечной силы в сечении на левом конце стержня;

$A_{ij}(z)$  – элементы матрицы, рассмотренные в [2];

$\rho$  – плотность материала стержня, кг/м<sup>3</sup>;

$E$  – модуль упругости, Н/м<sup>2</sup>;

$F$  – площадь сечения стержня, м<sup>2</sup>;

$J_1$  – осевой момент инерции, м<sup>4</sup>;

$h$  – высота сечения (принимается за характерный размер), м;

$\omega$  – частота свободных колебаний, с<sup>-1</sup>.

Дальнейшее решение будет зависеть от способа закрепления стержня. Условий закрепления достаточно для определения частоты свободных колебаний, но для определения форм колебаний необходимы дополнительные условия. Такими условиями могут быть требования,

предъявляемые к жесткости конструкции, в частности, при изгибе – ограничения по допусжаемому прогибу.

Например, при шарнирном закреплении концов стержня граничные условия имеют вид:

$$\tilde{\eta}(0) = 0, \tilde{M}_1(0) = 0, \tilde{\eta}(l) = 0, \tilde{M}_1(l) = 0, \quad (2)$$

где  $l$  – длина стержня, м.

Тогда зависимость между оставшимися неизвестными условиями на левом конце стержня будет иметь вид:

$$\frac{\beta_1(0)}{\tilde{Q}_2(0)} = \sqrt{\frac{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}{A_{12}(l) \cdot A_{32}(l)}}. \quad (3)$$

Максимальное значение прогиба  $\tilde{\eta}_{\max}$  соответствует первой главной форме колебаний и находится при  $z = l/2$ . Таким образом, условие жесткости принимает вид:

$$\tilde{\eta}_{\max} = \tilde{\eta}(l/2) \leq \frac{[\eta]}{l}. \quad (4)$$

Выражение (4) в совокупности с (2), позволяет определить оставшиеся неизвестные граничные условия:

$$\beta_1(0) = \frac{\tilde{\eta}_{\max}}{A_{12}(l/2) + A_{14}(l/2) \sqrt{\frac{A_{12}(l) \cdot A_{32}(l)}{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}}};$$

$$\tilde{Q}_2(0) = \frac{\tilde{\eta}_{\max}}{A_{14}(l/2) + A_{12}(l/2) \sqrt{\frac{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}{A_{12}(l) \cdot A_{32}(l)}}}. \quad (5)$$

Далее строятся и исследуются главные формы колебаний в виде эпюр внутренних силовых факторов. Функциональные выражения позволяют найти экстремумы и определить опасные сечения.

Для определения максимальных эквивалентных напряжений используем известные выражения для напряжений при изгибе [3]:

$$\sigma = \frac{M_1 y}{J_1}, \quad \tau = \frac{S_1^* Q_2}{\delta J_1}, \quad (6)$$

где  $M_1$  – изгибающий момент, Н•м;

$y$  – координата рассматриваемой точки по оси  $y$ , м;

$S_1^*$  – статический момент отсеченной части сечения относительно оси  $x$ , м<sup>3</sup>;

$Q_2$  – поперечная сила, Н;

$\delta$  – толщина стенки стержня, м.

Для данных сечений в соответствии с формулами (6) распределение напряжений происходит таким образом, что максимальные нормальные напряжения находятся в верхней и нижней точках сечения, а максимальные касательные – на оси  $x$  (рисунок 1).

Заменим фактическое напряженное состояние стержня эквивалентным ему линейным напряженным состоянием. При выборе теории прочности примем во внимание, что тонкостенные стержни, как правило, изготавливаются из пластичных материалов. Поэтому расчет производится по четвертой теории прочности (энергетическая теория формоизменения), согласно которой для изгиба (плоского напряженного состояния) эквивалентные напряжения должны удовлетворять условию прочности [3]:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7)$$

Рассмотрим стальной стержень двутаврового сечения со следующими размерами в относительных величинах:  $\tilde{h} = 1$ ;  $\tilde{b} = 0,8$ ;  $\tilde{\delta} = 0,05$ ;  $\tilde{l} = 20$ . Примем допусаемый прогиб  $[\eta] = 0,001l$ , допусаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 150$  МПа.

Определим частоты первых трех главных форм колебаний стержня в безразмерном виде,

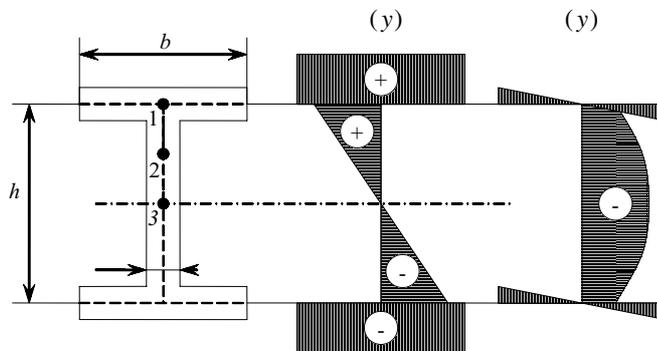


Рисунок 1. Сечение стержня с эпюрами распределения касательных и нормальных напряжений

используя (1). Значения частот: 0,211; 0,824; 1,785; 3,033.

Из (5) находим  $\beta_1(0) = -3,1 \cdot 10^{-3}$ ;  
 $\tilde{Q}_2(0) = -3,14 \cdot 10^{-3}$ .

Строим эпюры распределения внутренних силовых факторов (рисунок 2) в соответствии с выражением (8):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}(z) \\ \beta_1(z) \\ \tilde{M}_1(z) \\ \tilde{Q}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}(z) & A_{14}(z) \\ A_{22}(z) & A_{24}(z) \\ A_{32}(z) & A_{34}(z) \\ A_{42}(z) & A_{44}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1(0) \\ \tilde{Q}_2(0) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Определяем касательные и нормальные напряжения по формуле (6) и эквивалентные напряжения – по формуле (7). Эпюры распределения безразмерных напряжений (напряжений отнесенных к модулю Юнга) по длине стержня в точках 1, 2 и 3 сечения (рисунок 1) приведены на рисунке 3.

В связи с тем, что влияние касательных напряжений незначительно, в качестве опасной точки выступит точка 1 сечения с координатой  $z=l/2$ . Эквивалентное напряжение в этой точке

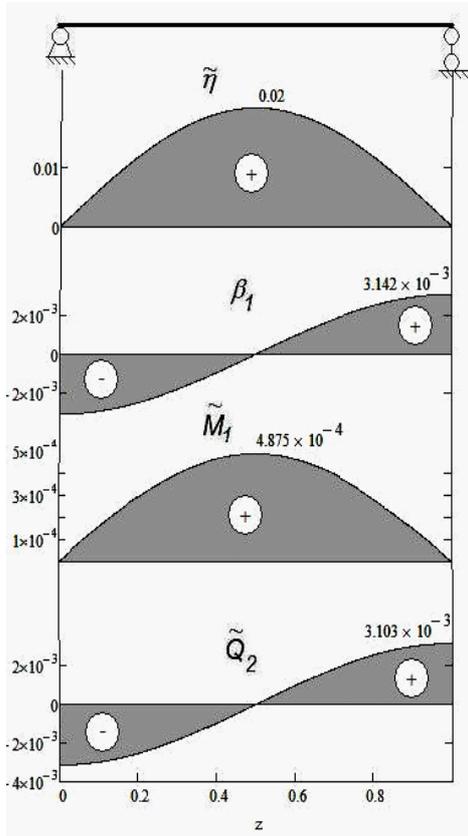


Рисунок 2. Эпюры прогибов, углов поворота сечений, изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях

$\tilde{\sigma}_{y\bar{e}\bar{a}} = 0,243 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_{y\bar{e}\bar{a}} = E \cdot \tilde{\sigma}_{y\bar{e}\bar{a}} = 51,2$  МПа. Таким образом, рассматриваемый стержень соответствует условиям прочности и жесткости.

Теперь рассмотрим колебания стержня с теми же параметрами сечения, закрепленного жестко одним концом и шарнирно – другим. Отличием от предыдущего примера будет несимметричность эпюр внутренних силовых факторов относительно середины стержня.

Граничные условия при консольном закреплении примут вид:

$$\tilde{\eta}(l) = 0, \tilde{\beta}_1(0) = 0, \tilde{\eta}(l) = 0, \tilde{M}_1(l) = 0. \quad (9)$$

Тогда зависимость между оставшимися неизвестными из (1) находится в виде:

$$\frac{M_1(0)}{\tilde{Q}_2(0)} = \sqrt{\frac{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}{A_{13}(l) \cdot A_{33}(l)}}. \quad (10)$$

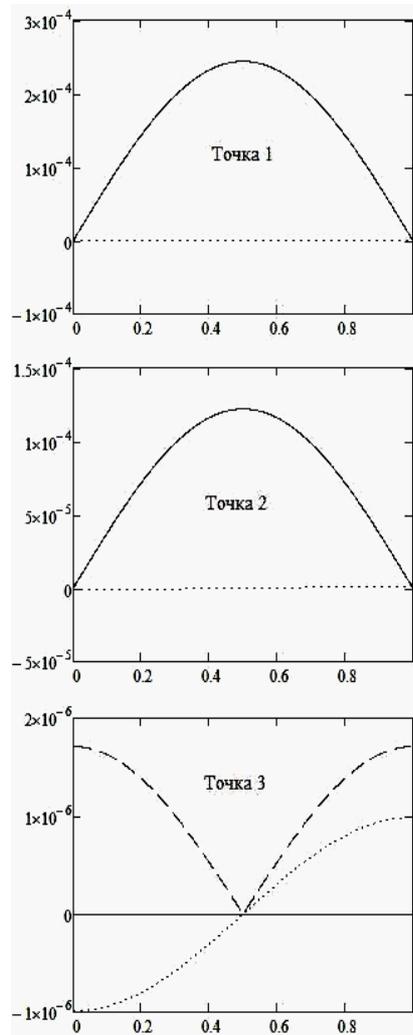


Рисунок 3. Эпюры распределения соответствующих безразмерных напряжений по длине стержня в точках 1, 2 и 3 сечения (—  $\tilde{\sigma}$ , .....  $\tilde{\tau}$ , ---  $\tilde{\sigma}_{экв}$ )

Выражение (10) позволяет определить максимальное значение прогиба  $\tilde{\eta}_{\max}$ . Оно будет соответствовать первой главной форме колебаний. Полученное значение позволит использовать условие жесткости и, в совокупности с (2), определить оставшиеся неизвестные граничные условия:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1(0) &= \frac{\tilde{\eta}_{\max}}{A_{14}(l) + A_{13}(l) \sqrt{\frac{A_{13}(l) \cdot A_{33}(l)}{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}}}; \\ \tilde{Q}_2(0) &= \frac{\tilde{\eta}_{\max}}{A_{13}(l) + A_{14}(l) \sqrt{\frac{A_{14}(l) \cdot A_{34}(l)}{A_{13}(l) \cdot A_{33}(l)}}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Определим частоты первых трех главных форм колебаний стержня в безразмерном виде, используя (1). Значения частот: 0,326; 1,024; 2,045; 3,325.

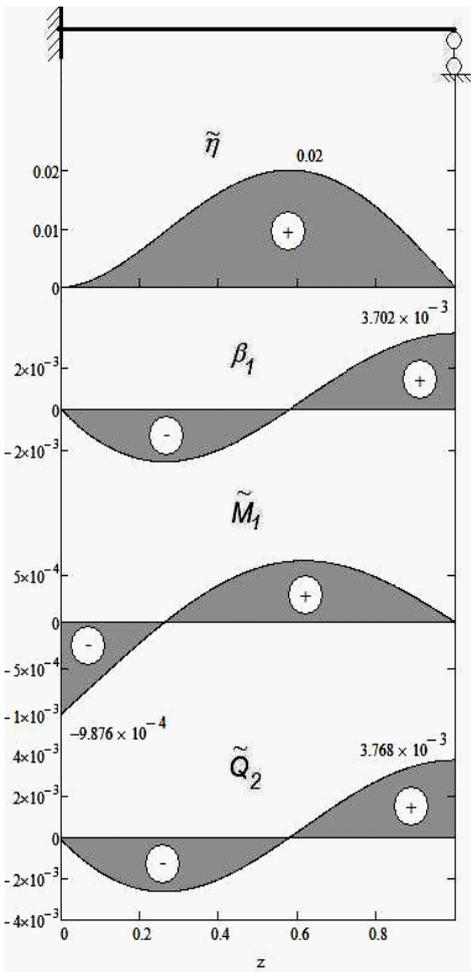


Рисунок 4. Эпюра прогибов, углов поворота сечений, изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях

Из (11) находим  $M_1(0) = 0,988 \cdot 10^{-3}$ ,  $Q_2(0) = 0,097 \cdot 10^{-3}$ .

Строим эпюры распределения внутренних силовых факторов (рисунок 4) в соответствии с выражением (12):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}(z) \\ \beta_1(z) \\ \tilde{M}_1(z) \\ \tilde{Q}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{13}(z) & A_{14}(z) \\ A_{23}(z) & A_{24}(z) \\ A_{33}(z) & A_{34}(z) \\ A_{43}(z) & A_{44}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{M}_1(0) \\ \tilde{Q}_2(0) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Определяем напряжения по (6) и эквивалентные по (7). Эпюры распределения напряжений по длине стержня в точках 1, 2 и 3 сечения (рисунок 1) приведены на рисунке 5.

В качестве опасной точки выступит точка 1 сечения с продольной координатой  $z=0,58l$ .

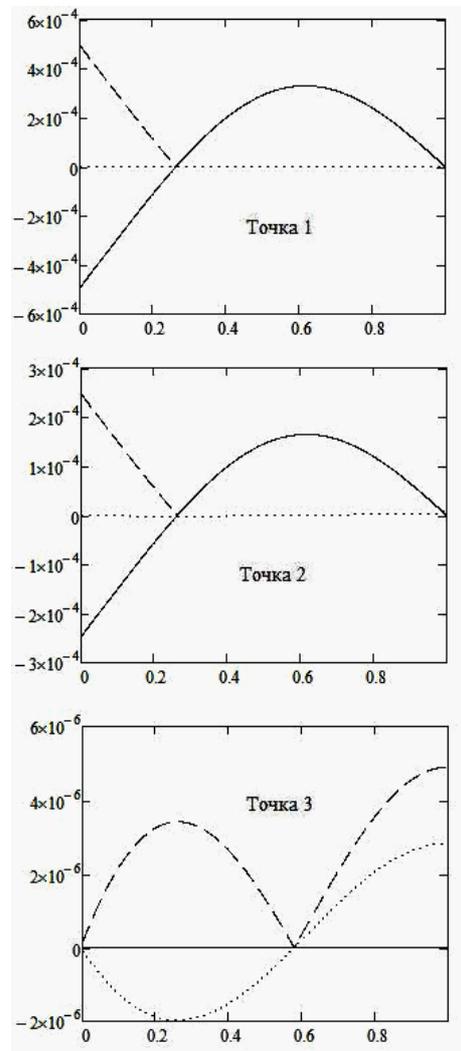


Рисунок 5. Эпюра распределения соответствующих безразмерных напряжений по длине стержня в точках 1, 2 и 3 сечения (—  $\sigma$ , .....  $\tau$ , ---  $\sigma_{экв}$ )

Эквивалентное напряжение в этой точке  $\tilde{\sigma}_{экв} = 0,325 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_{экв} = E \cdot \tilde{\sigma}_{экв} = 68,3$  МПа. При заданных требованиях к жесткости, рассматриваемый стержень не соответствует условиям прочности.

Таким образом, разработанная методика расчета тонкостенных стержней, совершающих свободные изгибные колебания, на прочность позволяет:

1) на стадии проектирования стержневых тонкостенных конструкций, работающих на

изгиб, обеспечить одновременно их прочность и жесткость;

2) определять зависимости между допускаемыми прогибами (углами поворота сечения) и напряжениями, возникающими в стержне;

3) на базе данной методики разработать методику исследования объемного напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержней, совершающих свободные колебания.

23.01.12

**Список литературы:**

1. Куча, Г.В. Изгибные колебания неразрезной балки комбинированного сечения / Г.В. Куча, А.А. Гаврилов // Математика. Информационные технологии. Образование. Сборник научных трудов. Оренбург: ОГУ, 2006. С. 86-90.
2. Гаврилов, А.А. Влияние геометрических характеристик сечений на значения частот свободных изгибных колебаний тонкостенных стержней / А.А. Гаврилов, Л.И. Кудина, Г.В. Куча, Н.А. Морозов // Вестник ОГУ, – 2011. – №5. С. 146-150.
3. Феодосьев, В.И. Сопrotивление материалов / В.И. Феодосьев – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.

Сведения об авторах:

**Гаврилов Александр Александрович**, ассистент кафедры теоретической механики Оренбургского государственного университета, e-mail: pialex@bk.ru

**Морозов Николай Анатольевич**, доцент кафедры теоретической механики Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук, e-mail: moroz.off.nick@yandex.ru

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 4505, тел (3532) 372563

**UDC 69.04**

**Gavrilov A.A., Morozov N.A.**

**THE STRENGTH AND STIFFNESS OF THIN-WALLED RODS AT FLEXURAL VIBRATIONS.**

The technique of calculations of the strength of thin-walled rods, performing free flexural vibrations, taking into account the need for these rods stiffness. The dependence of the relationship between arising tensions and admissible deflections.

Key words: rod, vibration, strength, stiffness, bending moment, tension.

**Bibliography:**

1. Kucha, G.V. Flexural fluctuations of not cutting beam of the combined section / G.V. Kucha, A.A. Gavrilov // Matematika. Informatsionnie tehnologii. Obrazovanie. Sbornik nauchnih trudov. Orenburg: OSU, 2006, p.86-90.
2. Gavrilov, A.A. The influence of section geometric characteristics on the frequencies of free flexural vibrations of thin straight bars / A.A. Gavrilov, L.I. Kudina, G.V. Kucha, N.A. Morozov // Vestnik OGU, – 2011. – №5. p. 146-150.
3. Feodosev, V.I. Strength of materials / Feodosev V.I. – M.: MSTU im. N.E. Bauman, 1999. – 592 p.