

МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ГАЗОХОДЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО ГАЗОГЕНЕРАТОРА

Предлагается метод решения краевой задачи течения газа в газоходе низкотемпературного газогенератора на основе неявной разностной схемы и ортогональной прогонки.

Ключевые слова: низкотемпературный газогенератор, газоход, разностная схема, ортогональная прогонка

В различных областях техники применяются низкотемпературные газогенераторы (НТГГ) для получения газа с температурой порядка 400 К, в которых продукты сгорания твердого топлива охлаждаются, проходя через слой твердого охладителя [1]. Схема НТГГ приведена на рисунке 1.

Продукты сгорания из камеры сгорания 3 подаются в камеру охлаждения 6 через газоход 5, из которого горячие газы забираются в расположенные последовательно кассеты с охладителем 7. Расчетная схема газохода приведена на рисунке 2.

Процессы в камере сгорания могут быть описаны нульмерной математической моделью, включающей в себя уравнения баланса массы, энергии газа, уравнение баланса тепла стенки, уравнение состояния [2].

$$\frac{d\rho_{kc}}{d\tau} = \frac{1}{V_{kc}} [G_b + (\rho_t - \rho_{kc})u_t F_t - G_{kc}]; \quad (1)$$

$$\frac{dT_{kc}}{d\tau} = \frac{[G_b(c_{pb}T_b - c_{vkc}T_{kc}) + \rho_t u_t F_t (Q_t - c_{vkc}T_{kc}) - G_{kc}R_{kc}T_{kc} - Q_{kc}]}{c_{vkc}\rho_{kc}V_{kc}}, \quad (2)$$

$$\frac{dT_{w,kc}}{d\tau} = \frac{\alpha_{kc}(T_{kc} - T_{w,kc})F_{w,kc}}{c_m \rho_m V_w}; \quad (3)$$

$$p_{kc} = \rho_{kc} R_{kc} T_{kc}. \quad (4)$$

Для описания процессов течения газа в газоходу применяется одномерная математическая модель, включающая в себя уравнения неразрывности, количества движения и энергии. Температурное поле в стенке газохода описывается уравнением теплопроводности [2].

$$\frac{\partial \rho S}{\partial \tau} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G^2}{\rho} + pS \right) = -\xi \frac{G^2 \Pi}{8S^2 \rho}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho S e}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (Ge + pSw) = \alpha(T_w - T)\Pi; \quad (7)$$

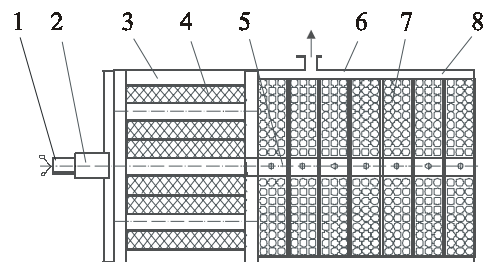
$$e = c_v T + \frac{w^2}{2}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial \tau} = \frac{a_w}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right); \quad (9)$$

$$p = \rho R T. \quad (10)$$

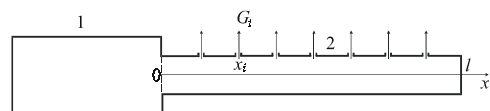
В (1) – (10) ρ – плотность; G – расход; p – давление; T – температура; S – площадь сечения; F – площадь поверхности; w – скорость течения; u – скорость горения; Π – периметр; Q – тепловой поток; R – газовая постоянная; α – коэффициент теплоотдачи; c_p, c_v – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме; a – коэффициент температуропроводности; ξ – коэффициент гидравлического сопротивления; τ – время; x – продольная координата; r – радиальная координата; индексы: kc – камера сгорания; t – топливо; v – воспламенитель; w – стенка.

Расход газа из газохода в точках отбора рассчитывается по формулам



1 – пиропатрон; 2 – воспламенитель; 3 – камера сгорания; 4 – топливо; 5 – газоход; 6 – камера охлаждения; 7 – кассета с охладителем; 8 – кольцевой канал

Рисунок 1. Схема НТГГ



1 – камера сгорания; 2 – газоход

Рисунок 2. Схема газохода

$$G_i = \begin{cases} \mu_i S_i \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_i p_i \left[\left(\frac{p_{0,i}}{p_i} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_{0,i}}{p_i} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}, & \frac{p_{0,i}}{p_i} > \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \mu_i S_i \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2k}{k+1} p_i p_i}, & \frac{p_{0,i}}{p_i} \leq \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \end{cases}, \quad (11)$$

где $p_{0,i}$ – давление у i -го потребителя; $k = c_p/c_v$; μ – коэффициент расхода; S_i – площадь отверстия в газоходе.

Начальные условия системы уравнений задаются следующим образом.

$$T_{kc}(0) = T_0; p_{kc}(0) = p_0; T_{w,kc}(0) = T_0; G(0, x) = 0; \\ T(0, x) = T_0; p(0, x) = p_0; T_w(0, r) = T_0. \quad (12)$$

Граничные условия на входе в газоход задаются в виде

$$\frac{k_{kc}}{k_{kc}-1} R_{kc} T_{kc}(\tau) = \frac{k}{k-1} \frac{p(\tau, 0)}{\rho_{kc}(\tau)} + \frac{\rho(\tau, 0) w^2(\tau, 0)}{2}; \quad (13)$$

$$p_{kc}(\tau) = p(\tau, 0) + \rho(\tau, 0) w^2(\tau, 0). \quad (14)$$

В конце газохода, при $x=l$ задается условие

$$G(\tau, l) = 0. \quad (15)$$

В точках отбора газа в соответствии со схемой на рисунке 3 задаются условия

$$G_{i+1} = G_i - G_j; \quad (16)$$

$$h_{i+1} = h_i; \quad (17)$$

$$p_{i+1} = p_i - \Delta p_j, \quad (18)$$

где h – энтальпия; Δp_j – потери давления при переходе через j -ю точку отбора газа.

Одномерные уравнения движения газа с теплообменом и трением аппроксимируются как явными, так и неявными разностными схемами [2, 3]. Как известно, явные разностные схемы являются условно устойчивыми. Критерии устойчивости накладывают ограничения на соотношение шагов разностной схемы по времени и пространственной координате [4–6].

Данная система уравнений описывает процессы, протекающие как со скоростью движения газа, так в том числе и течения со скоростью звука. Уравнение энергии и уравнения баланса массы компонентов газовой смеси отражают процессы переноса вещества и энергии, происходящие со скоростью движения газа.

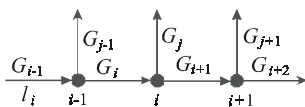


Рисунок 3. Расчетная схема потоков в газоходе

Процессы переноса тепла, описываемые уравнением теплопроводности для стенок камер сгорания и охлаждения, протекают со своими характерными скоростями. Данное обстоятельство хорошо заметно при сравнении критериев устойчивости явных разностных схем для уравнений различных типов. Критерий устойчивости явной разностной схемы для уравнений газовой динамики (число Куранта) есть [6]

$$\frac{(|w| + c) \Delta \tau}{h_x} < 1. \quad (19)$$

Критерий устойчивости явной разностной схемы для уравнения переноса [4]

$$\frac{w \Delta \tau}{h_x} < 1. \quad (20)$$

Критерий устойчивости явной разностной схемы для уравнения теплопроводности [7]

$$\frac{a \Delta \tau}{h_w^2} < 0,5. \quad (21)$$

В (19)...(21) c – скорость звука; $\Delta \tau$ – шаг разностной схемы по времени; h_x, h_w – шаги по координате x и стенке газохода.

В задачах газовой динамики применяются в основном явные разностные схемы, которые позволяют получить детальную информацию о распределении давления, скорости и температуры в газовых потоках, как дозвуковых, так и сверхзвуковых [3, 8]. Явные разностные схемы позволяют анализировать процессы, происходящие со скоростью звука, такие, как распространение волн давления [3, 8].

В газогенераторе основной интерес представляют процессы переноса тепла. А эти процессы происходят со скоростью движения газа, значительно меньшей скорости звука. Процессы перестройки фронтов давления и скорости, происходящие со скоростью звука, наблюдаются в начальный период работы газогенератора при его запуске, после чего происходит переход практически к стационарному режиму работы. Таким образом, в основной период работы газогенератора ограничения на шаг разностной схемы по времени (19) являются неоправданно жесткими. Кроме того, вследствие нелинейности системы уравнений, ограничения на шаг разностной схемы по времени может быть значительно более жестким. Число Куранта (19) может быть значительно меньше единицы и принимать значения 0,1...0,01.

Еще одной сложной задачей является реализация граничных условий при применении

явных разностных схем. Задача решения уравнений неразрывности, количества движения и энергии является краевой, так как на входе в газопровод заданы два граничных условия, а на выходе – одно. Это означает, что на входе можно определить какие-либо два неизвестных из трех – давления, скорости (расхода) и температуры. Третий параметр определяется из системы дифференциальных уравнений. Одним из способов нахождения соответствующего соотношения применяется условие на характеристике второго семейства, выходящей из области интегрирования.

Кроме явных разностных схем для решения задач газовой динамики применяются и неявные разностные схемы [3]. Такие схемы абсолютно устойчивы, что позволяет существенно увеличить шаг интегрирования по времени. Большинство таких схем имеет первый порядок аппроксимации как по времени, так и по пространственной координате. В работе [9] для решения уравнений движения газа в газопроводе применены неявные разностные схемы второго порядка аппроксимации. В результате разностные уравнения были приведены к трехточечным уравнениям, решаемым методом прогонки. Для системы из трех уравнений в этом случае нужны шесть граничных соотношений. Недостающие условия были получены из соотношений на характеристиках в предположении об изоэнтропичности процессов втекания газа в трубопровод и вытекания из него. Однако применение разностных схем второго порядка аппроксимации приводит к появлению немонотонных решений.

При применении неявных разностных схем для аппроксимации системы дифференциальных уравнений разностные уравнения становятся нелинейными. Для их решения необходимо применять какие-либо итерационные методы. Скорость сходимости таких методов очень сильно зависит от способа организации итерационного процесса. Наиболее распространенным методом получения разностных уравнений является раздельная аппроксимация, в результате которой получаются разностные уравнения неразрывности, количества движения и энергии. Затем эти уравнения решаются раздельно. Процесс получения решения во многом зависит от очередности решения уравнений, способа аппроксимации нелинейных членов

уравнений и граничных условий. Такой алгоритм решения становится непригодным при наличии сильных возмущений давления и температуры, что и происходит в начальный момент времени при запуске газогенератора.

В работах [9, 10] разработан метод аппроксимации системы уравнений движения газа в трубопроводе как единого математического объекта, используя запись системы уравнений в векторной форме. Система уравнений аппроксимирована неявной разностной схемой, для линеаризации разностных уравнений применен метод Ньютона. В результате получено трехточечное разностное уравнение, которое решается трехточечной матричной прогонкой. Недостатком такого подхода является необходимость отыскания дополнительных соотношений на границах области интегрирования.

Запишем уравнения (5) – (7) в виде векторного уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = F; \quad (22)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \rho S \\ G \\ \rho e S \end{bmatrix}; \quad \Psi = \begin{bmatrix} G \\ Gw + pS \\ Ge + pwS \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ -\xi \frac{\rho w^2 \Pi}{8} \\ \alpha(T_w - T)\Pi \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Аппроксимируем (22) неявной разностной схемой первого порядка аппроксимации на сетке, приведенной на рисунке 4.

$$\frac{\Phi_n^{m+1} - \Phi_n^m}{\Delta \tau} + \frac{\Psi_n^{m+1} - \Psi_{n-1}^m}{h_x} = F_n^{m+1}, \quad n=2...N. \quad (24)$$

Здесь n – номер узла по координате x ; m – номер временного слоя; $h_x, \Delta \tau$ – шаги по координате x и времени. Разложим $\Phi_n^{m+1}, \Psi_n^{m+1}, F_n^{m+1}$ в ряд Тейлора, сохраняя первые два члена ряда.

$$\begin{aligned} \Phi_n^{m+1} &= \Phi_n^{\overline{m+1}} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_n^{\overline{m+1}} \left(Y_n^{m+1} - Y_n^{\overline{m+1}} \right); \\ \Psi_n^{m+1} &= \Psi_n^{\overline{m+1}} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)_n^{\overline{m+1}} \left(Y_n^{m+1} - Y_n^{\overline{m+1}} \right); \\ F_n^{m+1} &= F_n^{\overline{m+1}} + \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)_n^{\overline{m+1}} \left(Y_n^{m+1} - Y_n^{\overline{m+1}} \right); \quad Y^t = |p, T, G|. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь индекс $\overline{m+1}$ означает предыдущую итерацию на $(m+1)$ -ом слое по времени. В ре-



Рисунок 4. Разностная сетка

зультате уравнение (24) можно привести к двухточечному векторному уравнению

$$A_n Y_n^{m+1} - B_{n-1} Y_{n-1}^{m+1} = C_n, \quad n=2 \dots N; \quad (26)$$

$$A_n = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_n^{m+1} + \frac{\Delta \tau}{h} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)_n^{m+1} - \Delta \tau \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)_n^{m+1};$$

$$B_{n-1} = \frac{\Delta \tau}{h} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right)_{n-1}^{m+1};$$

$$C_n = -\Phi_n^m + \Phi_n^{m+1} - \frac{\Delta \tau}{h_x} \left(\Psi_n^{m+1} - \Psi_{n-1}^{m+1} \right) + \Delta \tau F_n^{m+1} + A_n Y_n^{m+1} - B_{n-1} Y_{n-1}^{m+1}. \quad (27)$$

Граничные условия (13), (14) запишем в виде

$$f_1(p_1, T_1, G_1) = 0; \quad (28)$$

$$f_2(p_1, T_1, G_1) = 0. \quad (29)$$

Применяя к условиям (28), (29) преобразования, аналогичные (25), запишем граничные условия в векторной форме

$$A_1 Y_1^{m+1} = C_1. \quad (30)$$

Здесь A_1 – прямоугольная матрица размерности 2×3 , C_1 – вектор размерности 2. Граничное условие (15) можно записать в виде

$$B_N Y_N^{m+1} = C_N, \quad (31)$$

где B_N – вектор-строка 1×3 , C_N – скаляр.

Условия перехода в газоход (16)...(18) в разностной аппроксимации могут быть представлены в виде

$$Y_{N_i}^{m+1} = \alpha_i Y_{N_i+1}^{m+1} + \chi_i, \quad (32)$$

где α_i – квадратная матрица 3×3 , а χ_i – вектор размерности 3.

Для решения системы уравнений (26), (30), (31) применяется алгоритм ортогональной прогонки [11, 12].

Прогонка выполняется в два этапа. На первом этапе вычисляются векторы H_n, D_n, W_n, X_n размерности 3 и скаляры β_n, r_n . Запоминаются векторы D_n, X_n и скаляры β_n, r_n .

$$H_n = A_n^{-1} B_{n-1} D_{n-1}; \quad r_n = \sqrt{H_n H_n}; \quad D_n = H_n / r_n;$$

$$W_n = A_n^{-1} (B_{n-1} X_{n-1} + C_n); \quad \beta_n = D_n^* W_n; \quad X_n = W_n - D_n \beta_n;$$

$$r_{N+1} = B_N D_N; \quad \beta_{N+1} = B_N X_N. \quad (33)$$

На втором этапе вычисляется вектор Y_n^{m+1} .

$$Y_n^{m+1} = D_n \gamma_n + X_n; \quad \gamma_n = \frac{\gamma_{n+1} - \beta_{n+1}}{r_{n+1}}; \quad \gamma_{N+1} = C_N. \quad (34)$$

Рассмотрим определение векторов H и W в узле $n=1$. Матрицу A_1 представим в виде

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_1^1 & A_1^2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } A_1^1 \text{ – матрица размерности } 2 \times 2.$$

Тогда векторы H_1 и W_1 определяются следующим образом.

$$H_1 = \begin{bmatrix} (A_1^1)^{-1} A_1^2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad W_1 = \begin{bmatrix} (A_1^1)^{-1} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\text{и } D_1 = H_1; \quad X_1 = W_1.$$

Вышеизложенный алгоритм можно обобщить на случай, когда область интегрирования состоит из двух и более подобластей, на границах контакта между которыми заданы условия вида (32), например, участки газохода слева и справа от точки отбора газа. Конструкция разностной сетки изображена на рисунке 5.

Разностное уравнение (26) в конце подобласти I запишем в виде

$$A_M^I Y_M^I - B_{M-1}^I Y_{M-1}^I = C_M^I. \quad (36)$$

Пусть значения вектора Y на границах области связаны соотношением

$$Y_M^I = \alpha Y_1^{II} + \beta. \quad (37)$$

Подставим (37) в (36).

$$A_M^{I*} Y_1^{II} - B_{M-1}^I Y_{M-1}^I = C_M^{I*}, \quad (38)$$

где $A_M^{I*} = A_M^I \alpha$, $C_M^{I*} = C_M^I - A_M^I \beta$. Тогда на границе подобластей в ходе первого этапа прогонки получим соотношения

$$H_1^{II} = (A_M^{I*})^{-1} B_{M-1}^I D_{M-1}^I; \quad r_1^{II} = \sqrt{H_1^{II} H_1^{II}}; \quad D_1^{II} = H_1^{II} / r_1^{II};$$

$$W_1^{II} = (A_M^{I*})^{-1} (B_{M-1}^I X_{M-1}^I + C_M^{I*});$$

$$\beta_1^{II} = D_1^{II*} W_1^{II}; \quad X_1^{II} = W_1^{II} - D_1^{II} \beta_1^{II}. \quad (39)$$

Первый этап прогонки в подобласти I выполняется по формулам (33), (35) до узла $n=M$ включительно. В узле $n=1$ подобласти II прогоночные матрицы, векторы и скаляры вычисляются по формулам (39). Далее, до узла N подобласти II первый этап прогонки выполняется так же, как и для подобласти I. При наличии

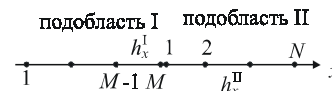


Рисунок 5. Разностная сетка на границах подобластей

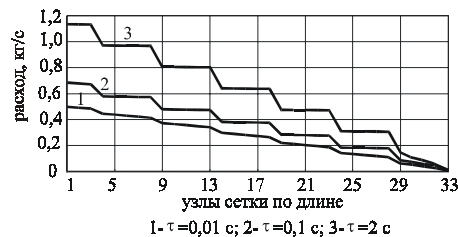


Рисунок 6. Изменение расхода в газоходе в различные моменты времени

нескольких подобластей для каждой расчет первого этапа прогонки выполняется аналогично. Затем выполняется второй этап прогонки, начиная с узла N последней подобласти до узла $n=1$ подобласти I по формулам (34).

На рисунке 6 показано распределение расхода по длине газохода в различные моменты времени. Расчеты выполнялись с числом Куранта (19) равным 25. Итерации на каждом шаге по времени выполнялись до достижения относительной погрешности по давлению, расходу и температуре в 0,1% во всех узлах сетки. Метод

обладает высокой вычислительной эффективностью.

Уравнения (1) – (3) решаются методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Заключение

Разработан метод решения краевой задачи течения газа в газоходу при наличии отбора газа в нескольких точках по длине. Данный метод может применяться для расчета одномерных течений газа с высокими дозвуковыми скоростями в каналах постоянного и переменного сечения.

29.02.2012

Список литературы:

1. Теоретическое и экспериментальное исследование низкотемпературных газогенераторов: монография / Д.Д. Аксененко, С.Д. Ваулин, В.Г. Зезин В.Г., В.В. Кириллов В.В. и др. – ИППМ УрО РАН, Ижевск, 2008. – 255 с.
2. Численный эксперимент в теории РДТТ / А.М. Липанов, В.П. Бобрышев, А.В. Лисица, А.В. Алиев и др.: под ред. А.М. Липанова. – 1994, Екатеринбург, УИФ Наука. – 301 с.
3. Пирумов, У.Г. Численные методы газовой динамики / У.Г. Пирумов, Г.С. Росляков. – М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.
4. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2 т. Т. 1: Основные положения и общие методы / К.Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 502 с.
5. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2 т. Т. 2: Методы расчета различных течений К.Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
6. Годунов, С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
7. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
8. Годунов, С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
9. Воеводин, А.Ф. Газотермодинамический расчет потоков в простых и сложных трубопроводах (численный метод) / А.Ф. Воеводин // Изв. Сиб. АН СССР. Серия техн. наук. – 1969, №8, вып.2. – С.45–55.
10. Воеводин, А.Ф. Разностный метод расчета нестационарных одномерных течений газа / А.Ф. Воеводин, Л.Я. Есипович, В.Р. Коган // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1976, Т.16, №4. – С.1006–1016.
11. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 589 с.
12. Кириллов, В.В. Расчет переходных процессов в обогреваемых каналах ортогональной прогонкой / В.В. Кириллов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов. – 1990, вып.5. – С. 16–21.

Сведения об авторах: **Ваулин Сергей Дмитриевич**, доктор технических наук, профессор,
e-mail: S.D.Vaulin@susu.ac.ru

Кириллов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, доцент,
e-mail: Valery.V.Kirillov@gmail.com

UDC 532.542+519.63

Kirillov V.V., Vaulin S.D.

METHOD OF CALCULATING THE FLOW OF GAS IN A LOW-TEMPERATURE GAS GENERATORS FLUES

A method of solving boundary-value problem of gas flow in the low-temperature flue gas generator based on the implicit finite difference scheme and the orthogonally sweep.

Key words: low-temperature gasifier, gas duct, the difference scheme, the orthogonal sweep

Bibliography:

1. Theoretical and experimental study of low-temperature gas-generators: a monograph / D.D. Aksenenko, S.D. Vaulin, V.G. Zezin, V.V. Kirillov and others, IPM RAS, Izhevsk, 2008. – 255.
2. Numerical experiment in the theory of solid propellant rocket motors / A.M. Lipanov, V.P. Bobryshev, A.V. Lisitsa, A.V. Aliev and others: ed. A.M. Lipanov. – 1994, Ekaterinburg, UIF Nauka. – 301 p.
3. Pirumov, U.G. Numerical methods in gas dynamics / U.G. Pirumov, G.S. Roslyakov. – M.: High School, 1987. – 232 p.
4. Fletcher, C. Computational Techniques for Fluid Dynamics. In 2 vols. 1: Fundamental and General Techniques / C. Fletcher. – M., New York, 1991. – 502 p.
5. Fletcher, C. Computational Techniques for Fluid Dynamics. In 2 vols. 2: Specific Techniques for Different Flow Categories / C. Fletcher. – M., New York, 1991. – 552 p.
6. Godunov, S.K. Difference schemes / S.K. Godunov, V.S. Ryabenkiy. – M.: Science, 1977. – 440 p.
7. Kalitkin, N.N. Numerical Methods / N.N. Kalitkin. – M.: Science, 1978. – 512 p.
8. Godunov, S.K. Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics / S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.J. Ivanov, A.N. Kraiko, G.P. Prokopov. – M.: Science, 1976. – 400 p.
9. Voevodin, A.F. Gazotermodynamicheskoy calculation of flows in simple and complex pipelines (numerical method) / A.F. Voevodin // Math. Sib. USSR Academy of Sciences. Series of technical sci. 1969, №8, issue 2. – P.45-55.
10. Voevodin, A.F. A numerical method for unsteady one-dimensional gas flows / A.F. Voevodin, L.Y. Esipovich, V.R. Kogan / Journal Comput. Mathematics and Math. Physics. – 1976, V.16, №4. – P.1006-1016.
11. Samarski, A.A. Methods for solving difference equations / A.A. Samarski, E.S. Nikolaev. – M.: Science, 1978. – 589 p.
12. Kirillov, V.V. Calculation of transients in heated channels orthogonal sweep / V.V. Kirillov // Problems of Atomic Science and Technology. Ser.: The Physics and Technology of Nuclear Reactors. – 1990, issue 5. – P.16-21.