УДК 512.55; 681.51; 004.827

Баклыков А.А., Пушков С.Г.
Оренбургский государственный университет
E-mail: baklykoff_87@mail.ru

НЕЧЕТКАЯ ЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КАК СИСТЕМА НАД ПОЛУКОЛЬЦОМ

Исследуется проблема описания динамики процессов, наделенных некоторой долей неопределенности. Вводится понятие линейной динамической системы над полукольцом, и описывается ряд ее свойств. Нечеткое множество представляется в виде полумодуля над полукольцом действительных чисел из отрезка [0,1]. Анализируется возможность применения такого представления для построения теории нечетких линейных динамических систем.

Ключевые слова: линейные динамические системы, полукольцо, полумодуль, нечеткое множество, нечеткие системы

Введение

Одним из наиболее перспективных подходов для исследования динамики различных процессов и управления ими является моделирование, основанное на наблюдении входных и выходных сигналов объекта и представлении его поведения в пространстве состояний [1,2]. Центральным понятием при таком подходе является понятие динамической системы. Модели с пространством состояний являются естественной формой представления для динамических систем теории управления, в особенности теории автоматического управления.

Развитие науки и техники ведет ко все большему усложнению как объектов исследования, так и систем их моделирующих. Возрастает сложность устройств, технологических процессов производства, что в свою очередь ведет к усложнению моделирования разнообразных объектов и процессов с ними непосредственно связанных. Особенно усложняются вопросы, связанные с моделированием систем «человек – машина», где остро ставятся задачи эффективного управления системами организационно-технического, экономического и социального характера, т. е. систем наделенных некоторой степенью неопределенности. Наиболее удобным подходом для описания систем с неопределенностями является предложенный Л. Заде аппарат нечетких множеств [3,4] где нечеткое множество образуется путем введения обобщенного понятия принадлежности.

В связи с выше сказанным естественным было бы желание объединить подход к исследованию динамики различных процессов на основе моделей с пространством состояний и подход к описанию систем с неопределенностью, используя аппарат нечетких множеств, общей методологией, подобной той, которая разработана для обычных (не нечетких) линейных динамических систем Калманом [2] и на ее основе разработать теорию нечетких систем.

Существует довольно много подходов к созданию и математическому обоснованию общей теории нечетких систем. В частности, подход, базируемый на рассмотрении нечеткого отношения в качестве отображения, описывающего динамику системы [5,6].

Целью же настоящей работы является попытка подойти к построению теории нечетких систем в рамках математической теории систем, разработанной Калманом [2], и соответственно перенести часть ее результатов на нечеткие системы. Для этого предварительно было введено понятие динамической системы над полукольцом. Далее показано, что ряд свойств систем над кольцами и полями справедливы и для систем над полукольцами. Затем введено понятие нечеткой линейной динамической системы как системы над полукольцом.

1. Линейная динамическая система над полукольцом. Будем рассматривать системы над определенными алгебраическими структурами (в частности нас интересуют системы над полукольцами), т. е. системы у которых элементы входных воздействий, состояний системы, выходных реакций принадлежат некоторому полукольцу K. А это значит что U, Y, X – полумодули над полукольцом K.

Полумодулем над полукольцом K будем называть коммутативный аддитивный моноид $(M,+,0)$ с операцией умножения $K \times M \to M$ на элементы полукольца, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\forall m \in M, \forall k_1, k_2 \in K \, (k_1 k_2) m = k_1 (k_2 m);$

2) $\exists e \in K : \forall m \in M \;\; em = me = m;$

3) $\forall m_1, m_2 \in M, \forall k \in K \;\; k(m_1 + m_2) =$
$= km_1 + km_2;$

4) $\forall m \in M, \forall k_1, k_2 \in K \, (k_1 + k_2) m = k_1 m + k_2 m;$

5) $\forall m \in M, \forall k \in K \;\; 0m = \mathbf{0}, k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Семейство $\{e_i, i = \overline{1,n} : e_i \in M\}$ будем называть *базисом полумодуля М*, если каждый элемент $m \in M$ однозначно представляется в виде линейной комбинации $m = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, для некоторых $a_i \in K$. Коэффициенты a_i будем называть координатами относительно базиса $\{e_i\}$.

Свободным полумодулем будем называть полумодуль, который либо является нулевым, либо обладает базисом.

Дадим определение таким системам в соответствии с общепринятыми обозначениями математической теории систем предложенными Калманом [2].

Определение 1. *Линейной динамической системой? с дискретным временем над полукольцом* будем называть динамическую систему [2] удовлетворяющую следующим свойствам:

(а) Множество моментов времени T (равное Z, упорядоченной абелевой группой целых чисел или любой другой изоморфной ей);

(б) Множество состояний X, множество мгновенных значений входных воздействий U, множество допустимых входных воздействий $\Omega = \{\omega : T \to U\}$, множество мгновенных значений выходных величин Y, множество выходных величин $\Gamma = \{\gamma : T \to Y\}$ суть полумодули (над заданным произвольным полукольцом K);

(г) Переходная функция состояния $\varphi : T \times T \times X \times \Omega \to X$, значениями которой служат состояния $x(t) = \varphi(t, \tau, x(\tau), \omega) \in X$, в которых оказывается система в момент времени $t \in T$, если в начальный момент времени $\tau \in T$ она была в начальном состоянии $x(\tau) \in X$ и если на нее действовало входное воздействие $\omega \in \Omega$ обладает следующим свойством: отображение $\varphi(t; \tau; \bullet; \bullet) : X \times \Omega \to X$ является K-линейным при любых t и τ.

(д) Выходное отображение $\eta : T \times X \to Y$, определяющее выходные величины $y(t) = \eta(t, x(t))$ обладает следующим свойством: отображение $\eta(t; \bullet) : X \to Y$ является K-линейным при любых t.

Здесь под K-линейностью отображения полумодуля X над полукольцом K в полумодуль Y над тем же полукольцом будем подразумевать отображение $f : X \to Y$, такое что $\forall x, x_1, x_2 \in X, k \in K$

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

2) $f(kx) = kf(x)$.

Заметим, что если в полумодуле существует базис, то линейные отображения можно представить с помощью матриц линейных отображений.

Утверждение 1. *Если U, Y, X свободные полумодули над некоторым полукольцом, то φ – отображение перехода $T \times T \times X \times \Omega \to X$ можно представить в виде*

$$(t+1; t, x, \omega) \mapsto \varphi(t+1; t, x, \omega) = Fx(t) + G\omega(t),$$

где F и G – матрицы линейных отображений, а η – отображение перехода $T \times X \to Y$ в виде $(t, x) \mapsto \eta(t, x) = Hx(t)$, где H – матрица линейного отображения.

Доказательство. Из условия (г) определения 1 в силу линейности отображения φ, следует $\varphi(t+1; t, x, \omega) = \varphi(t+1; t, x, 0) + \varphi(t+1; t, 0, \omega)$.

Если X свободный полумодуль над кольцом K, то

$$\exists e_i \in X, i = \overline{1,n} : \forall x \in X \; \exists! x_i \in K : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

Тогда в силу линейности отображения φ:

$$\varphi(t+1; t, x, 0) = \varphi(t+1; t, x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, 0) =$$
$$= \varphi(t+1; t, x_1 e_1, 0) + \ldots + \varphi(t+1; t, x_n e_n, 0) =$$
$$= x_1 \varphi(t+1; t, e_1, 0) + \ldots + x_n \varphi(t+1; t, e_n, 0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(t+1; t, e_i, 0).$$

Аналогично из того, что U свободный полумодуль над кольцом K следует, что

$$\exists e'_i \in U, i = \overline{1,m} : \forall u \in U \; \exists! u_i \in K : u = \sum_{i=1}^{n} u_i e'_i .$$

И в силу линейности отображения φ:

$$\varphi(t+1; t, 0, u) = \varphi(t+1; t, 0, u_1 e'_1 + \ldots + u_m e'_m) =$$
$$= \varphi(t+1; t, 0, u_1 e'_1) + \ldots + \varphi(t+1; t, 0, u_m e'_m) =$$
$$= u_1 \varphi(t+1; t, 0, e'_1) + \ldots + u_n \varphi(t+1; t, 0, e'_m) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} u_i \varphi(t+1; t, 0, e_j).$$

Приняв $\varphi(t+1; t, e_i, 0)$ за i-ый столбец матрицы F, а $\varphi(t+1; t, 0, e_j)$ за j-й столбец матрицы G, получим $\varphi(t+1; t, x, \omega) = Fx + G\omega$. Утверждение для матрицы H доказывается аналогично. ■

Таким образом, суммируя все выше сказанное можно сформулировать следующее определение.

Определение 2. *Линейная динамическая система Σ с дискретным временем над полукольцом К* представляет собой сложный объект *(F, G, H)*, где отображения

$$F : X \to X,$$
$$G : U \to X,$$
$$H : X \to Y,$$

есть абстрактные *К*-гомоморфизмы, а U, X, Y – некоторые абстрактные свободные полумодули над *К*.

Динамическое поведение системы Σ определяется, как сказано выше, т. е. тройка *(F, G, H)* определяет уравнения

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t)+Gu(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned} \qquad (1.1)$$

где $x(t) \in X, u(t) \in U, y(t) \in Y$.

Данное определение не всегда применимо на практике, поскольку не всегда известны внутренние состояния системы, часто необходимо рассматривать систему как некоторый «черный ящик», переводящий входные воздействия в выходные реакции. Поэтому приведем еще одно альтернативное определение динамической системы определяемой своими преобразованиями входных воздействий в выходные величины, под которой будем подразумевать следующее.

Для любого заданного начального состояния (τ, x) и отрезка входного воздействия $\omega_{(\tau,t]}$ система Σ задается реакцией системы $\gamma_{(\tau,t]}$, т. е. задается отображение $f_{\tau,x} : \omega_{(\tau,t]} \mapsto \gamma_{(\tau,t]}$. Если предположить известной структуру системы в смысле определения 1, то значение выходной величины в момент времени $t' \in (\tau, t]$ определяется из соотношения

$$f_{\tau,x}(\omega_{(\tau,t]})(t') = \eta(t', \varphi(t', \tau, x, \omega)). \qquad (1.2)$$

И обратно, каждое семейство функций, обладающих теми же свойствами, что и соотношения (1.2), можно рассматривать как определяющее систему с точки зрения преобразования входных воздействий в выходные величины.

Сформулируем теперь строгое определение.

Определение 3. *Линейной динамической системой над полукольцом К с точки зрения ее внешнего поведения* или другими словами *линейным отображением вход-выход* будем называть отображение $f : \Omega \to \Gamma$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) Ω – есть множество всевозможных последовательностей К – векторов $\omega : Z \to U$, таких что $\omega(t) = 0$ при всех $t > 0$ и всех $t < t_{-1} \le 0$, где t_{-1} – некоторое целое число;

2) Γ – есть множество всевозможных последовательностей К – векторов $\gamma : Z \to Y$, таких что $\gamma(t) = 0$ при всех $t \le 0$;

3) Отображение f инвариантно относительно сдвигов во времени в том смысле, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_\Omega"'] & \Gamma \arrow[d, "\sigma_\Gamma"] \\ \Omega \arrow[r, "f"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

является коммутативной по отношению к следующим операторам сдвига σ_Ω и σ_Γ:

$\sigma_\Omega : (0, \ldots, \omega(-1), \omega(0); 0, \ldots) \mapsto (0, \ldots, \omega(-1), \omega(0), 0; 0, \ldots)$ – «приписывание нуля»,

$\sigma_\Gamma : (0, \ldots, 0; \gamma(1), \gamma(2), \ldots) \mapsto (0, \ldots, 0; \gamma(2), \gamma(3), \ldots)$ – «отбрасывание $\gamma(1)$ »;

4) Ω и Γ суть полумодули над полукольцом К, а f есть некоторый К – гомоморфизм относительно описанной выше структуры в Ω и Γ.

Из данного определение непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. *Последовательность* $[f(e_i)]_j$ *(равные j-м компонентам векторной последовательности* $f(e_i)$*, где* $e_i \in \Omega$ *есть последовательность* $\omega(0) = \varepsilon_i, \omega(t) = 0$*, где* $\varepsilon_i \in U$ *базисные вектора свободного полумодуля* U *и* $t \ne 0$*) несут ту же информацию, что и импульсная характеристика системы. Ее можно назвать импульсной реакцией j-го выхода на возмущение i-го входа. Знание всех таких реакций достаточно для определения отображения вход-выход для нулевого состояния стационарной линейной системы.*

Доказательство. В силу того, что отображение f К-гомоморфизм справедливо следующие

$$f(0, \ldots, \omega(-1), \omega(0); 0, \ldots) = \sum_{j=-\infty}^{0} f(0, \ldots, \omega(j), 0, 0; 0, \ldots).$$

Так как U свободный полумодуль, то

$$\exists \varepsilon_i \in U, i=\overline{1,m} : \exists! \omega(j)_i \in K : \omega(j) = \sum_{i=1}^{n} \omega(j)_i \varepsilon_i \,.$$

А тогда, опять же, в силу того, что отображение f K-гомоморфизм справедливо

$$f(0,...,\omega(j),0,0;0,...) = \sum_{i=1}^{n} \omega(j)_i f(0,...,\varepsilon_i,0,0;0,...) \,.$$

И в силу инвариантности отображения f во времени имеем

$$f(0,...,\varepsilon_i,0,0;0,...)(1) = f(0,...,0,\varepsilon_i;0,...)(1-j) =$$
$$= f(e_i)(1-j), j=\overline{0,-\infty}$$

(здесь ε_i находится в j позиции).

Таким образом, выходная реакция системы равна

$$y(t+1) = f(0,\ldots,\omega(0),..,\omega(t);0,\ldots)(1) =$$
$$= \sum_{j=0}^{t} f(0,\ldots,\omega(j),0,0;0,\ldots)(1) =$$
$$= \sum_{j=0}^{t}\sum_{i=1}^{n} \omega(j)_i f(0,\ldots,\varepsilon_i,0,0;0,\ldots)(1) =$$
$$= \sum_{j=0}^{t}\sum_{i=1}^{n} \omega(j)_i f(e_i)(t+1-j),$$

или приняв $f(e_i)(t+1-j)$ за $\left[A_{t-j}\right]_i$ i-ый столбец матрицы A_{t-j} получим

$$y(t+1) = \sum_{j=0}^{t} \omega(j) A_{t-j} \,. \blacksquare$$

Введя два определения для одного и того же понятия с разных точек зрения, нам необходимо показать взаимосвязь между ними.

Определение 4. Линейная динамическая система Σ в смысле определения 2 будем называть *реализацией отображения вход-выход f* в смысле определения 3 тогда и только тогда, когда отображение вход-выход f_Σ совпадает с f, т. е. когда $f_\Sigma = f$.

Утверждение 3. *Система Σ реализует отображение f тогда и только тогда, когда*

$$\left[f(e_i)\right]_j = \left(\left[A_0\right]_{ji},\left[A_1\right]_{ji},\left[A_3\right]_{ji},\ldots\right) =$$
$$= \left(\left[HG\right]_{ji},\left[HFG\right]_{ji},\left[HF^2G\right]_{ji},\ldots\right).$$

(здесь квадратные скобки выделяют элементы векторов или матриц.)

Доказательство. Пусть в систему $\Sigma(F,G,H)$ начиная с некоторого момента поступает некоторые входные импульсы (до этого момента в систему Σ нечего не поступало, т. е. система находилась в нулевом состоянии).

Тогда выход системы в произвольный момент времени, согласно ее динамическому поведению (1.1)

$$y(t+1) = Hx(t+1),$$

где

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t).$$

Таким образом,

$$y(t+1) = H(Fx(t)+Gu(t))$$

и в силу дистрибутивности

$$y(t+1) = HFx(t) + HGu(t),$$

продолжая этот процесс получим

$$y(t) = HF(Fx(t-1)+Gu(t-1)) + HGu(t) =$$
$$= HF^2x(t-1) + HFGu(t-1) + HGu(t) = \ldots =$$
$$= HF^{t+1}x(0) + HF^tGu(0) + \ldots + HGu(t),$$

и так как $x(0)=0$ имеем

$$y(t+1) = HF^tGu(0) + \ldots + HGu(t) =$$
$$= \sum_{i=0}^{t} HF^iGu(t-i).$$

Но из утверждения 2

$$y(t+1) = \sum_{j=0}^{t} u(j) A_{t-j} =$$
$$= \sum_{i=0}^{t} A_i u(t-i) \Rightarrow HF^iG = A_i \,. \blacksquare$$

2 Нечеткое множество как свободный полумодуль. Рассмотрим множество $R_{[0,1]}$ действительных чисел из отрезка $[0,1]$. Пусть $\otimes : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ произвольная треугольная норма (Т-норма) [4], т. е. такая что $\forall x,y,z \in [0,1]$:

1) $0 \otimes x = 0$;
2) $1 \otimes x = x$;
3) $x \otimes y = y \otimes x$;
4) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$;
5) $x \otimes y \le x \otimes z$, если $y \le z$.

Тогда $(R_{[0,1]},\otimes)$ образует коммутативный мультипликативный моноид. А $(R_{[0,1]},max)$ коммутативный аддитивный моноид. Действительно: $\forall x,y,z \in [0,1]$:

1) $max(x,max(y,z)) = max(max(x,y),z)$;
2) $max(x,y) = max(y,x)$;
3) $max(x,0) = x$.

Утверждение 4. *Для операций $\otimes$ и max выполняется закон дистрибутивности, т. е.* $\forall x,y,z \in [0,1]$ $max(x,y) \otimes z = max(x \otimes z, y \otimes z)$.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1) $x \ge y$ тогда $max(x,y) = x \Rightarrow max(x,y) \otimes z = x \otimes z$.

С другой стороны в силу монотонности Т-нормы

$x \otimes z \geq y \otimes z \Rightarrow max(x \otimes z, y \otimes z) = x \otimes z$;

2) $x<y$ тогда

$max(x,y) = y \Rightarrow max(x,y) \otimes z = y \otimes z$.

С другой стороны, опять же, в силу монотонности Т-нормы

$x \otimes z \leq y \otimes z \Rightarrow max(x \otimes z, y \otimes z) = y \otimes z$. ■

Таким образом ($R_{[0,1]}, \otimes, max$) образуют полукольцо с дистрибутивностью.

Говоря о всевозможных нечетких множествах с одним универсумом, каждое из них можно полностью ассоциировать с их функцией принадлежности [4], т. е. рассматривать исключительно множество $[0,1]^A = \{\mu : A \to [0,1]\}$ всевозможных функций из универсума A в [0,1].

Утверждение 5. *$[0,1]^A$ – полумодуль над полукольцом $R_{[0,1]}$ у которого сложение определено как*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \Rightarrow \forall a \in A \quad \mu(a) = max(\mu_1(a), \mu_2(a)).$$

А умножение на скаляр как

$$\mu' = \lambda\mu \Rightarrow \forall a \in A \quad \mu'(a) = \lambda \otimes \mu(a).$$

Утверждение 6. *Множество всех нечетких множеств над конечным универсумом $A [0,1]^A$ – свободный полумодуль.*

Доказательство. Очевидно, что выполняются все аксиомы полумодуля. Покажем, что он свободный, т. е. в нем существует базис.

Семейство нечетких множеств где

$$\mu_{a_i}(a) = \begin{cases} 1, a = a_i, \\ 0, a \neq a_i. \end{cases}$$

образует базис полумодуля $[0,1]^A$.

Легко догадаться, что произвольное нечеткое множество Q представимо в виде линейной комбинации единичных импульсов

$$\mu_Q = \sum_{i=1}^{|A|} \alpha_i \mu_{a_i}, \alpha_i \in R_{[0,1]}$$

(здесь под сложением подразумевается операция сложения в полумодуле $[0,1]^A$), где $\alpha_i = \mu_Q(a_i)$. Покажем, что такое представление единственно. Действительно пусть такое разложение не единственно, т. е.

$$\exists \alpha'_i \in R_{[0,1]} : \mu_Q = \sum_{i=1}^{|A|} \alpha'_i \mu_{a_i}$$

причем хотя бы одна из них отлична от α_i, например, α'_{i_0}, но тогда $\mu_Q(a_{i_0}) = \alpha'_{i_0} \neq \alpha_{i_0}$, что невозможно. ■

Таким образом, совокупность всевозможных нечетких множествах с одним конечным универсумом образует свободный полумодуль над полукольцом $R_{[0,1]}$. Поэтому будем рассматривать лишь нечеткие множества с конечным носителем.

Теперь дадим определение нечеткой линейной динамической системы с дискретным временем как системы над полукольцом.

3 Нечеткая линейная динамическая система. Мы имеем некоторую систему, которой в каждый момент времени поступает один из возможных сигналов конечного входного алфавита U, который может быть, как обыкновенным множеством, так и декартовым произведением нескольких множеств. При этом не известно, какой именно сигнал поступил, и можно лишь предположить с определенной долей достоверности, что это тот или иной сигнал. Такую ситуацию можно смоделировать, предположив, что в систему поступает сигнал в виде нечеткого множества $u(t) = \{\mu_{u(t)}(u), u \in U\}$. Так же у системы в каждый момент времени формируется выход в виде аналогичного неопределенного сигнала из конечного выходного алфавита Y, который можно смоделировать в виде нечеткого множества $y(t) = \{\mu_{y(t)}(y), y \in Y\}$. Более того существует отображение из входных воздействий в выходные реакции системы обладающих теми же свойствами, что и соотношение (1.2), что свидетельствует, о наличии пространства состояний. Таким образом, определим нашу систему.

Определение 5. *Линейной динамической нечеткой системой Σ с дискретным временем* будем называть стационарную линейную динамическую систему с дискретным временем над полукольцом $R_{[0,1]}$ в смысле определения 2, у которой:

U – множество всевозможных нечетких множеств над универсумом U (входной конечный алфавит);

Y – множество всевозможных нечетких множеств над универсумом Y (выходной конечный алфавит);

X – множество всевозможных нечетких множеств над универсумом X (конечное множество состояний системы);

U, Y, X – свободным полумодулям над полукольцом $R_{[0,1]}$;

$$F: X \to X;$$
$$G: U \to X \cong [0;1]^U \to X;$$
$$H: X \to Y \cong X \to [0,1]^Y.$$

Динамическое поведение системы Σ определяют уравнения:

$$\mu_{X(t+1)} = F\mu_{X(t)} + G\mu_{U(t)},$$
$$\mu_{Y(t)} = H\mu_{X(t)}.$$

Здесь сложение и умножение есть соответствующие операции полумодуля или полукольца.

Замечание. Подробно расписав матричные умножения получим, например,

$$\left(F\mu_{X(t)}\right)_i = \max_{i=1,\dots,|X|}\left(F_{i,j} \otimes x_j\right), \qquad (3.1)$$

где $\left(F\mu_{X(t)}\right)_i, x_j \in [0,1]$ соответствующие компоненты разложения векторов $\left(F\mu_{X(t)}\right), \mu_{X(t)}$ по базису свободного полумодуля X. Учитывая выбранный нами базис получим

$$\left(F\mu_{X(t)}\right)_i = \left(F\mu_{X(t)}\right)(x_i), x_j = \mu_{X(t)}(x_j),$$

где $x_i, x_j \in X$. Введя нечеткое отношение $F: X \times X \to [0,1]$, у которого $F(x_i, x_j) = F_{j,i}$, можно переписать (3.1) как

$$\left(F\mu_{X(t)}\right)(x) = \max_{x' \in X}\left(F(x', x) \otimes \mu_{X(t)}(x')\right).$$

Аналогично введя нечеткие отношения $G: U \times X \to [0,1], H: X \times Y \to [0,1]$ можно представить динамическое поведение системы как

$$\mu_{X(t+1)}(\hat{x}) = \max\begin{bmatrix} \max\limits_{\hat{x}' \in \hat{X}}(\hat{F}(\hat{x}', \hat{x}) \otimes \mu_{X(t)}(\hat{x}')); \\ \max\limits_{u \in U}(\hat{G}(\hat{u}, \hat{x}) \otimes \mu_{U(t)}(\hat{u})) \end{bmatrix},$$

$$\mu_{Y(t)}(\hat{y}) = \max_{\hat{x} \in \hat{X}}(\hat{H}(\hat{x}, \hat{y}) \otimes \mu_{X(t)}(\hat{x})). \qquad (3.2)$$

Утверждение 3 можно переписать как (3.2)

$$A_0(\hat{u}, \hat{y}) = \max_{\hat{x} \in \hat{X}}\left(\hat{H}(\hat{x}, \hat{y}) \otimes \hat{G}(\hat{u}, \hat{x})\right),$$

$$A_1(\hat{u}, \hat{y}) = \max_{\hat{x} \in \hat{X}}\max_{\hat{x}' \in \hat{X}}(\hat{H}(\hat{x}, \hat{y}) \otimes \hat{F}(\hat{x}, \hat{x}') \otimes \hat{G}(\hat{u}, \hat{x})),$$

$$\dots$$

$$A_i(\hat{u}, \hat{y}) = \max_{\hat{x} \in \hat{X}}\max_{\hat{x}_1 \in \hat{X}}\dots\max_{\hat{x}_i \in \hat{X}}(\hat{H}(\hat{x}, \hat{y}) \otimes \hat{F}(\hat{x}, \hat{x}_1) \otimes \dots$$
$$\dots \otimes \hat{F}(\hat{x}_{i-1}, \hat{x}_i) \otimes \hat{G}(\hat{u}, \hat{x})), \qquad (3.3)$$

где $A_0, A_1, \dots, A_i$ импульсная характеристика системы, т. е.

$$\mu_{Y(t)}(y) = \max_{i=0,t}\max_{u_j \in U}(A_{t-i}(u_j, y) \otimes \mu_{U(i)}(u_j)). \qquad (3.4)$$

Проиллюстрируем динамическое поведение нечеткой системы на следующем числовом примере.

Пример 1. Пусть имеется нечеткая динамическая система, заданная с точки зрения ее внешнего поведения относительно Т-нормы $\otimes = min$, где $U = \{u_0, u_1\}, X = \{x_0, x_1, x_2\}, Y = \{y_0, y_1\}$. Также в системе имеется отображение входных воздействий

$$\mu_{U(0)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \mu_{U(1)} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\mu_{U(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \mu_{U(3)} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,7 \end{pmatrix}\dots$$

в выходные реакции

$$\mu_{Y(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \mu_{Y(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix},$$
$$\mu_{Y(3)} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}, \mu_{Y(3)} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,6 \end{pmatrix}\dots.$$

Данное отображение можно представить с помощью импульсной характеристики удовлетворяющей соотношению (3.4):

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_0(u_o, y_0) & A_0(u_1, y_0) \\ A_0(u_0, y_1) & A_0(u_1, y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix};$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Эту импульсную последовательность матриц можно реализовать как нечеткую линейную динамическую систему $\Sigma(F, G, H)$ удовлетворяющую соотношениям (3.2) и (3.3), где

$$F = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 \end{pmatrix};$$
$$H = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

При этом внутреннее состояние системы будет меняться следующим образом

$$\mu_{X(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mu_{X(1)} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}, \; \mu_{X(2)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\mu_{X(3)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \; \mu_{X(4)} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}, \ldots$$

Заключение

В работе введены понятия линейной динамической системы над полукольцом как системы с пространством состояний и с точки зрения ее внешнего поведения. Изучены некоторые их свойства. Показана взаимосвязь двух этих понятий путем представления импульсной последовательности матриц тройкой матриц *F, G, H*. Также показано, что всевозможные нечеткие множества с общим универсумом можно рассматривать как полумодуль над полукольцом $R_{[0,1]}$ действительных чисел из отрезка [0,1]. Рассмотрен класс систем с нечетким входом и выходом, который был, соответственно, представлен, как определенный вид систем над полукольцом.

Результаты, представленные в работе, являются шагом на пути создания теории нечетких систем. Построение данной теории в рамках математической теории систем разработанной Калманом дает возможность применения широко используемого аппарата для моделирования процессов с неопределенностью. Что, в свою очередь, может стать действенным инструментом при практическом проектировании более универсальных систем управления и нечетких регуляторов.

04.07.2011

Список литературы:

1. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: Мир, 1978.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control, 1965, 8.
4. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
5. Пушков С.Г. Об общей теории нечетких систем: глобальные состояния и нечеткая глобальная реакция нечеткой системы // Изв. РАН. ТиСУ. – 2001. – №5.
6. Кожухарь В.А., Пушков С.Г. К общей теории нечетких систем: нечеткая линейность, нечеткие динамические системы // Изв. РАН. ТиСУ. – 2008. – №5.

Сведения об авторах: **Пушков С.Г.,** заведующий кафедрой математической кибернетики Оренбургского государственного университета, доктор технических наук, профессор

Баклыков А.А., ассистент кафедры математической кибернетики Оренбургского государственного университета, аспирант

460018, пр. Победы 13, ауд. 1410, тел.: (3532)372535, e-mail: baklykoff_87@mail.ru

UDC 512.55; 681.51; 004.827

Baklykov A.A., Pushkov S.G.

Orenburg state university, e-mail: baklykoff_87@mail.ru

FUZZY LINEAR DYNAMIC SYSTEM AS A SYSTEM OVER SEMIRINGS

We study the problem of describing the dynamics of the process with some degree of uncertainty. The concept of linear dynamical systems over a semiring is introduced, and a number of its properties is described. Fuzzy set is represented as a semimodule over the semiring of real numbers from the interval [0,1]. We study the possibility of such a representation for the theory of fuzzy linear dynamical systems.

Key words: linear dynamical systems, semiring, semimodule, fuzzy set, fuzzy systems.

Bibliography:

1. Mesarovic M., Takahara Y. General systems theory: mathematical foundations. Moscow: Mir, 1978.
2. Kalman R., Falb P., Arbib M. Topics on mathematical systems theory. Moscow: Mir, 1971.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control, 1965, 8.
4. Averkin A.N., Batyrshin I.Z., Blishun A.F. etc. Fuzzy sets in management models and artificial intelligence. Moscow: Nauka, 1986.
5. Pushkov S.G. On the general theory of fuzzy systems: global states and a fuzzy global response of fuzzy systems // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. – 2001. – №5.
6. Kozhukhar V.A., Pushkov S.G. On the general theory of fuzzy systems: fuzzy linear, fuzzy dynamical systems // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. – 2008. – №5.