УДК 330.4:519.21:330.322:368

Реннер А.Г., Буреш А.И.
Оренбургский государственный университет
E-mail: mme@mail.osu.ru

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Строится модель вероятности неразорения страховой компании, инвестирующей средства в портфель из рисковых и безрисковых активов. Обсуждается вопрос оптимизации во времени вероятности неразорения.

Ключевые слова: вероятность неразорения страховой компании, безрисковые и рисковые активы, инвестирование.

Работы Башелье, Самуэльсона положили основу применения методов теории случайных процессов в портфельном инвестировании, позволяющих наиболее адекватно описывать динамику основных и производных ценных бумаг, а следовательно ввести в рассмотрение дополнительный параметр время. Наиболее заметным результатом портфельной теории прошлого века является теория Блэка-Шоулза [1]. В основе теории лежит предположение:

– о непрерывной временной аппроксимации параметров оборота активов;

– постоянство безрисковой процентной ставки *r* для всех сроков погашения;

– по акциям не выплачиваются дивиденды;

– отсутствие арбитража;

– доходность акции имеет логнормальное распределение.

Стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито, характеризующее изменение цены одного рискового актива

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW_t), \qquad (1)$$

где μ – средняя ставка доходности актива;

σ – волатильность, показывающая стандартное отклонение доходности актива;

W_t – винеровский процесс.

Если в состав инвестиционного портфеля страховой компании включается безрисковый актив $S_0(t)$ с постоянной процентной ставкой r

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt, \qquad (2)$$

и n рисковых активов $S_i(t),\ i = \overline{1,n}$ с ожидаемыми средними доходностями $\mu(t) = \{\mu_i(t)\}_{i=\overline{1,n}}$ и ковариационной матрицей активов $\sum = \{\sigma_{ij}(t)\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$, то динамика цены каждого актива

$$\begin{cases} dS_i(t) = S_i(t)\left(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^{(t)} dW_j(t)\right) \\ S_i(0) = S_i^{(t)},\ i = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (3)$$

где $W(t) = (W_1(t) \ldots W_n(t))^T$ – n-мерный винеровский процесс.

При этом естественно считать, что $\mu_i \geq r$.

На основе моделей динамики рыночных активов построим модель динамики инвестиций страховой компании в портфель $\Pi(t) = \{\Pi_1(t) \ldots \Pi_n(t)\}$.

Пусть $Y(t)$ – капитал инвестора (страховой компании) в момент времени t (стоимость портфеля), а $N_i(t),\ i = \overline{1,n}$ – число единиц i-го актива в портфеле в этот момент. Тогда

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)S_i(t) + N_0(t)S_0(t). \qquad (4)$$

Отметим, что среди $N_i(t)$ могут быть отрицательные, что соответствует так называемой короткой продаже (продаже актива, которого у продавца в наличии нет, осуществленная в ожидании падения цен).

Динамика капитала портфеля страховой компании $Y(t)$ описывается задачей Коши для стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{cases} dY(t) = N_0(t)dS_0(t) + \sum_{i=1}^{n} N_i(t)dS_i(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \qquad (5)$$

Если учитывать поступающие с интенсивностью $C(t)$ премии и выплаты $Z_i, i = \overline{0, N(t)}$ по искам

$$\begin{cases} dY(t) = Y(t)[(1-\Pi I)r + \Pi\mu]dt + Y(t)\Pi\sum dW(t) + C(t)dt - d\left(\sum_{i=0}^{N(t)} Z_t\right) \\ Y|_{t=0} = u \end{cases} \quad (6)$$

где u – начальный капитал компании;

$C(t)$ – интенсивность поступления страховых премий

$N(t)$ – число поступивших исков за время $[0,t]$ – пуассоновский процесс с параметром λt;

$\{Z_i\}_{i=\overline{0,N(t)}}$ – размеры выплат страховой компании по искам – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения вероятностей $f(x)$;

$I = (1,1...1)^T$ – n-мерный единичный вектор;

$1 - \Pi I = \alpha$ – доля безрискового актива;

r – доходность безрискового актива.

Модель (6) перепишем в виде

$$\begin{cases} dY_t = Y(t)[(1-\Pi I)r + \Pi\mu]dt + Y(t)\Pi\sum dW_t + C(t)dt - \int_Z zP(dt,dz), \\ Y|_{t=0} = u. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $P(dt,dz)$ – [2] – целочисленная случайная мера с компенсатором $\tilde{P}(dt,dz) = \lambda dt F(dz)$, соответствующая точечному случайному процессу $\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$.

Решение (7) можно последовательно искать на каждом полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0,1,...n$, где $t_1, t_2 ... t_n$ моменты скачков Пуассоновского процесса. Аппроксимируя в (7):

$$\int_Z zp(dt,dz) = \lambda \bar{Z}(t)dt, \quad (8)$$

где $\bar{Z}(t) = \frac{1}{N(t)}\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ – средний суммарный размер иска в момент скачка Пуассоновского процесса, мы $Y(t)$ можем рассматривать как марковский процесс.

Обозначим:

$$\psi(Y,t) = Y(t)[(1-\Pi I)r + \Pi\mu] + C(t) - \lambda\bar{Z}(t), \quad (9)$$

$$G(Y,t) = Y(t)\Pi\sum. \quad (10)$$

Пусть $P(t,X,\tau,Y)$ – условная плотность распределения того, что размер капитала в момент времени τ равен Y, если в момент времени $t<\tau$ он был равен X.

Известно [3], что $P(t,X,\tau,Y)$ удовлетворяет второму уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial\tau}[P(t,x,\tau,y)] + \frac{\partial}{\partial y}[a(y,\tau)P(t,x,\tau,y)]\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\times$$

$$\times[b(y,\tau)P(t,x,\tau,y)] = 0, \quad (11)$$

где $a(y,\tau) = \psi(y,\tau)$, (12)

$b(y,\tau) = G(y,\tau)G^T(y,\tau)$. (13)

В качестве начального условия, учитывая то обстоятельство, что значение $Y(t)$ в начальный момент $\tau=t=0$ задано и равно u, следует положить при $t=0$

$$P(t,x,\tau,y)|_{\tau=t=0} = \delta(x-y)|_{t=0} = \delta(u-y). \quad (14)$$

Нас интересует вероятность того, что капитал компании в течение времени $t \in T(t,\tau) = (t_1 t + C)$* – остается положительным $(0 < Y(\tau) < \infty)$, т. е. вероятность неразорения компании.

Если обозначать далее $P(\tau,y)$ – условную плотность распределения вероятностей, то вероятность $P(\tau) = P\ (0 < Y(\tau) < \infty)$ в момент времени τ определяется равенством

$$P(\tau) = \int_0^\infty P(\tau,y)dy, \quad (15)$$

* С – любая положительная константа

** на практике $y=\infty$ заменяют $y=y_{max}$, где y_{max} – некоторое достаточно большое значение, такое что $\int_0^{y_{max}} P(\tau,y)dy = 1$

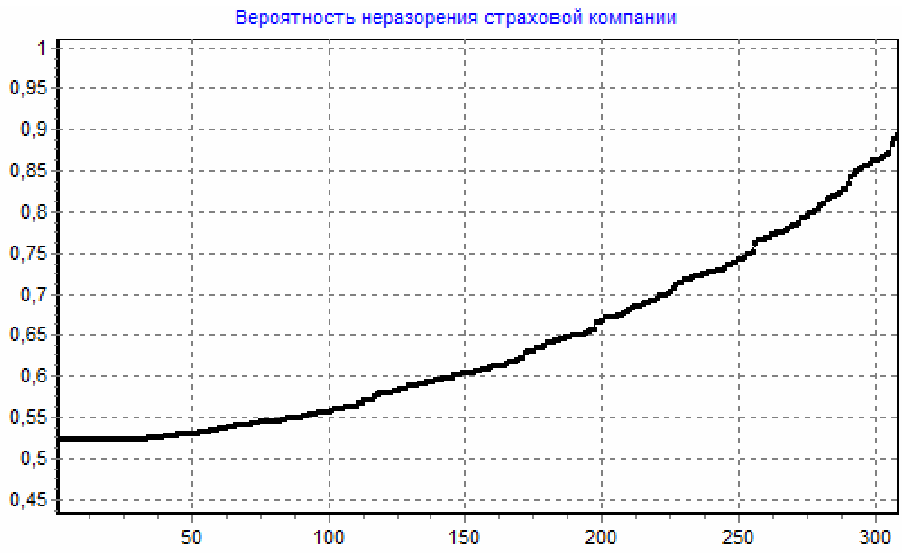

Рисунок 1. Зависимость вероятности неразорения от времени

а функция $P(\tau,y)$ определяется как решение уравнения (11), с начальным условием (14) и граничным условием

$$P(\tau,0)=0 \quad \tau > t = 0, \qquad (16)$$

$$P(\tau,\infty)=0 ^{**} \tau > t = 0. \qquad (17)$$

Приведем результаты расчетов для случая инвестирования средств страховой компании в один безрисковый (доля b) и один рисковый (доля a), a+b=1, активы. Модель (7) принимает вид:

$$dY(t)= Y(t)(r\beta+\alpha\mu)dt + cdt + Y(t)\alpha\sigma dW_t - \lambda\overline{Z}(t)=0 \qquad (7a)$$

В смешанной краевой задаче (11, 14, 16, 17) для второго уравнения Колмогорова:

$$a(Y,\tau)= Y(\tau)(r\beta+\alpha\mu)+c-\lambda\overline{Z}(t),$$
$$b(Y,\tau)=\alpha\sigma Y(\tau).$$

Решая смешанную краевую задачу, численно, аппроксимировав её неявной разностной схемой при фиксированных значениях $u,r,\beta,\alpha,\mu,\sigma,c,\lambda$, получим $P(\tau,y)$ и, в соответствии с (15) вычисляем $P(\tau)\equiv P(\tau|u,r,\beta,\alpha,\mu,\sigma,c,\lambda)$.

При инвестировании средств в рисковый актив: $\beta=0$, $\alpha=1$, $\lambda=3{,}82$ исков/день, c=196,5 тыс. руб./день, r=0,13, μ=0,4, s=0,2, u=105 тыс. руб. – получим оценку зависимости $P(\tau)$, представленную на рисунке 1.

Как видно из рисунка 1 вероятность неразорения 0,9 достигается, при указанном наборе параметров, лишь к концу первого года функционирования страховой компании, что говорит о целесообразности оптимизации параметров инвестирования на начальном этапе. В частности, максимизировать вероятность неразорения наиболее целесообразно за счет диверсификации вложений. К примеру, инвестирование средств в безрисковый и рисковый актив в соотношении $\beta=0{,}5$ $\alpha=0{,}5$ (при неизменных прочих параметрах) позволяет достичь уровня $P(\tau)=0{,}9$ почти вдвое быстрее (192 дня). Следует ожидать еще большего эффекта при варьировании параметров портфеля с несколькими различными безрисковыми активами.

15.11.2012

Список литературы:

1. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973.
2. Paulsen, J. Risk theory in a stochastic environment // J. Stochastic Process. Appl. – 1993. – V. 21. – P. 327–361.
3. Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения. – М.: МИР, 2003.

Сведения об авторах:

Реннер Александр Георгиевич, заведующий кафедрой математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета, доцент, кандидат технических наук

Буреш Антон Игоревич, старший преподаватель кафедры математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 6106, тел. (3532) 372444, e-mail: mme@mail.osu.ru