УДК 51

Шихаб Али Абдул-маджид
Московский педагогический государственный университет
E-mail: ali.abd82@yahoo.com

ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ПОСТОЯННОЙ ГОЛОМОРФНОЙ КОНГАРМОНИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ

В работе рассматриваются приближенно келеровы многообразия точечно постоянной конгармонично голоморфной кривизны. Доказано, что *NK*-многообразие является многообразием точечно постоянной конгармонично голоморфной кривизны *c* тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры $\tilde{A}^{ad}_{bc}=\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$. Также показано, что точечное постоянство голоморфной конгармонической кривизны связного *NK*-многообразия размерности свыше четырех равносильно ее глобальному постоянству.

Ключевые слова: приближенно келеровы многообразия; тензор конгармоничной кривизны; пространство присоединенной G-структуры; тензор голоморфной конгармонической кривизны.

Пусть $\{M^{2n},g,J\}$ – почти эрмитово многообразие, X(M) – модуль гладких векторных полей на многообразии M^{2n}.

В 2-грассманиане (т.е. совокупности всех двумерных площадок) AH-многообразия (M,g,J) естественно выделяются элементы, наиболее тесно связанные с AH-структурой, а именно, инвариантные относительно структурного эндоморфизма J.

Определение 1 [1, стр. 358]. Двумерная площадка $\sigma\subset T_m(M)$, mОM, называется голоморфной, если $J_m(\sigma)=\sigma$.

Предложение 1 [1, стр. 358]. Двумерная площадка $\sigma\subset T_m(M), m\in M$, голоморфна тогда и только тогда, когда $\sigma=L(X,JX)$, где XО X(M) – некоторый вектор, L – символ взятия линейной оболочки.

Определение 2 [1, стр. 358-359]. Секционная кривизна почти эрмитова многообразия (M,g,J) в направлении двумерной площадки $\sigma\subset T_m(M), m\in M$, называется голоморфной секционной кривизной в направлении (ненулевого) вектора XОs и обозначается $H_m(X)$. Таким образом,

$$H_m(X)=\frac{<R_m(X,JX)JX,X>}{\|X\|^4};$$

$$m\in M, X\in T_m(M). \tag{1}$$

Если $H_m(X)$ не зависит от выбора $\sigma\subset T_m(M)$ в каждой точке mОM, многообразие M называется многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны.

Если $H_m(X)$ не зависит также от выбора точки m, многообразие M называется многообразием глобально постоянной голоморфной секционной кривизны.

Понятие голоморфной секционной кривизны (короче, HS-) кривизны является одним из наиболее фундаментальных понятий в геометрии почти эрмитовых многообразий и изучалось многими авторами, среди которых отметим Кобаяши [2], Либерман [3], А. Грея [4] и др. Наибольшие продвижения были получены для келеровых и приближенно келеровых многообразий. Кобаяши [2] доказал, что полное келерово многообразие положительной голоморфной секционной кривизны с необходимостью односвязно. А. Грей [5] получил обобщение этого результата для приближенно келеровых многообразий. Холи [6] и Игуса [7] получили полную классификацию полных односвязных келеровых многообразий размерности свыше двух постоянной голоморфной секционной кривизны:

Теорема 1 [1, стр. 359]. Всякое полное односвязное келерово многообразие размерности свыше двух постоянной голоморфной секционной кривизны c голоморфно изометрично одному из следующих многообразий:

1) При c>0 – комплексному проективному пространству CP^n, снабженному стандартной эрмитовой метрикой $<<\cdot,\cdot>>=ds^2$, в каноническом атласе задаваемой соотношением

$$ds^2=\frac{4}{c}\frac{\left(1+\sum_a z^a\bar{z}^a\right)\left(\sum_a dz^a d\bar{z}^a\right)-\left(\sum_a \bar{z}^a dz^a\right)\left(\sum_a z^a d\bar{z}^a\right)}{\left(1+\sum_a z^a\bar{z}^a\right)^2};$$

2) При c=0 – комплексному евклидову пространству C^n, снабженному стандартной эрмитовой метрикой $<< \cdot,\cdot >>= ds^2$, в каноническом атласе задаваемой соотношением

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{n} dz^a d\bar{z}^a \ ;$$

3) При $c<0$ – комплексному гиперболическому пространству CD^n, представляющему собой открытый единичный шар

$$D^n = \left\{ \left(z_1, \cdots, z^n\right) \in C^n \left| \sum_{a=1}^{n} z^a \bar{z}^a < 1 \right. \right\},$$

снабженному стандартной эрмитовой метрикой $<< \cdot,\cdot >>= ds^2$, в каноническом атласе открытого подмногообразия $D^n MC^n = R^{2n}$ задаваемой соотношением

$$ds^2 = -\frac{4}{c}\frac{\left(1-\sum_a z^a \bar{z}^a\right)\left(\sum_a dz^a d\bar{z}^a\right) - \left(\sum_a \bar{z}^a dz^a\right)\left(\sum_a z^a d\bar{z}^a\right)}{\left(1-\sum_a z^a \bar{z}^a\right)^2}.$$

Обобщением этого результата на приближенно келеровы многообразия получена независимо А.Греем [4] и В.Ф.Кириченко [10]. В работе [11] В.Ф.Кириченко получена (в сильно обобщенном виде) локальная версия этих результатов, из которых следует, что всякое келерово многообразие размерности свыше двух постоянной голоморфной секционной кривизны c локально голоморфно изометрично одному из трех типов многообразий, перечисленных в теореме 1, причем с необходимостью эта кривизна является глобально постоянной.

Заметим, что двумерное ориентированное риманово многообразие (M, g), очевидно, автоматически несет келерову структуру точечно постоянной голоморфной секционной кривизны [1, стр. 360].

Определение 3 [1, стр. 360]. Келерово многообразие (глобально) постоянной голоморфной секционной кривизны называется комплексной пространственной формой.

Приближенно келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны рассматривались многими авторами, среди них – А. Грей [5, 12, 13], Навейра А.М., Хервелла Л.М. [14], Сато И. [15], Саваки С. [16], Ватанабэ У., Такамацу К. [17], Кириченко В.Ф. [10, 18, 19]. Это была очень популярная тематика среди исследователей NK-многообразий до тех пор пока А. Греем [4] и В.Ф.Кириченко [10] не была получена полная классификация таких многообразий.

В [1] получен удобный критерий постоянства голоморфной секционной кривизны почти эрмитова многообразия.

Теорема 2 [1, стр. 361]. Почти эрмитово многообразие (M, g, J) является многообразием постоянной HS-кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется соотношение $R^{(a\ \ d)}_{(bc)} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$, где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = \delta^a_b \delta^d_c + \delta^a_c \delta^d_b$ – симметричная кронеккеровская дельта второго порядка.

Предложение 2 [1, стр. 380]. NK-многообразие является многообразием точечно постоянной HS-кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $A^{ad}_{bc} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$.

Теорема 3 [1, стр. 381]. Точечное постоянство голоморфной секционной кривизны связного NK-многообразия размерности свыше двух равносильно ее глобальному постоянству.

Другими способами этот факт доказали Навейра А.М., Хервелла Л.М. [14] и Саваки С. [16].

Кириченко В.Ф. получил полную классификацию NK-многообразий постоянной голоморфной кривизны:

Теорема 4 [1, стр. 385]. Всякое NK-многообразие постоянной голоморфной секционной кривизны либо является двумерным келеровым многообразием, либо локально голоморфно изометрично одному из следующих многообразий, снабженных канонической NK-структурой:

(1) Комплексному проективному пространству CP^n;

(2) Комплексному евклидову пространству C^n;

(3) Комплексному гиперболическому пространству CD^n;

(4) Шестимерной сфере S^6.

В связи с этим естественно провести аналогичные исследования для другого алгебраического тензора кривизны – тензора конгармонической кривизны.

Определение 4. *Голоморфной конгармонической кривизной* (короче, *НК-кривизной*) $HK_m(X)$ многообразия M в направлении XО $X(M)$, X№0, называется $HK(X)$, определяемая соотношением

$$K(X, JX, X, JX) = HK_m(X)\|X\|^4, \forall X \in X(M)$$

$$HK_m(X) = \frac{\langle K_m(X, JX)JX, X\rangle}{\|X\|^4}, m \in M, X \in T_m(M).$$

Определение 5. Почти эрмитово многообразие M^{2n} называется многообразием точечно постоянной голоморфной конгармонической кривизны, если $HK_m(X)$ не зависит от выбора XО $X(M)$.

Определение 6. Почти эрмитово многообразие M^{2n} точечно постоянной голоморфной конгармонической кривизны называется многообразием голоморфной конгармонической кривизны, если HK_m есть константа (т. е. HK_m не зависит от выбора точки mОM).

Теорема 5. Почти эрмитово многообразие (M, g, J) является многообразием постоянной HK-кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $\hat{E}^{(a\ \ d)}_{\ (bc)} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$.

Доказательство. Пусть (M^{2n}, J, g) – почти эрмитово многообразие. Согласно определения 6 имеем $< K(X, JX)JX, X >= 4HK(X)\|X\|^4$. Расписывая это равенство на пространстве присоединенной G-структуры, получим:

$$\begin{aligned}< K(X, JX)JX, X > &= g_{ij}K^j_{klm}(JX)^k X^l (JX)^m X^i = \\ &= -2K^a_{bcd}X_a X^b X^c X^d + 4K^a_{bc\hat{d}}X_a X^b X^c X_d + \\ &+ 2K^a_{\hat{b}\hat{c}d}X_a X_b X_c X^d + 2K^{\hat{a}}_{\hat{b}cd}X_a X_b X^c X^d - \\ &- K^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}X_a X_b X_c X_d - K^{\hat{a}}_{bcd}X^a X^b X^c X^d.\end{aligned}$$

В силу свойств симметрии тензора конгармонической кривизны имеем:

$$K^a_{bcd}X_a X^b X^c X^d = -\underbrace{K^a_{bdc}X_a X^b X^c X^d}_{c \leftrightarrow d} = $$
$$= -K^a_{bcd}X_a X^b X^c X^d,$$

т. е. $K^a_{bdc} = 0$. Аналогично, $K^{\hat{a}}_{bcd} = 0$, $K^a_{\hat{b}cd} = 0$, $K^a_{\hat{b}\hat{c}d} = 0$, $K^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0$. Таким образом, на пространстве присоединенной G-структуры $HK(X)\|X\|^4 = 4K^a_{bc\hat{d}}X_a X^b X^c X_d = 4K^{(a\ \ d)}_{\ (bc)}X_a X^b X^c X_d$. С другой стороны, на пространстве присоединенной G-структуры

$$\|X\|^4 = 4(X^a X_a)(X^b X_b) = 2\tilde{\delta}^{ad}_{bc}X_a X^b X^c X_d.$$

Таким образом, M является многообразием постоянной HK-кривизны c тогда и только тогда, когда $\left(4K^{(a\ \ d)}_{\ (bc)} - 2\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\right)X_a X^b X^c X_d \equiv 0$. В силу тождественности характера этого соотношения относительно $X \in X(M)$ заключаем, что

$$K^{(a\ \ d)}_{\ (bc)} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}.$$

Пусть теперь (M^{2n}, J, g) – NK-многообразие. Поскольку

$$K^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - B^{adh}B_{hbc} - \frac{1}{2(n-1)}\left(\delta^a_c\delta^d_b + \delta^a_b\delta^d_c\right),$$

с учетом кососимметричности структурного тензора и теоремы 5, имеем:

$$A^{ad}_{bc} - \frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b S^d_c + \delta^a_c S^d_b + \delta^d_b S^a_c + \delta^d_c S^a_b\right) = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}.$$

Введем в рассмотрение чистый тензор $\tilde{A}$ типа $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ с компонентами

$$\tilde{A}^{ad}_{bc} = A^{ad}_{bc} - \frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b S^d_c + \delta^a_c S^d_b + \delta^d_b S^a_c + \delta^d_c S^a_b\right)$$

симметричный по любой паре верхних и нижних индексов. Тогда предыдущее равенство запишется в виде

$$\tilde{A}^{ad}_{bc} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}. \qquad (2)$$

Рассмотрим 4-форму

$$H(X, Y, Z, W) = \tilde{A}^{ad}_{bc}X^b Y^c Z_a W_d =$$
$$= \left\{A^{ad}_{bc} - \frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b S^d_c + \delta^a_c S^d_b + \delta^d_b S^a_c + \delta^d_c S^a_b\right)\right\}\times$$
$$\times X^b Y^c Z_a W_d;\ X, Y, Z, W \in X(M).$$

В силу (2) имеем, что $H(X, X, X, X) = 0$. Кроме того, форма $H(X, X, X, X)$ обладает свойствами, которые легко доказываются:

1. $H(X_1 + X_2, Y, Z, W) =$

$$= \left\{A^{ad}_{bc} - \frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b S^d_c + \delta^a_c S^d_b + \delta^d_b S^a_c + \delta^d_c S^a_b\right)\right\}\times$$
$$\times (X_1 + X_2)^b Y^c Z_a W_d =$$

$$=\left\{A^{ad}_{bc}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b S^d_c+\delta^a_c S^d_b+\delta^d_b S^a_c+\delta^d_c S^a_b\right)\right\}\times$$
$$\times X_1^b Y^c Z_a W_d +$$
$$+\left\{A^{ad}_{bc}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b S^d_c+\delta^a_c S^d_b+\delta^d_b S^a_c+\delta^d_c S^a_b\right)\right\}\times$$
$$\times X_2^b Y^c Z_a W_d = H(X_1,Y,Z,W)+H(X_2,Y,Z,W);$$

2. $H(X,Y,Z,W)=H(Y,X,Z,W)=$
$=H(X,Y,W,Z);$
3. $H(X,Y,Z_1+Z_2,W)=$
$=H(Y,X,Z_1,W)+H(X,Y,Z_2,W);$
4. $H(JX,Y,Z,W)=\sqrt{-1}H(Y,X,Z,W);$
5. $H(X,Y,JZ,W)=-\sqrt{-1}H(Y,X,Z,W);$
$X,Y,Z,W\in X(M)$.

Опираясь на приведенные свойства, докажем, что $H(X,Y,Z,W)=0$. Так как $H(X,X,X,X)=0$, то $H(X+Y,X+Y,X+Y,X+Y)=0$. Отсюда,

$$\begin{gathered}2H(X,X,X,Y)+H(X,X,Y,Y)+\\+2H(X,Y,X,X)+4H(X,Y,X,Y)+\\+2H(X,Y,Y,Y)+H(Y,Y,X,X)+\\+2H(Y,Y,X,Y)=0.\end{gathered}\qquad(3)$$

Сделаем в (2) замену $X\to -X$ и складывая почленно полученный результат с (3), получим:

$$\begin{gathered}H(X,X,Y,Y)+4H(X,Y,X,Y)+\\+H(Y,Y,X,X)=0.\end{gathered}\qquad(4)$$

Сделаем в последнем равенстве замену $X\to JX$, полученный результат сложим почленно с (4), тогда получим: $H(X,Y,X,Y)=0$. С учетом этого равенства, равенство (4) примет вид: $H(X,X,Y,Y)+H(Y,Y,X,X)=0$, где сделаем замену $X\to X+Z$. В результате чего имеем:

$$H(X,Z,Y,Y)+H(Y,Y,X,Z)=0\,. \qquad (5)$$

Произведем в (5) замену $X\to JX$, тогда $\sqrt{-1}H(X,Z,Y,Y)-\sqrt{-1}H(Y,Y,X,Z)=0$, т. е. $H(X,Z,Y,Y)-H(Y,Y,X,Z)=0$. Складывая последнее равенство с (5), получим: $H(X,Z,Y,Y)=0$. В полученном равенстве сделаем замену $Y\to Y+W$, тогда $H(X,Z,Y,Y)+2H(X,Z,Y,W)+H(X,Z,W,W)=0$, т. е. $H(X,Z,Y,W)=0$. Отсюда заменой $Z\leftrightarrow Y$ получим требуемое, т. е. $H(X,Y,Z,W)=0$, $\forall X,Y,Z,W\in X(M)$.

Итак, мы получили следующий результат

Теорема 6. NK-многообразие является многообразием точечно постоянной конгармонично голоморфной кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры

$$\tilde{A}^{ad}_{bc}=\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc} \qquad (6)$$

Продифференцируем внешним образом соотношение (6): $d\tilde{A}^{ad}_{bc}=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}dc$. Поскольку $c\in C^\infty(M)$, dc (а точнее, $d(\pi^* c)=\pi^*(dc)$) является горизонтальной формой, а значит, $dc=c_a\omega^a+c^a\omega_a$. Тогда имеем:

$d\tilde{A}^{ad}_{bc}=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\left(c_h\omega^h+c^h\omega_h\right)$, т. е.

$$dA^{ad}_{bc}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b dS^d_c+\delta^d_b dS^a_c+\delta^a_c dS^d_b+\delta^d_c dS^a_b\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\left(c_h\omega^h+c^h\omega_h\right).$$ С учетом равенств:

1) $dA^{ad}_{bc}=A^{adh}_{bc}\omega_h+A^{ad}_{bch}\omega^h+A^{ad}_{hc}\theta^h_b+$
$+A^{ad}_{bh}\theta^h_c-A^{hd}_{bc}\theta^a_h-A^{ah}_{bc}\theta^d_h$;

2) $dS^a_b=d\left(A^a_b+3B^a_b\right)=A^{ach}_{bc}\omega_h+A^{ac}_{bch}\omega^h+$
$+\left(A^a_c+3B^a_c\right)\theta^c_b-\left(A^c_b+3B^c_b\right)\theta^a_c$, (7)

где $A^{ad}_{b[ch]}=A^{a[dh]}_{bc}=0$, (8)

последнее равенство примет вид

$$\begin{gathered}
A^{adh}_{bc}\omega_h+A^{ad}_{bch}\omega^h+A^{ad}_{hc}\theta^h_b+A^{ad}_{bh}\theta^h_c-A^{hd}_{bc}\theta^a_h-A^{ah}_{bc}\theta^d_h-\\
-\frac{1}{4(n-1)}\left\{\delta^a_b\left[A^{df}_{cfh}\omega^h+A^{dfh}_{cf}\omega_h+\left(A^d_f+3B^d_f\right)\theta^f_c-\left(A^f_c+3B^f_c\right)\theta^d_f\right]\right\}+\\
+\frac{1}{4(n-1)}\left\{\delta^d_b\left[A^{af}_{cfh}\omega^h+A^{afh}_{cf}\omega_h+\left(A^a_f+3B^a_f\right)\theta^f_c-\left(A^f_c+3B^f_c\right)\theta^a_f\right]\right\}+\\
+\frac{1}{4(n-1)}\left\{\delta^a_c\left[A^{df}_{bfh}\omega^h+A^{dfh}_{bf}\omega_h+\left(A^d_f+3B^d_f\right)\theta^f_b-\left(A^f_b+3B^f_b\right)\theta^d_f\right]\right\}+\\
+\frac{1}{4(n-1)}\left\{\delta^d_c\left[A^{af}_{bfh}\omega^h+A^{afh}_{bf}\omega_h+\left(A^a_f+3B^a_f\right)\theta^f_b-\left(A^f_b+3B^f_b\right)\theta^a_f\right]\right\}=\\
=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\left(c_h\omega^h+c^h\omega_h\right),
\end{gathered}$$

т. е.

$$\left\{A^{ad}_{bch}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b A^{df}_{cfh}+\delta^d_b A^{af}_{cfh}+\delta^a_c A^{df}_{bfh}+\delta^d_c A^{af}_{bfh}\right)\right\}\omega^h+$$
$$+\left\{A^{adh}_{bc}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b A^{dfh}_{cf}+\delta^d_b A^{afh}_{cf}+\delta^a_c A^{dfh}_{bf}+\delta^d_c A^{afh}_{bf}\right)\right\}\omega_h+$$
$$+\left[A^{ad}_{hc}-\frac{1}{4(n-1)}\left\{\delta^a_c\left(A^d_h+3B^d_h\right)+\delta^d_c\left(A^a_h+3B^a_h\right)\right\}\right]\theta^h_b+$$
$$+\left[A^{ad}_{bh}-\frac{1}{4(n-1)}\left\{\delta^a_b\left(A^d_h+3B^d_h\right)+\delta^d_b\left(A^a_h+3B^a_h\right)\right\}\right]\theta^h_c-$$
$$-\left[A^{hd}_{bc}-\frac{1}{4(n-1)}\left\{\delta^d_b\left(A^h_c+3B^h_c\right)+\delta^d_c\left(A^h_b+3B^h_b\right)\right\}\right]\theta^a_h-$$
$$-\left[A^{ah}_{bc}-\frac{1}{4(n-1)}\left\{\delta^a_b\left(A^h_c+3B^h_c\right)+\delta^a_c\left(A^h_b+3B^h_b\right)\right\}\right]\theta^d_h=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\left(c^h\omega_h+c_h\omega^h\right).$$

Поскольку

$$\delta^a_h\left(A^d_c+3B^d_c\right)\theta^h_b+\delta^d_h\left(A^a_c+3B^a_c\right)\theta^h_b+\delta^a_h\left(A^d_b+3B^d_b\right)\theta^h_c+\delta^d_h\left(A^a_b+3B^a_b\right)\theta^h_c-$$
$$-\delta^h_b\left(A^d_c+3B^d_c\right)\theta^a_h-\delta^h_c\left(A^d_b+3B^d_b\right)\theta^a_h-\delta^h_b\left(A^a_c+3B^a_c\right)\theta^d_h-\delta^h_c\left(A^a_b+3B^a_b\right)\theta^d_h=0,$$

то, в силу (5), последнее равенство можно записать в виде:

$$\left\{A^{ad}_{bch}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b A^{df}_{cfh}+\delta^d_b A^{af}_{cfh}+\delta^a_c A^{df}_{bfh}+\delta^d_c A^{af}_{bfh}\right)\right\}\omega^h+\left\{A^{adh}_{bc}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b A^{dfh}_{cf}+\delta^d_b A^{afh}_{cf}+\delta^a_c A^{dfh}_{bf}+\delta^d_c A^{afh}_{bf}\right)\right\}\omega_h+$$
$$+\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{hc}\theta^h_b+\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bh}\theta^h_c-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{hd}_{bc}\theta^a_h-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ah}_{bc}\theta^d_h=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\left(c^h\omega_h+c_h\omega^h\right).$$

Так как $\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{hc}\theta^h_b+\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bh}\theta^h_c-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{hd}_{bc}\theta^a_h-\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ah}_{bc}\theta^d_h=0$, то в силу линейной независимости базисных форм, имеем:

1) $A^{ad}_{bch}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b A^{df}_{cfh}+\delta^d_b A^{af}_{cfh}+\delta^a_c A^{df}_{bfh}+\delta^d_c A^{af}_{bfh}\right)=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}c_h$;

2) $A^{adh}_{bc}-\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^a_b A^{dfh}_{cf}+\delta^d_b A^{afh}_{cf}+\delta^a_c A^{dfh}_{bf}+\delta^d_c A^{afh}_{bf}\right)=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}c^h$. (9)

Альтернируя по индексам *c* и *h* равенство (9:1) получим

$$\frac{1}{4(n-1)}\left(\delta^d_c A^{af}_{bfh}+\delta^d_h A^{af}_{bfc}-\delta^a_c A^{df}_{bfh}-\delta^a_h A^{df}_{bfc}\right)=\delta^a_b\delta^d_c c_h+\delta^a_c\delta^d_b c_c-\delta^a_b\delta^d_h c_c-\delta^a_h\delta^d_b c_c.$$

Свернем полученное равенство по парам индексов (*a*,*b*) и (*c*,*d*), получим:

$$c_h=-\frac{1}{2\left(n^2-1\right)}A^{ag}_{agh}. \tag{10}$$

Аналогично, из равенства (9:2) имеем:

$$c^h=-\frac{1}{2\left(n^2-1\right)}A^{agh}_{ag}. \tag{11}$$

Свернем равенство (9:1) по парам индексов (*a*,*b*) и (*c*,*d*). Тогда после преобразований получим:

$$c_h=\frac{n-3}{\left(n^2-1\right)n}A^{ag}_{agh}. \tag{12}$$

Аналогично, из равенства (9:2) получим:

$$c^h=\frac{n-3}{\left(n^2-1\right)n}A^{agh}_{ag}. \tag{13}$$

Сравнивая (10) и (11) получим:

$\left(2\left(n^2-1\right)+\frac{n\left(n^2-1\right)}{n-3}\right)c^h=0$, т. е. $\frac{3\left(n^2-1\right)(n-2)}{n-3}c^h=0$.

Отсюда, в частности, $c^h=c_h=0$.

И, таким образом, получена следующая

Теорема 7. Точечное постоянство голоморфной конгармонической кривизны связного *NK*-многообразия размерности свыше четырех равносильно ее глобальному постоянству.

29.10.2010

Список литературы:
1. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – М., МПГУ, 2003. – 495 с.
2. Kobayashi S. On compact Kahler manifolds with positive Ricci tensor. Ann. Math. 74 (1961), 570-574.
3. Liberman P. Sur les connexions hermitiennes. C. r. Acad. Sci. Paris 239, № 23 (1954), 1579-1581.
4. Gray A. Classification des varietes approximativement kahleriennes de courbure sectionelle holomorphe constante. C. r. Acad. Sci. Paris 279, № 22 (1974), 797-800.
5. Gray A. Nearly Kahler manifolds. J. Diff. Geom. 4, №3 (1970), 283-309.
6. Hawley N.S. Constant holomorphic curvature. Canad. J. Math. 1953, v.5, №1, 53-56.
7. Igusa J. On the structure of a certain class of Kahler varietes. Amer. J. Math. 1954, v.7, № 3, 669-678.
8. Ishii Y. On conharmonic transformations. Tensor, 7(2), 1957, 73-80.
9. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds, Tohoku Math. J. 28, №4 (1976), 601-612.
10. Кириченко В.Ф. К-пространства постоянной голоморфной секционной кривизны. Математические заметки, 19, №5 (1976), 805-814.
11. Kirichenko V.F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry, II. Geometriae Dedicata, 52, 1994, 53-85.
12. Gray A. Nearly Kahler manifolds. J. Diff. Geom. 12, 1965, 273-277.
13. Gray A., Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature. Cac. Pestov. Math., v.104, №2, 1979, 170-179.
14. Naveira A.M., Hervella L.M. Shur's theorem for nearly Kahler manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., v.49, №2, 1975, 421-425.
15. Sato I. On special K-space on constant holomorphic sectional curvature. Tensor, v.24, 1972, 355-362.
16. Sawaki S., Watanabe Y., Sato. Notes on K-spaces of constant holomorphic sectional curvature. Kodai Math. Semin. Repts, v. 26, № 4, 1975, 438-445.
17. Watanabe Y., Takamatsu K. On a K-space of constant holomorphic sectional curvature. Kodai Math. Semin. Repts, v. 25, № 3, 1973, 297-306.
18. Кириченко В.Ф. К-алгебры и К-пространства постоянного типа с индефинитной метрикой. Математические заметки, т. 29, №2, 1981, 265-278.
19. Кириченко В.Ф. Некоторые типы К-пространств. Успехи математических наук, т. 30, № 3, 1975, 163-164.

Сведения об авторе: **Шихаб Али Абдул-маджид,** аспирант кафедры геометрии
Московского педагогического государственного университета
119571, Москва, пр. Вернадского, 88, корп.1, ком 803, e-mail: ali.abd82@yahoo.com

UDC 51
Shikhab Ali Abdul-Majid
Moscow state pedagogical university, ali.abd82@yahoo.com

APPROXIMATELY KAHLER MANIFOLD OF CONSTANT HOLOMORPHIC CONHARMONIC CURVATURE

The author considered approximately Kahler manifold of dotted-constant conharmonic holomorphic curvature. It is proved that NK-manifold is the variety of dotted constant holomorphic conharmonic curvature c if and only if on the space bound of G-structure. The author also shows that the dotted constancy of holomorphic conharmonic curvature of coherent NK-manifold of dimensions is over four amounts to its global consistency.

Key words: approximately Kahler manifold; conharmonic curvature tensor; space of bound G-structure; conharmonic holomorphic curvature tensor.

Bibliography:
1. Kirichenko V.F. Differential-geometrical structures on manifold. - M., MSPU, 2003. - 495 p.
2. Kobayashi S. On compact Kahler manifolds with positive Ricci tensor. Ann. Math. 74 (1961), 570-574.
3. 3.Liberman P. Sur les connexions hermitiennes. C. r. Acad. Sci. Paris 239, № 23 (1954), 1579-1581.
4. Gray A. Classification des varietes approximativement kahleriennes de courbure sectionelle holomorphe constante. C. r. Acad. Sci. Paris 279, № 22 (1974), 797-800.
5. Gray A. Nearly Kahler manifolds. J. Diff. Geom. 4, №3 (1970), 283-309.
6. Hawley N.S. Constant holomorphic curvature. Canad. J. Math. 1953, v.5, №1, 53-56.
7. Igusa J. On the structure of a certain class of Kahler varietes. Amer. J. Math. 1954, v.7, № 3, 669-678.
8. Ishii Y. On conharmonic transformations. Tensor, 7(2), 1957, 73-80.
9. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds, Tohoku Math. J. 28, №4 (1976), 601-612.
10. Kirichenko V.F.K-space of constant holomorphic sectional curvature., Mathematical Notes 19, № 5 (1976), 805-814
11. Kirichenko V.F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry, II. Geometriae Dedicata, 52, 1994, 53-85.
12. Gray A. Nearly Kahler manifolds. J. Diff. Geom. 12, 1965, 273-277.
13. Gray A., Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature. Cac. Pestov. Math., v.104, №2, 1979, 170-179.
14. Naveira A.M., Hervella L.M. Shur's theorem for nearly Kahler manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., v.49, №2, 1975, 421-425.
15. Sato I. On special K-space on constant holomorphic sectional curvature. Tensor, v.24, 1972, 355-362.
16. Sawaki S., Watanabe Y., Sato. Notes on K-spaces of constant holomorphic sectional curvature. Kodai Math. Semin. Repts, v. 26, № 4, 1975, 438-445.
17. Watanabe Y., Takamatsu K. On a K-space of constant holomorphic sectional curvature. Kodai Math. Semin. Repts, v. 25, № 3, 1973, 297-306.
18. Kirichenko V.F K-algebra and K-spaces of constant type with indefinite metric. Mathematical Notes, V. 29, № 2, 1981, 265-278.
19. Kirichenko V.F. Some types of K-spaces. Advances of Mathematical Sciences, v. 30, № 3, 1975, 163-164.