УДК 330.322;368.1

Буреш А.И., Реннер А.Г., Яркова О.Н.
Оренбургский государственный университет
E-mail: mme@mail.osu.ru; yarkovaon@yandex.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРАТЕГИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ РИСКОВЫХ АКТИВОВ

В работе предложен и реализован метод формирования оптимального инвестиционного портфеля из рисковых и безрискового акивов, основанный на максимизации вероятности неразорения страховой компании. На примере договоров ОСАГО и КАСКО показано, что применение предложенного подхода к формированию стратегии инвестирования обеспечивает более высокие значения вероятности неразорения, чем портфель Тобина.

Ключевые слова: вероятность неразорения страховой компании, оптимальная стратегия инвестирования.

Страхование, как один из способов снижения риска потерь субъектов экономики, должно гарантироваться достаточным уровнем платежеспособности страховой компании, под которой будем понимать положительность процесса риска. Одним из инструментов обеспечения платежеспособности является собственный капитал, увеличение которого возможно за счет инвестирования. Поставим задачу определения оптимальных параметров инвестирования при вложении страховщиком капитала в несколько различных рисковых активов.

В работе [2 с. 426] показано, что при инвестировании свободных средств страховой компании в рисковый и безрисковый актив капитал страховщика, характеризующий процесс риска, удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dY_t = ((r\beta + \alpha\mu)dt + \alpha\sigma dW_t)Y_t + cdt - d\left(\sum_{i=0}^{N(t)} V_i\right) \qquad (1)$$

$$Y_0 = u, \quad 0 \le \alpha + \beta \le 1,$$

где Y_t – капитал страховой компании в момент времени t;

u – начальный капитал компании;

c – интенсивность поступления страховых премий;

$N(t)$ – число поступивших исков за время $[0,t]$, которое является пуассоновским случайным процессом с параметром λt;

$\{V_i\}$ – размеры выплат по искам страховой компании- последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с неизвестной плотностью распределения вероятностей $f(V)$,

β – доля инвестирования в безрисковый актив с доходностью $r \ge 0$,

α – доля вложения свободного капитала в рисковый актив цены которого удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению Блека-Шоулза,

μ и σ – доходность и волатильность цен рискового актива,

W_t – винеровский процесс.

В качестве меры платежеспособности возьмем вероятность неразорения $\varphi(u) = P\{Y_t \ge 0, Y_0 = u, t \ge 0\}$, значение которой, в предположении о пуассоновском процессе поступления исков с учетом инвестирования в рисковый и безрисковый актив, может быть найдено, как показано в работе[2 с. 427], как решение задачи:

$$\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2u^2\varphi''(u) + (c + (\beta r + \alpha\mu)u)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) +$$

$$+\lambda\int_0^u \varphi(u-y)f(y)dy = 0,$$

$$\varphi(\infty) = 1, \quad \mu > \sigma^2/2 \qquad (2)$$

Задача (2) может быть решена численно при фиксированных значениях параметров процесса риска и активов ($\lambda, c, \mu, \sigma, r, \alpha, \beta$), предварительно аппроксимировав $f(x)$ с помощью отрезка обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных полиномов Чебышева [2 с. 10].

По аналогии с моделью (2) поставим задачу для вычисления вероятности неразорения страховой компании при условии инвестирования свободных средств страховщика в безрисковый и n независимых рисковых активов:

$$\begin{cases} \lambda\varphi(u) = \frac{1}{2}\varphi''(u)\cdot\left(\alpha_1^2\sigma_1^2 + \ldots + \alpha_n^2\sigma_n^2\right)\cdot u^2 + \\ \qquad \varphi'(u)((\alpha^T\mu + r\beta)\cdot u + c) + \lambda\int_0^u \varphi(u-y)f(y)dy. \\ \varphi(\infty) = 1, \ \|\mu\| > \frac{1}{2}\|\sigma\|^2 \end{cases} \qquad (3)$$

где $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)^T$ – доли рисковых активов в портфеле,

$\mu = (\mu_1, \mu_2,...,\mu_n)^T$ – вектор доходностей рисковых активов, μ_i – доходность i-го рискового актива, i=1,..n;

σ_i – волатильность i-го рискового актива;

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2,...,\sigma_n)^T$ – вектор волатильностей цен рисковых активов;

$\|\bullet\|$ – норма вектора.

Тогда задача формирования оптимального инвестиционного портфеля имеет вид:

$$\varphi(\alpha_1,...,\alpha_n,\beta/\mu,\sigma,r,u,c,\lambda) \rightarrow max, \quad (4)$$

$$D: \begin{cases} 0 \le \beta + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le 1, \\ \alpha_i \in [0,1],\ i = 1..n, \\ \beta \in [0,1] \end{cases} \quad (5)$$

Для получения оптимального решения воспользуемся методом проекции градиента. Для этого обозначим:

$$f(\bar{x}) = -\varphi(\alpha_1,...,\alpha_n,\beta/\mu,\sigma,r,\lambda,c,u), \quad (7)$$

где x – вектор параметров $(\alpha_1,...,\alpha_n,\beta)$.

Алгоритм:

1. Задаем фиксированные величины μ,σ,r,λ,c,u; $x^0 = (\alpha_1^0,...,\alpha_n^0,\beta^0)$ – начальное приближение, ε – точность, δ_0 – начальный шаг спуска, $i = 0$ – номер итерации;

2. решаем задачу (3) с параметрами $x^i = (\alpha_1^i,...,\alpha_n^i,\beta^i)$, μ,σ,r,λ,c. Получаем вектор вероятности неразорения в зависимости от начального капитала. Затем для заданного начального капитала находим соответствующую ему вероятность неразорения, получаем: $f(x^i) = -\varphi(\alpha_1^i,...,\alpha_n^i,\beta^i/\mu,\sigma,r,\lambda,c,u)$

3. Методом градиентного спуска находим. $x^{i+1} = x^i - \delta_i gradf(x^i)$, Выбор шага δ_i производится любым методом (например наискорейшего спуска или расходящегося ряда).

4. Находим проекцию точки $x^i = (\alpha_1^i,...,\alpha_n^i,\beta^i)$ на множество допустимых решений D: $x^{i+1} = P_D(\bar{x}^i)$.

5. если $\|x_1^{i+1} - x^i\| \ge \varepsilon$, то $i = i+1$, переход к пункту 2;

иначе пункт 6

6. Конец алгоритма. Оптимальное значение $x^* = x^{i+1}$, решением является: $\alpha_j^{opt} = \alpha_j^*,\ j = 1..n,\ \beta^{opt} = \beta^*,\ \varphi_{max} = -f(\alpha_1^{opt},...,\alpha_n^{opt},\beta^{opt}/\mu,\sigma,r,\lambda,c,u)$.

Определим оптимальную стратегию инвестирования в несколько рисковых активов для договоров ОСАГО, КАСКО и портфеля «ОСАГО-КАСКО» страховой компании ООО «Страховая группа «АСКО», предварительно аппроксимировав плотности распределения размеров исков с помощью отрезков обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных полиномов Чебышева.

В результате проведенного фундаментального стоимостного анализа для инвестирования были отобраны акции компаний: ОАО «Газпром», «ЛУКОЙЛ», «НК «Роснефть», Сургутнефтегаз, Сбербанк России, Банк ВТБ и паи ведущих паевых инвестиционных фондов. Анализ доходностей отобранных активов (за период с 2009 по 2011 гг.) показал, что их можно считать независимыми, следовательно возможно применение модели (3). Прогнозные значения доходностей и волатильностей цен рисковых активов и среднее значение доходности безрисковых активов, представлены в таблице 1.

Оптимальные значения долей активов в инвестиционном портфеле, полученные в соответствии с представленным алгоритмом для договоров ОСАГО, КАСКО и портфеля ОСАГО-КАСКО представлены в таблицах 2-4 соответственно.

Анализ оптимального инвестиционного портфеля для договоров ОСАГО показал, что более 50 % в портфеле составляют паи инвестиционных фондов, и более 18% - безрисковые активы. Такая структура объясняется невысокими доходностями и достаточно высокой волатильностью акций выбранных акционерных обществ.

Таблица 1. Прогнозные значения доходностей и волатильностей цен активов

Актив	Доходность	Волатильность цен
акции Газпром	0,083	0,092
акции ЛУКОЙЛ	0,092	0,118
акции Роснефть	0,113	0,129
акции Сургутнефтегаз	0,081	0,098
акции Сбербанк	0,113	0,12
акции ВТБ	0,096	0,109
паи ПИФ	0,264	0,148
безрисковый актив	0,075	0

Как видно из таблицы 3, для договоров КАСКО почти 50 % активов в оптимальном инвестиционном портфеле – безрисковые, это объясняется тем, что договора КАСКО содержат в себе достаточно большой риск, поэтому крупные вложения в рисковые активы будут неоправданны. Наибольшей долей среди рисковых активов снова обладают паи инвестиционных фондов, что является результатом достаточно большой доходности ПИФов по сравнению с акциями.

Таблица 2. Оптимальный инвестиционный портфель для договоров ОСАГО при $\lambda_O = 9{,}968$ исков/день, $c_O = 50$ тыс. руб./день, u=375 млн. руб.

Актив	Доля актива	Вероятность неразорения
акции Газпром	0,089	0,936
акции ЛУКОЙЛ	0,011	
акции Роснефть	0,098	
акции Сургутнефтегаз	0,056	
акции Сбербанк	0,031	
акции ВТБ	0,012	
паи ПИФ	0,521	
безрисковый актив	0,182	

Таблица 3. Оптимальный инвестиционный портфель для договоров КАСКО, при $\lambda_R = 3{,}369$ исков/день, $c_R = 20$ тыс. руб./день., u=375 млн. руб.

Актив	Доля актива	Вероятность неразорения
акции Газпром	0,069	0,903
акции ЛУКОЙЛ	0,013	
акции Роснефть	0,095	
акции Сургутнефтегаз	0,042	
акции Сбербанк	0,023	
акции ВТБ	0,011	
паи ПИФ	0,251	
безрисковый актив	0,496	

Таблица 4. Оптимальный инвестиционный портфель для совокупности договоров «ОСАГО-КАСКО», при $\lambda_{O-R} = 13{,}337$ исков/день., $c_{O-K} = 70$ тыс. руб./день, u=375 млн. руб.

Актив	Доля	Вероятность неразорения
акции Газпром	0,119	0,917
акции ЛУКОЙЛ	0,011	
акции Роснефть	0,086	
акции Сургутнефтегаз	0,061	
акции Сбербанк	0,034	
акции ВТБ	0,019	
паи ПИФ	0,425	
безрисковый актив	0,245	

Большая часть активов в оптимальном инвестиционном портфеле для совокупности договоров «ОСАГО-КАСКО» составляют паи инвестиционных фондов. На долю безрисковых активов приходится почти четверть вложений. Это объясняется тем, что в портфеле договоров риск усредняется, следовательно, структура портфеля сдвигается в сторону увеличения безрисковых активов.

Вероятность неразорения для всех видов договоров по сравнению с ситуацией инвестирования в один рисковый актив увеличивается. Это можно объяснить диверсификацией рисковых активов, что позволяет снизить риск, тем самым увеличить вероятность неразорения.

Представим полученные структуры оптимальных инвестиционных портфелей для каждого вида страхования и портфеля договоров графически (рисунок 1).

Из рисунка 1 видно, что для договоров ОСАГО и КАСКО среди акций акционерных обществ наибольшую долю имеют акции ОАО «НК Роснефть», для портфеля договоров «ОСАГО-КАСКО» это акции ОАО «Газпром». Наименьшую привлекательность для вложений по договорам ОСАГО и портфеля договоров «ОСАГО-КАСКО» имеют акции ОАО «ЛУКОЙЛ», для договоров КАСКО таковыми являются акции ОАО «Банк ВТБ».

Для сравнения вычислим оптимальные стратегии инвестирования в несколько рисковых активов, на основе теории портфельного инвестирования. Оптимальный инвестиционный портфель Тобина построим используя формулу:

$$\alpha = \tau \cdot \alpha^*, \tau \in [0{,}1]. \qquad (7)$$

где α^* ищется в соответствии с процедурой, описанной в работе [3];

τ – некоторое число из отрезка $[0{,}1]$.

В качестве доходности активов возьмем прогнозные значения из таблицы 1. Используя выражение (7), получили следующую структуру оптимального инвестиционного портфеля (таблица 5).

Вероятность неразорения при полученных оптимальных долях представлена в таблице 6.

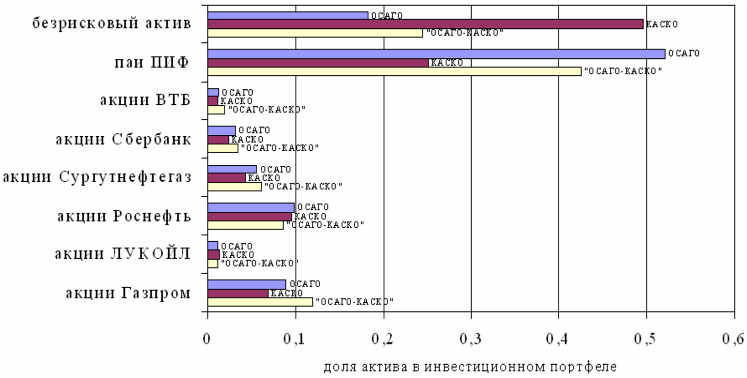

Рисунок 1. Структуры оптимальных инвестиционных портфелей для договоров ОСАГО, КАСКО и портфеля договоров «ОСАГО-КАСКО»

Как видно из таблиц 5, 6 при полученной оптимальной структуре инвестиционного портфеля наивысшая вероятность неразорения достигается для договоров ОСАГО, наименьшая – для договоров КАСКО. Можно сделать вывод о том, что полученный инвестиционный портфель возможно использовать для договоров ОСАГО и совокупности договоров «ОСАГО-КАСКО», но не для договоров КАСКО, так как при таком инвестировании повышается риск понести убытки.

Структура полученного оптимального инвестиционного портфеля аналогична структуре, которая была получена ранее (таблицы 2 – 4): большей долей в портфеле обладают паи инвестиционных фондов, вторые по величине безрисковые активы, и оставшиеся средства распределяются между акциями компаний.

Варьируя параметр τ от 0,2 до 0,8 с шагом 0,2, в пакете «MathCAD» получили оптимальные портфели Тобина для различных значений τ. Представим результаты в таблице 7.

По результатам, представленным в таблице 7, видно, что с уменьшением τ в оптимальном портфеле уменьшается доля рисковых активов, а доля безрисковых возрастает.

Проследим, как вариация параметра τ повлияла на вероятность неразорения. Представим зависимость графически (рисунок 2).

Из рисунка 2 видно, что при увеличении параметра τ вероятность неразорения увеличивается, то есть, мы наблюдаем прямую зависимость. Таким образом, можно сделать вывод, что для страховой компании наиболее эффективным является инвестиционный портфель, полученный при значении $\tau = 1$.

Сравнивая два способа определения оптимального инвестиционного портфеля, наиболее

Таблица 5. Структура оптимального инвестиционного портфеля Тобина, при $\tau = 1$

Актив	Доля актива в портфеле
акции Газпром	0,124
акции ЛУКОЙЛ	0,016
акции Роснефть	0,154
акции Сургутнефтегаз	0,043
акции Сбербанк	0,029
акции ВТБ	0,014
паи ПИФ	0,502
безрисковый актив	0,118

Таблица 6. Вероятность неразорения для оптимального инвестиционного портфеля Тобина

Вид страхового договора	Вероятность неразорения
договора ОСАГО	0,924
договора КАСКО	0,745
портфель договоров «ОСАГО-КАСКО»	0,913

Таблица 7. Оптимальная структура портфеля Тобина при различных значениях параметра τ

Актив	Оптимальные доли активов в портфеле				
	$\tau = 0{,}2$	$\tau = 0{,}4$	$\tau = 0{,}6$	$\tau = 0{,}8$	$\tau = 1$
акции Газпром	0,025	0,05	0,075	0,099	0,124
акции ЛУКОЙЛ	0,003	0,006	0,009	0,013	0,016
акции Роснефть	0,031	0,062	0,093	0,123	0,154
акции Сургутнефтегаз	0,008	0,017	0,026	0,034	0,043
акции Сбербанк	0,006	0,012	0,017	0,023	0,029
акции ВТБ	0,003	0,005	0,008	0,012	0,014
паи ПИФ	0,1	0,201	0,301	0,401	0,502
безрисковый актив	0,824	0,647	0,471	0,295	0,118

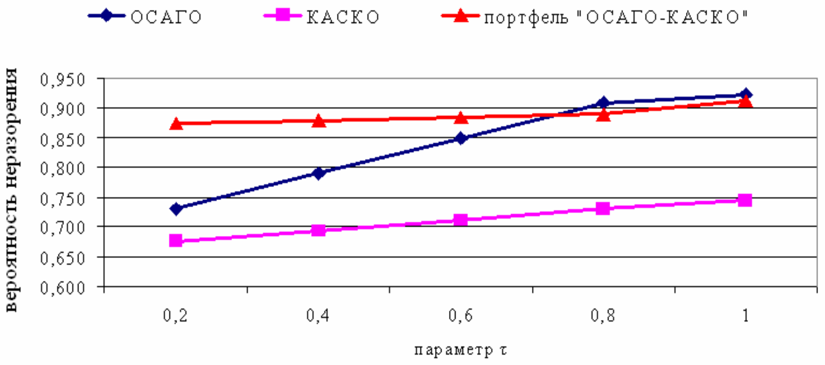

Рисунок 2. Зависимость вероятности неразорения от параметра τ

эффективным для страховой компании является первый способ, основанный на оптимизации вероятности неразорения, так как он учитывает особенности деятельности страховщика.

Отметим, что подход, основанный на теории портфельного инвестирования, может служить альтернативой предложенному, если нам неизвестен не только закон распределения размера поступающих исков, но и закон распределения числа поступающих исков, что в практической деятельности страховой компании вполне возможно.

15.09.2011

Список литературы:

1. Реннер А.Г., Яркова О.Н. Автоматизированный программный комплекс «Анализ платежеспособности страховой компании» // Прикладная информатика, М. - 2009. -№5(23), с. 9-15
2. Paulsen, J., Ruin models with investment income/ Paulsen, J.//Probability Surveys Vol.5, -2008, 416-434c.
3. Никонов, О.И., Тимофеева, Г.А. Методы теории гарантированного управления в задаче динамической реструктуризации инвестиционного портфеля//Труды института математики и механики УрО РАН. -2000. –Т.6. -№2. -С. 460 – 476

Сведения об авторах:

Буреш Антон Игоревич, старший преподаватель кафедры математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета

Реннер Александр Георгиевич, заведующий кафедрой математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук
e-mail: mme@mail.osu.ru

Яркова Ольга Николаевна, доцент кафедры математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета, кандидат экономических наук
e-mail: yarkovaon@yandex.ru

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 6106, тел. (3532) 372444, e-mail: stat@mail.osu.ru