УДК 514.76

Рустанов А.Р.[1], Щипкова Н.Н.[2]
[1]Московский педагогический государственный университет, кафедра теории и истории социологии, e-mail: aligadzhi@yandex.ru
[2]Оренбургский государственный университет, e-mail: ningeom@pochtamt.ru

ТОЖДЕСТВА КРИВИЗНЫ МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА C_{11}

В статье рассматриваются *АС*-многообразия класса *C_{11}*, обобщающие класс косимплектических многообразий. Получены тождества кривизны данного класса многообразий. И, как следствие, получено выражение тензора Ф-голоморфной секционной кривизны через тензор Римана – Кристоффеля.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, косимплектическое многообразие, тензор кривизны, тензор *Ф*-голоморфной секционной кривизны.

Данная работа является продолжением работы [1]. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в монографии [2]. Напомним [1], что компоненты тензора Римана – Кристоффеля на пространстве присоединенной *G*-структуры имеют вид:

$$1)\ R^{a}_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc};\quad 2)\ R^{\hat{a}}_{\hat{b}c\hat{d}} = -A^{bd}_{ac}, \qquad (1)$$

а остальные компоненты нулевые, где $\{A^{ac}_{bd}\}$ – семейство функций на пространстве присоединенной *G*-структуры, симметричных по верхним и нижним индексам. Они образуют чистый тензор на M^{2n+1}, называемый тензором Ф-голоморфной секционной кривизны ([1], [2]). Тензор $A: L\times L\times L \to L$ задается соотношением $A(X,Y,Z)= A^{ad}_{bc}X^{b}Y^{c}Z_{d}\varepsilon_{a} + A^{bc}_{ad}X_{b}Y_{c}Z^{d}\varepsilon_{\hat{a}}$. Непосредственным подсчетом легко проверить, что тензор Ф-голоморфной секционной кривизны обладает свойствами:

$$A(\Phi X, Y, Z) = A(X, \Phi Y, Z) = -A(X, Y, \Phi Z). \qquad (2)$$

В самом деле, $A(\Phi X, Y, Z) =$

$$= A^{ad}_{bc}(\Phi X)^{b}Y^{c}Z_{d}\varepsilon_{a} + A^{bc}_{ad}(\Phi X)_{b}Y_{c}Z^{d}\varepsilon_{\hat{a}} =$$
$$= \sqrt{-1}A^{ad}_{bc}X^{b}Y^{c}Z_{d}\varepsilon_{a} - \sqrt{-1}A^{bc}_{ad}X_{b}Y_{c}Z^{d}\varepsilon_{\hat{a}} =$$
$$= A^{ad}_{bc}X^{b}(\Phi Y)^{c}Z_{d}\varepsilon_{a} + A^{bc}_{ad}X_{b}(\Phi Y)_{c}Z^{d}\varepsilon_{\hat{a}} =$$
$$= A(X, \Phi Y, Z).$$

Аналогично $A(\Phi X, Y, Z) =$

$$= A^{ad}_{bc}(\Phi X)^{b}Y^{c}Z_{d}\varepsilon_{a} + A^{bc}_{ad}(\Phi X)_{b}Y_{c}Z^{d}\varepsilon_{\hat{a}} =$$
$$= \sqrt{-1}A^{ad}_{bc}X^{b}Y^{c}Z_{d}\varepsilon_{a} - \sqrt{-1}A^{bc}_{ad}X_{b}Y_{c}Z^{d}\varepsilon_{\hat{a}} =$$
$$= -A^{ad}_{bc}X^{b}Y^{c}(\Phi Z)_{d}\varepsilon_{a} - A^{bc}_{ad}X_{b}Y_{c}(\Phi Z)^{d}\varepsilon_{\hat{a}} =$$
$$= -A(X, Y, \Phi Z).$$

Пусть *M* – *АС*-многообразие класса C_{11} постоянной кривизны *k*. Тогда его тензор Римана – Кристоффеля имеет строение [2]:

$$R(X,Y)Z = k(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y);\ X, Y, Z \in X(M). \qquad (3)$$

Равенство (3) на пространстве расслоения реперов можно записать в виде:

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}). \qquad (4)$$

На пространстве присоединенной *G*-структуры соотношения (4) равносильны следующим соотношениям:

$$1)\ R_{0a0\hat{b}} = k\delta^{b}_{a};\ 2)\ R_{ab\hat{c}\hat{d}} = k(\delta^{c}_{a}\delta^{d}_{b} - \delta^{d}_{a}\delta^{c}_{b});$$
$$3)\ R_{a\hat{b}c\hat{d}} = -k\delta^{d}_{a}\delta^{b}_{c}. \qquad (5)$$

С учетом (1) соотношения (5) перепишем в виде:

$$1)\ 0 = k\delta^{b}_{a};\ 2)\ 0 = k(\delta^{c}_{a}\delta^{d}_{b} - \delta^{d}_{a}\delta^{c}_{b});\ 3)\ A^{bd}_{ac} = k\delta^{d}_{a}\delta^{b}_{c}. \qquad (6)$$

Первое фундаментальное тождество [1], т. е. тождество $A^{a[c}_{bh}B^{|h|d]} = 0$, с учетом (6:3) запишем в виде $k\delta^{c}_{b}\delta^{a}_{h}B^{hd} - k\delta^{d}_{b}\delta^{a}_{h}B^{hc} = 0$, т. е. $k\delta^{c}_{b}B^{ad} - k\delta^{d}_{b}B^{ac} = 0$. Полученное равенство свернем по индексам *a* и *b*, тогда $kB^{cd} - kB^{dc} = 0$, т. е. $2kB^{cd} = 0$. Из последнего равенства следует, что либо *k*=0, либо $B^{ab} = 0$. В первом случае многообразие является плоским, а во втором – косимплектическим многообразием. Свертывая соотношение (6:1) по индексам *a* и *b*, получим *nk*=0. Поскольку *n*і1, то *k*=0, т. е. многообразие является многообразием нулевой кривизны.

Таким образом, получили следующую теорему.

Теорема 1. Не существуют *АС*-многообразий класса C_{11} ненулевой постоянной кривизны *k*.

Поскольку косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [3], то келерова составляющая косимплектического многообразия является пространством постоянной кривизны *k*=0. Следовательно, *M* локально эквивалентно произведению комплексного евклидова пространства на вещественную прямую, снабженную канонической косимплектической структурой.

Подытожив сказанное выше, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть *M* – *AC*-многообразие класса C_{11} постоянной кривизны *k*. Тогда оно локально эквивалентно произведению комплексного евклидова пространства на вещественную прямую, снабженную канонической косимплектической структурой.

Применим процедуру восстановления тождества [2], [4] к равенствам (1).

1. Поскольку $R^0_{00a} = R^b_{00a} = R^{\hat b}_{00a} = 0$, т. е. $R^i_{00a} = 0$, то $R(\xi, \varepsilon_a)\xi = 0$. Проектором на подпространство $D^{\sqrt{-1}}_\Phi$ является эндоморфизм $\pi = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, то $R\left(\xi, \Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X\right)\xi = 0$. Выделяя действительную и мнимую части данного равенства, получим эквивалентные тождества. Поэтому выпишем действительную часть тождества, т. е.

$$R\left(\xi, \Phi^2 X\right)\xi = 0;\ X \in X(M). \tag{7}$$

Поскольку $\Phi^2 = -\mathrm{id} + \eta \otimes \xi$ и $R(\xi, \xi)\xi = 0$, тождество (7) примет вид:

$$R(\xi, X)\xi = 0;\ X \in X(M). \tag{8}$$

2. Поскольку $R^0_{0ab} = R^c_{0ab} = R^{\hat c}_{0ab} = 0$, т. е. $R^i_{0ab} = 0$, то $R(\varepsilon_a, \varepsilon_b)\xi = 0$. Проектором на подпространство $D^{\sqrt{-1}}_\Phi$ является эндоморфизм $\pi = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, то

$$R\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, \Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right)\xi = 0;\ X, Y \in X(M).$$

Выделяя действительную часть, получим:

$$R\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\xi - R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;\ X, Y \in X(M). \tag{9}$$

Поскольку $\Phi^2 = -\mathrm{id} + \eta \otimes \xi$, то используя тождество (8), тождество (9) перепишем в виде:

$$R(X, Y)\xi - R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;\ X, Y \in X(M). \tag{10}$$

3. Применяя аналогичные рассуждения к равенствам $R^0_{0a\hat b} = R^c_{0a\hat b} = R^{\hat c}_{0a\hat b} = 0$, т. е. к равенству $R^i_{0ab} = 0$, получим:

$$R\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\xi + R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;\ X, Y \in X(M). \tag{11}$$

Которое мы можем записать в виде:

$$R(X, Y)\xi + R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;\ X, Y \in X(M). \tag{12}$$

Из (10) и (12) получим

$$R(X, Y)\xi = R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0;\ X, Y \in X(M). \tag{13}$$

4. Аналогично расписывая равенства $R^0_{a0b} = R^c_{a0b} = R^{\hat c}_{a0b} = 0$, получим:

$$R\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;\ X, Y \in X(M), \tag{14}$$

т. е.

$$R(\xi, X)Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;\ X, Y \in X(M). \tag{15}$$

5. Рассматривая равенства $R^0_{a0\hat b} = R^c_{a0\hat b} = R^{\hat c}_{a0\hat b} = 0$, получим:

$$R\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;\ X, Y \in X(M), \tag{16}$$

т. е.

$$R(\xi, X)Y + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;\ X, Y \in X(M). \tag{17}$$

Из (15) и (17) получим

$$R(\xi, X)Y = R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0;\ X, Y \in X(M). \tag{18}$$

6. Теперь рассмотрим равенства $R^0_{abc} = R^d_{abc} = R^{\hat d}_{abc} = 0$. Применяя к ним процедуру восстановления, получим:

$$\begin{aligned} &R\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z = \\ &= R\left(\Phi^2 X, \Phi Y\right)\Phi Z + R\left(\Phi X, \Phi^2 Y\right)\Phi Z + \\ &+ R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z;\ X, Y, Z \in X(M). \end{aligned} \tag{19}$$

Используя (8), (13), (18), тождество (19) запишем в виде:

$$\begin{aligned} &R(X, Y)Z = R(X, \Phi Y)\Phi Z + R(\Phi X, Y)\Phi Z + \\ &+ R(\Phi X, \Phi Y)Z;\ X, Y, Z \in X(M). \end{aligned} \tag{20}$$

7. Подробно рассмотрим равенства $R^0_{ab\hat c} = A^{0c}_{ab}$, $R^d_{ab\hat c} = A^{dc}_{ab}$, $R^{\hat d}_{ab\hat c} = A^{\hat d c}_{ab}$, т. е. $R^i_{ab\hat c} = A^{ic}_{ab}$, т. е. $R(\varepsilon_b, \varepsilon_{\hat c})\varepsilon_a = A(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_{\hat c})$. Так как $\{\varepsilon_a\}, \{\varepsilon_{\hat a}\}$ являются базисами подпространств $D^{\sqrt{-1}}_\Phi, D^{-\sqrt{-1}}_\Phi$, а проекторами на эти подпространства являются эндоморфизмы $\pi = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, $\bar\pi = \frac{1}{2}\left(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$ соответственно, то

$$\begin{aligned} &R\left(\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, -\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right)* \\ &*\left(\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z\right) = \\ &= A\left(\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z, \Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, -\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right); \\ &X, Y, Z \in X(M). \end{aligned}$$

Выделяя действительную часть, получим:

$$\begin{aligned} &R\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z + R\left(\Phi^2 X, \Phi Y\right)\Phi Z - \\ &- R\left(\Phi X, \Phi^2 Y\right)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = \\ &= A\left(\Phi^2 Z, \Phi^2 X, \Phi^2 Y\right) + A\left(\Phi^2 Z, \Phi X, \Phi Y\right) + \\ &+ A\left(\Phi Z, \Phi^2 X, \Phi Y\right) - A\left(\Phi Z, \Phi X, \Phi^2 Y\right); \\ &\forall X, Y, Z \in X(M). \end{aligned} \tag{21}$$

Используя (2), (8), (13), (18), тождество (21) запишем в виде:

$$R(X,Y)Z + R(X,\Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X,Y)\Phi Z + \\ + R(\Phi X,\Phi Y)Z = 4A(Z,X,Y); \forall X,Y,Z \in X(M). \quad (22)$$

Из (20) и (22) получим:

$$R(X,Y)Z - R(\Phi X,Y)\Phi Z = \\ = 2A(Z,X,Y); \forall X,Y,Z \in X(M). \quad (23)$$

Из последнего тождества получим, что тензор голоморфной секционной кривизны *АС*-многообразий класса C_{11} имеет вид:

$$A(X,Y,Z) = \frac{1}{2}\{R(Y,Z)X + R(Y,\Phi Z)\Phi X\}; \\ \forall X,Y,Z \in X(M) \quad (24)$$

8. Наконец, рассматривая равенства $R^0_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = 0$, $R^d_{a\hat{b}\hat{c}} = 0$, $R^{\hat{d}}_{ab\hat{c}} = 0$, т. е. $R^{\hat{i}}_{a\hat{b}\hat{c}} = 0$, т. е. $R(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_{\hat{c}})\varepsilon_a = 0$. Так как $\{\varepsilon_a\}, \{\varepsilon_{\hat{a}}\}$ являются базисами подпространств $D_\Phi^{\sqrt{-1}}, D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$, а проекторами на эти подпространства являются эндоморфизмы $\pi = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, $\bar{\pi} = \frac{1}{2}\left(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$ соответственно, то $R\left(-\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X, -\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y\right) * \left(\Phi^2 Z + \sqrt{-1}\Phi Z\right) = 0$; $X,Y,Z \in X(M)$. Выделяя действительную часть, получим:

$$R(\Phi^2 X,\Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X,\Phi Y)\Phi Z + \\ + R(\Phi X,\Phi^2 Y)\Phi Z + \\ - R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2 Z = 0; \forall X,Y,Z \in X(M). \quad (25)$$

Используя (8), (13), (18), тождество (25) запишем в виде:

$$R(X,Y)Z + R(X,\Phi Y)\Phi Z + \\ + R(\Phi X,Y)\Phi Z + \\ - R(\Phi X,\Phi Y)Z = 0; \forall X,Y,Z \in X(M). \quad (26)$$

Из (20) и (26) получим:

$$R(X,Y)Z - R(\Phi X,\Phi Y)Z = 0;\ X,Y,Z \in X(M). \quad (27)$$

Соберем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Тензор Римана – Кристоффеля АС-многообразий класса C_{11} удовлетворяет следующим тождествам*:

$$1)\ R(\xi,X)\xi = 0;\quad 2)\ R(Y,X)\xi = R(\Phi Y,\Phi X)\xi = 0;$$
$$3)\ R(\xi,X)Y = R(\xi,\Phi X)\Phi Y = 0;$$
$$4)\ R(X,Y)Z = R(\Phi X,\Phi Y)Z;$$
$$5)\ R(X,Y)Z - R(\Phi X,Y)\Phi Z = 2A(Z,X,Y);$$
$$6)\ R(X,\Phi Y)\Phi Z + R(\Phi X,Y)\Phi Z = 0; \forall X,Y,Z \in X(M).$$

10.04.2011

Список литературы:

1. Рустанов, А.Р. Дифференциальная геометрия почти контактных метрических многообразий класса C_{11} / А.Р. Рустанов, Н.Н.Щипкова // Вестник ОГУ. – №9. – 2010. – С. 65-68.
2. Кириченко, В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В.Ф.Кириченко. – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
3. Kiritchenko, V.F. Sur le geometrie des varietes approximativement cosymplectiques / V.F. Kiritchenko // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1982. – V.295. – Ser. I. Math. – P. 673-676.
4. Кириченко, В.Ф. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий / В.Ф. Кириченко, А.Р. Рустанов // Математический сборник. – 2002. – Т. 193. – №8. – С. 71-100.

Сведения об авторах:

Рустанов Алигаджи Рабаданович, доцент кафедры теории и истории социологии Московского педагогического государственного университета, кандидат физико-математических наук
119571, г. Москва, пр-т Вернадского, 88, корп. 1, к. 1204, e-mail: aligadzhi@yandex.ru

Щипкова Нина Николаевна, доцент кафедры геометрии и топологии Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2534, тел. (3532)372532, e-mail: ningeom@pochtamt.ru

UDC 514.76

Rustanov A.R., Shchipkova N.N.
Moscow State Pedagogical University, Orenburg State University, aligadzhi@yandex.ru

CURVATURE IDENTITIES OF CLASS C11 MANIFOLD

The article deals with the AU- manifold of class C11, which generalize the class of skew-symplectic manifolds. The identities of the curvature of this class manifold are obtained. As a consequence, the expression of the tensor F-sectional curvature tensor by the Riemann – Christoffel tensor was got.

Keywords: almost contact metric variety, cosymplectic manifold, the curvature tensor, the tensor F-sectional curvature.

References:

1. Rustanov A.R., Shchipkova N.N. Differential geometry of almost contact metric manifolds of C_{11}-class. Vestnik of OSU №9 (115), september 2010, p. 65-68.
2. Kirichenko V.F. Differential geometric structures on manifolds. – M., MPSU, 2003. – 495 p.
3. Kiritchenko V.F. Sur le gйomйtrie des variйtйs approximativement cosymplectiques // C.R. Acad. Sci. Paris. Sйr. I. Math. 1982. V.295. P. 673-676.
4. Kirichenko V.F., Rustanov A.R. Differential geometry of quasi-Sasaki manifolds.// Mathematical collection, v. 193, № 8, 71-100 p.