

## ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЧЕНИЙ НА ЗНАЧЕНИЯ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Исследуются частоты и главные формы свободных изгибных колебаний тонкостенных стержней по теории, учитывающей вторичные сдвиги и инерцию вращения сечений. Для решения используется метод граничных элементов и устанавливается влияние характеристик сечения стержней в виде относительных величин на частоты свободных колебаний. Приводится сравнение результатов расчета с имеющимися теориями.

Ключевые слова: изгиб, тонкостенный стержень, колебания.

Широкое распространение в промышленности и строительстве тонкостенные стержни и конструкции на их основе получили благодаря пониженным материалоемкости и массе без потерь жесткости. Вопросы статики и динамики тонкостенных стержней изложены достаточно полно, например, в работе [1]. Но во многих случаях при расчетах пренебрегают вторичными сдвигами и инерцией вращения сечений. Учет вторичных сдвигов, приведенный в работе [2], позволяет повысить точность расчетов и исследовать колебания тонкостенных стержней более полно.

Целью исследования являлось изучение изгибных колебаний тонкостенных прямолинейных стержней.

В соответствии с целью были поставлены задачи:

1. Получение уравнений для главных форм колебаний и выражений для определения частот собственных колебаний с использованием метода граничных элементов.

2. Определение влияния характеристик стержня на частоты свободных колебаний.

3. Оценка влияния учета вторичных сдвигов сечения на характеристики колебаний.

В качестве объекта изучения принимается прямолинейный однородный стержень постоянного сечения, имеющий открытые и замкнутые участки, с двумя осями симметрии. Для применения метода граничных элементов помимо функции прогиба  $\eta(z, t)$  и угла поворота сечения  $\beta_1(z, t)$  необходимо использовать характеристики изгибного момента и поперечной силы, возникающие в сечениях стержня, которые для выбранного объекта определяются выражениями:

$$\begin{aligned} M_1 &= EJ_1 \frac{d\beta_1}{dz}, \\ Q_2 &= \frac{G}{k_{11}} \left( \frac{d\eta}{dz} + \beta_1 \right) \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $E, G$  – модули упругости при растяжении-сжатии и сдвиге, Н/м<sup>2</sup>;

$k_{11}$  – коэффициент формы сечения [2], м<sup>-2</sup>;

$J_1$  – осевой момент инерции стержня, м<sup>4</sup>;

$z$  – продольная координата сечения, м.

Дифференциальные уравнения собственных изгибных колебаний тонкостенных стержней произвольного профиля с учетом вторичных сдвигов и инерции вращения сечений, полученные в работе [2], имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{G}{k_{11}} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial \beta_1}{\partial z} \right) &= 0, \\ \rho J_1 \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} - EJ_1 \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial z^2} + \frac{G}{k_{11}} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \beta_1 \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $\rho$  – плотность материала стержня, кг/м<sup>3</sup>;

$F$  – площадь поперечного сечения стержня, м<sup>2</sup>;

$t$  – время (время и продольная координата сечения являются аргументами рассматриваемых функций), с.

Порядок решения уравнений (2) подробно рассмотрен в [3].

Тогда главные формы колебаний для прогиба, угла поворота, изгибного момента и поперечной силы можно представить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} \eta(z) \\ \beta_1(z) \\ M_1(z) \\ EJ_1 \\ Q_2(z) \\ \rho F \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \beta_1(0) \\ M_1(0) \\ EJ_1 \\ Q_2(0) \\ \rho F \omega^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Здесь  $\omega$  – частота собственных колебаний стержня,  $c^{-1}$ ;

$A_{ij}$  – элементы матрицы, определяемые формулами:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{s_2 \cos p_1 z - s_1 \operatorname{ch} p_1 z}{p_1^2 + p_2^2}; A_{12} = -\frac{p_1 \sin p_1 z + p_2 \operatorname{sh} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}; A_{13} = \frac{\cos p_1 z - \operatorname{ch} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}; A_{14} = \frac{p_1 s_2 \sin p_1 z + p_2 s_1 \operatorname{sh} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}; \\
 A_{21} &= \frac{s_1 s_2 (-p_2 \sin p_1 z + p_1 \operatorname{sh} p_1 z)}{p_1 p_2 (p_1^2 + p_2^2)}; A_{22} = \frac{-s_1 \cos p_1 z + s_2 \operatorname{ch} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}; A_{23} = \frac{-s_1 p_2 \sin p_1 z + s_2 p_1 \operatorname{sh} p_2 z}{p_1 p_2 (p_1^2 + p_2^2)}; \\
 A_{24} &= \frac{s_1 s_2 (\cos p_1 z - \operatorname{ch} p_2 z)}{p_1^2 + p_2^2}; A_{31} = \frac{s_1 s_2 (-\cos p_1 z + \operatorname{ch} p_2 z)}{p_1^2 + p_2^2}; A_{32} = \frac{s_1 p_1 \sin p_1 z + s_2 p_2 \operatorname{sh} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}; \\
 A_{33} &= -\frac{s_1 \cos p_1 z - s_2 \operatorname{ch} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}; A_{34} = \frac{p_1 \sin p_1 z + p_2 \operatorname{sh} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}; A_{41} = \frac{-s_2 p_2 \sin p_1 z + s_1 p_2 \operatorname{sh} p_2 z}{p_1 p_2 (p_1^2 + p_2^2)}; \\
 A_{42} &= \frac{-\cos p_1 z + \operatorname{ch} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}; A_{43} = \frac{-p_2 \sin p_1 z + p_1 \operatorname{sh} p_1 z}{p_1 p_2 (p_1^2 + p_2^2)}; A_{44} = \frac{s_2 \cos p_1 z - s_1 \operatorname{ch} p_2 z}{p_1^2 + p_2^2}.
 \end{aligned}$$

Элементы матрицы выражены через следующие величины:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \sqrt{\sqrt{K_1^2 + K_2} + K_1}, \\
 p_2 &= \sqrt{\sqrt{K_1^2 + K_2} - K_1}.
 \end{aligned}$$

$$s_1 = \frac{\rho F k_{11}}{G} \omega^2 - p_1^2,$$

$$s_2 = \frac{\rho F k_{11}}{G} \omega^2 + p_2^2,$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho \omega^2}{E} \left( 1 + \frac{E}{G} F k_{11} \right)$$

$$K_2 = \frac{\rho F \omega^2}{E J_1} \left( 1 - \frac{\rho J_1 k_{11}}{G} \omega^2 \right)$$

Для определения частот колебаний стержня используем выражение

$$A = 0. \tag{4}$$

Матрица  $A$  зависит от условий закрепления концов стержня.

Различные виды закрепления и соответствующие им выражения (4) приведены в таблице 1.

Применим полученные выражения для определения частот колебаний шарнирно закрепленного стержня. Шарнирное закрепление характерно для неразрезных многопролетных балок, поэтому полученные значения частот могут нести прикладное значение. В целях сравнения полученных результатов с расчетами, выполненными по имеющимся теориям, не учитывающим вторичные сдвиги, примем в каче-

стве сечения стержня двутавровый профиль, изображенный на рисунке 1.

Для большей наглядности результатов и упрощения расчетов частоту колебаний  $\omega$  заменим безразмерной характеристикой:

$$\omega^* = \omega \frac{l^2 \rho}{E}. \tag{5}$$

Здесь  $l$  – длина стержня, м.

Примем значения характеристик в виде их относительных величин:

$$b^* = \frac{b}{h} = 0,5; \delta^* = \frac{\delta}{h} = 0,02; l^* = \frac{l}{h} = 15; \frac{G}{E} = 0,42.$$

С использованием выражения (4) для выбранного способа закрепления были получены зависимости частот колебаний от параметров стержня. Влияние ширины профиля и толщины стенок на частоту первой и второй главных форм колебаний показаны на рисунках 2 и 3.

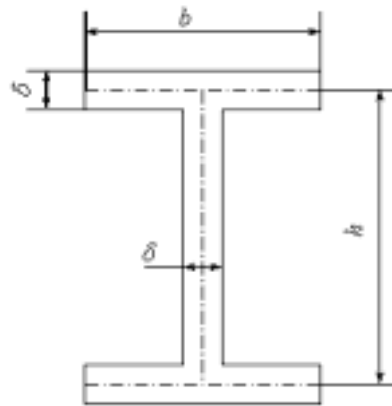
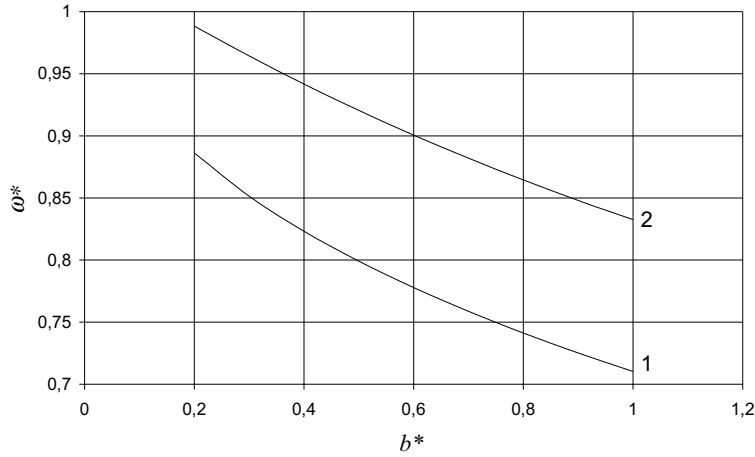
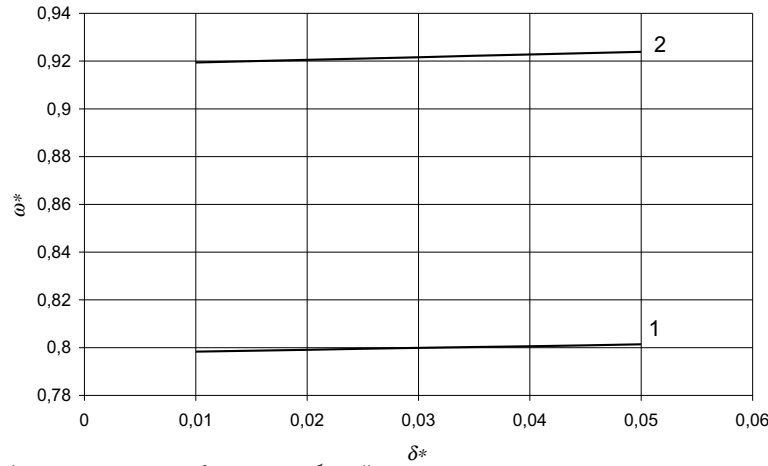


Рисунок 1. Сечение исследуемого стержня



1 – первая главная форма колебаний  
2 – вторая главная форма

Рисунок 2. Влияние ширины сечения  $b$  на частоту колебаний



1 – первая главная форма колебаний  
2 – вторая главная форма

Рисунок 3. Влияние толщины стенок на частоту колебаний

Так же получены зависимости частот свободных колебаний от материала стержня, который описывается характеристикой  $G/E$ . Эта зависимость показана на рисунке 4. При этом безразмерная характеристика (5) не зависит от плотности материала. На всех рисунках линии 1 соответствует первая форма колебаний, а линии 2 – вторая.

Анализ графиков показывает, что наибольшего изменения частот колебаний можно достичь варьированием размеров сечения стержня, при этом при увеличении ширины сечения частота колебаний снижается. Изменение толщины стенок сечения незначительно влияет на частоту, вне зависимости от ее порядка. Некоторое влияние на частоту оказывает материал сечения, в частности при увеличении отношения  $G/E$  относительная частота (5) растет. Но для полного анализа требуется учет плотности материала.

Для оценки влияния вторичных сдвигов на частоту свободных колебаний проводилось сравнение значений частот для теории, учитывающей сдвиги (линия 1), и для теории без их учета (линия 2) на рисунке 5.

Таблица 1. Значения граничных условий и выражения  $A$

Тип закрепления	Граничные условия	Условие $A=0$
	$\eta(0) = 0; M_1(0) = 0$ $\eta(l) = 0; M_1(l) = 0$	$A_{12}A_{34} - A_{14}A_{32} = 0$
	$\eta(0) = 0; M_1(0) = 0$ $Q_2(l) = 0; M_1(l) = 0$	$A_{32}A_{44} - A_{42}A_{34} = 0$
	$Q_2(0) = 0; M_1(0) = 0$ $Q_2(l) = 0; M_1(l) = 0$	$A_{31}A_{42} - A_{32}A_{41} = 0$
	$\eta(0) = 0; \beta_1(0) = 0$ $\eta(l) = 0; M_1(l) = 0$	$A_{13}A_{34} - A_{14}A_{33} = 0$
	$\eta(0) = 0; \beta_1(0) = 0$ $Q_2(l) = 0; M_1(l) = 0$	$A_{34}A_{43} - A_{33}A_{44} = 0$
	$\eta(0) = 0; \beta_1(0) = 0$ $\eta(l) = 0; \beta_1(l) = 0$	$A_{13}A_{24} - A_{14}A_{23} = 0$

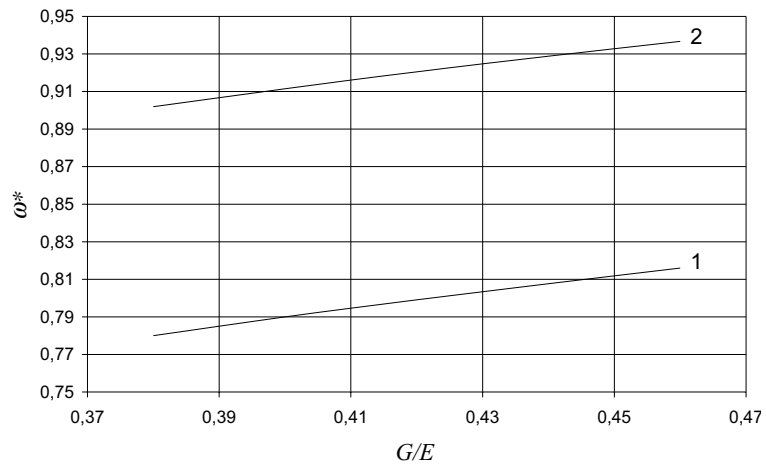
Из рисунка видно, что учет вторичных сдвигов влияет на частоту изгибных колебаний. Это происходит вследствие того, что угол поворота сечения не принимается пропорциональным первой производной от прогиба. При этом результирующие частоты несколько меньше тех, которые получаются без учета вторичных сдвигов.

### Выводы

1. Получены уравнения главных форм изгибных колебаний тонкостенного стержня и представлены в матричной форме с использованием метода граничных элементов. Эти уравнения содержат частоту собственных колебаний и позволяют определить ее при различных способах закрепления концов стержня.

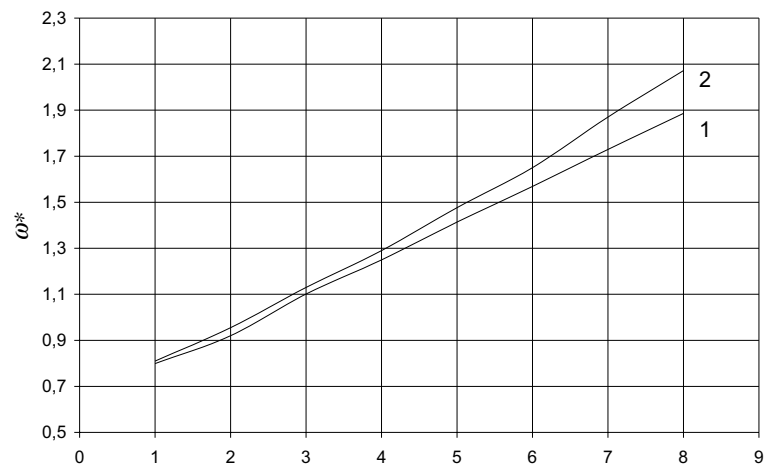
2. Несмотря на некоторое усложнение исходных выражений, приведенный подход позволяет не только определять частоты свободных изгибных колебаний тонкостенных стержней, но и устанавливать зависимости между характеристиками стержня и частотами колебаний для прогнозирования наличия или отсутствия частот в исследуемом диапазоне. Вследствие использования аналитических выражений такой подход имеет высокую точность. Зависимости частоты колебаний от характеристик сечения, показанные на примере шарнирно опертого стержня, позволяют в дальнейшем изучать изгибные колебания конструкций из тонкостенных стержней, например неразрезных балок.

3. Учет вторичных сдвигов оказывает влия-



1 – первая главная форма колебаний  
2 – вторая главная форма

Рисунок 4. Влияние модулей упругости материала на частоту колебаний



1 – частота с учетом сдвигов  
2 – частота без учета сдвигов

Рисунок 5. Влияние вторичных сдвигов на частоту колебаний

ние на значения частот свободных колебаний стержня, и в сравнении с имеющимися теориями получены некоторые расхождения, которые возрастают с увеличением порядка колебаний из-за наличия дополнительных слагаемых в исходных выражениях.

2.03.2011

### Список литературы:

1. Бейлин Е.А., Петрова И.Г. Определение частот свободных изгибно-крутильных колебаний тонкостенных стержней с частично замкнутым контуром сечения // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. – Л., 1990. – С. 26-33.
2. Корбут Б.А., Лазарева Г.В. О динамической теории тонкостенных криволинейных стержней // Прикл. механика, 1982. – Т. XVIII. – №5. – С. 98-104.
3. Куча Г.В., Гаврилов А.А. Изгибные колебания неразрезной балки комбинированного сечения // Математика. Информационные технологии. Образование. Сборник научных трудов. Оренбург: ОГУ, 2006. С. 86-90.

Сведения об авторах:

**Гаврилов Александр Александрович**, ассистент кафедры теоретической механики  
Оренбургского государственного университета

**Кудина Лариса Ивановна**, доцент кафедры теоретической механики  
Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук

**Куча Галина Васильевна**, доцент кафедры теоретической механики  
Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук

**Морозов Николай Анатольевич**, доцент кафедры теоретической механики Оренбургского  
государственного университета, кандидат технических наук, e-mail: moroz.off.nick@yandex.ru  
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 4505, тел. (3532) 37-25-63, e-mail: pialex@bk.ru

**UDC 69.04**

**Gavrilov A.A., Kudina, L.I., Kucha G.V., Morozov N.A.**

**THE INFLUENCE OF SECTION GEOMETRIC CHARACTERISTICS ON THE FREQUENCIES OF FREE FLEXURAL VIBRATIONS OF THIN STRAIGHT BARS**

We studied the frequency and the main forms of free flexural vibrations of thin rods based on the theory that takes into account secondary shifts and rotational inertia of the sections. We used the boundary element method and determined the influence of the bar section characteristics as relative values on the frequencies of free oscillations. The comparison of calculation results with existing theories is provided.

Key words: bending, thin-wall bar, oscillations

Bibliography:

1. Beylin E.A., Petrova I.G. Definition of frequencies of free flexural twisting fluctuations of thin-walled cores with partially closed contour of section // Issledovaniya po mehanike stroitelnih konstruktsiy i materialov. – L., 1990. – S.26-33.
2. Korbut B.A., Lazareva G.V. About the dynamic theory of thin-walled curvilinear cores // Prikl. mehanika, 1982. – T. XVIII. – №5. – S. 98-104.
3. Kucha G.V., Gavrilov A.A. Flexural fluctuations of not cutting beam of the combined section // Matematika. Informatsionnie tehnologii. Obrazovanie. Sbornik nauchnih trudov. Orenburg: OGU, 2006, S.86-90.