

РАЗВИТИЕ ТРЕЩИН В ДИСКРЕТНЫХ СРЕДАХ С РАЗЛИЧНЫМ ДИАМЕТРОМ ЗЕРНА

Статья посвящена разработке модели, описывающей процесс разрушения зернистых материалов. Установлены закономерности формирования и развития трещин в дискретных средах. Представлены результаты численного расчета коэффициентов интенсивности напряжений первого рода с учетом диаметра зерна.

Ключевые слова: разрушение, зернистый материал, трещина.

При разработке месторождений полезных ископаемых возникает ряд задач, связанных с прогнозированием разрушения горных пород. Большинство горных пород представляют собой зернистые структуры, которые отличаются по форме, размеру зерен, их взаимному расположению, ориентации и количеству межзеренных контактов.

В настоящее время существуют модели и экспериментальные данные, которые позволяют исследовать процесс формирования и развития микротрещин в материалах. Однако не все существующие модели учитывают структурные особенности исследуемых образцов материала.

Важную роль в механике развития трещин играют коэффициенты интенсивности напряжений, поэтому разработка методов их вычисления является актуальной задачей. Для многих частных задач коэффициенты интенсивности напряжений получены и приведены в справочниках.

Целью данной работы являются разработка математической модели при квазистатическом росте трещин в зернистом материале и установление зависимости коэффициента интенсивности напряжений первого рода от диаметра зерна.

Реализация цели осуществлялась посредством решения дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) = 0,$$

где u_x – смещения по оси Ox ;

u_y – смещения по оси Oy ;

ν – коэффициент Пуассона.

Рассматривался зернистый материал, содержащий плоскую трещину $A_i B_i$ длиной $2l$. Структура материала была представлена в виде сетки гексагональных зерен. Геометрическая модель образца показана на рисунке 1.

Диаметр зерна материала d принимал значения 0,2; 0,5; 1; 2 мм.

Численный расчет выполнялся методом граничных элементов [1].

Граничные интегральные уравнения этого метода в процессе дискретизации границ представляются в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\sigma_s^i = K_{si} D_{si} + \sum_{j=1}^N [B_{ssij} D_{sj} + B_{snij} D_{nj}],$$

$$\sigma_n^i = K_{ni} D_{ni} + \sum_{j=1}^N [B_{nsij} D_{sj} + B_{nnij} D_{nj}], \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где N – количество всех граничных элементов; $D_{nj} = u_n(x, 0_-) + u_n(x, 0_+)$, $D_{sj} = u_s(x, 0_-) + u_s(x, 0_+)$ – компоненты разрывов смещений j -го отрезка трещины в нормальном и касательном направлениях соответственно;

$u_n(x, 0_-), u_n(x, 0_+)$ – нормальные смещения нижнего и верхнего берегов трещины;

$u_s(x, 0_-), u_s(x, 0_+)$ – касательные смещения нижнего и верхнего берегов трещины;

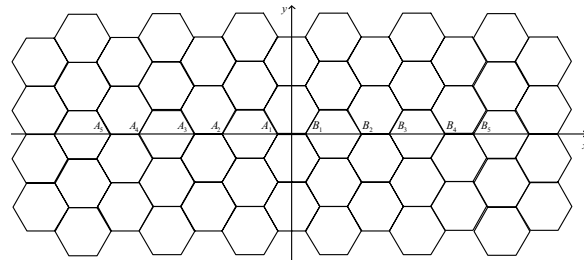


Рисунок 1. Геометрическая модель зернистого материала

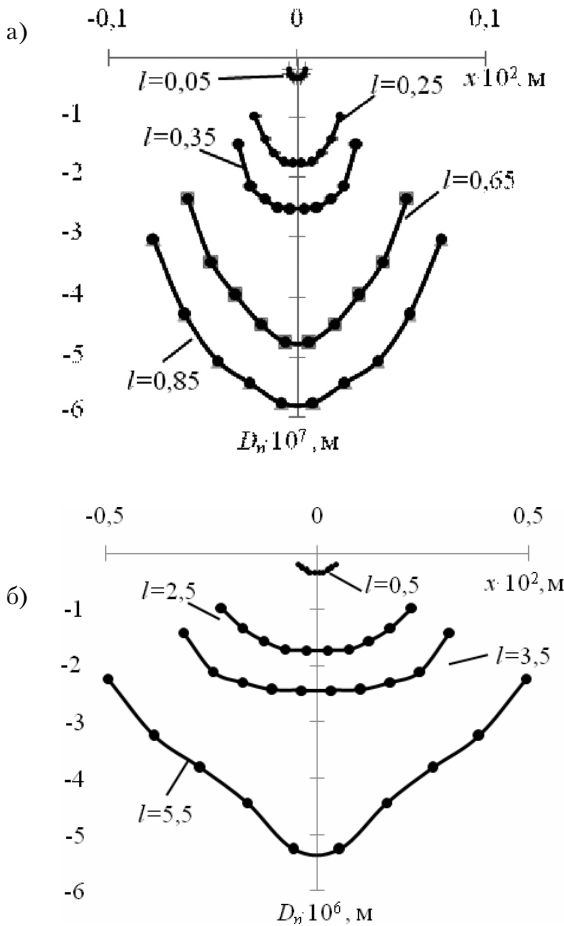
σ_s^i, σ_n^i – касательные и нормальные напряжения на границе тела соответственно;

K_{nj}, K_{sj} – нормальная и касательная жесткость заполнителя i -го элемента соответственно;

$B_{ssij}, B_{snij}, B_{nsij}, B_{nnij}$ – фундаментальные решения.

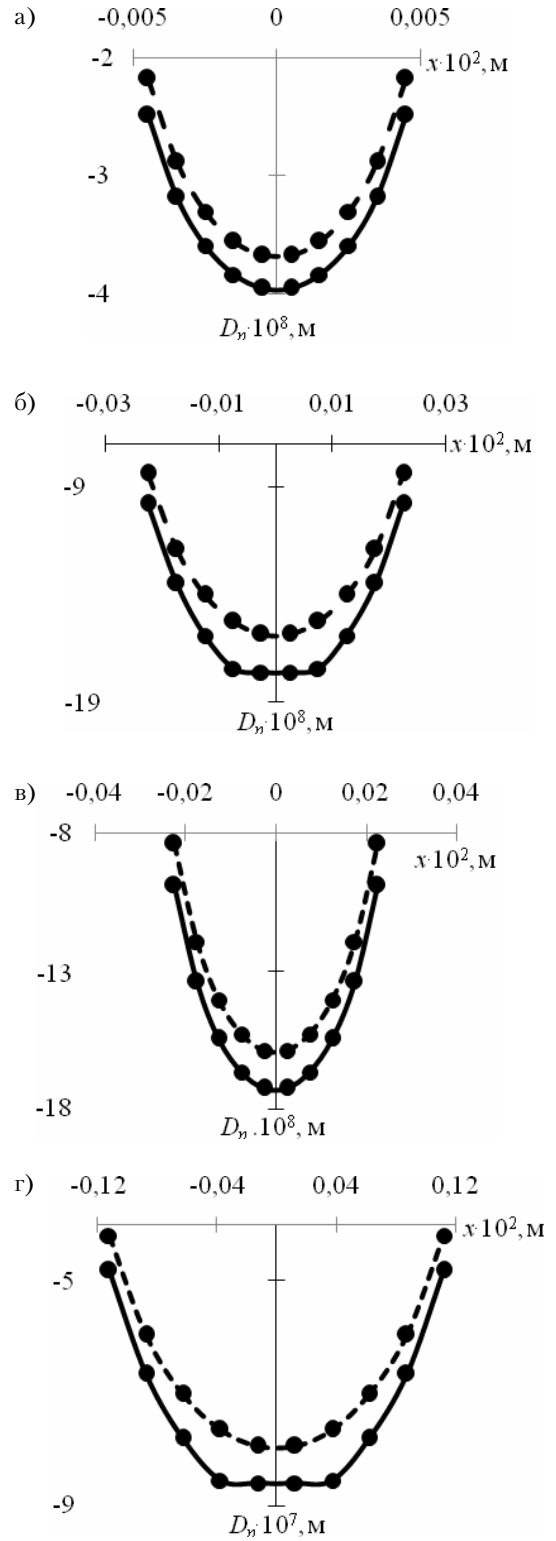
Краевые условия имели вид: $\sigma_s = 0; \sigma_n = \sigma_n^0$ на трещине $A_i B_i$, где σ_s, σ_n – соответственно касательные и нормальные напряжения, σ_n^0 – задаваемое нормальное напряжение.

Упругие характеристики зерна и заполнителя имели одинаковые значения: модуль Юнга $E = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Ширина заполнителя между зернами породы $h = 0,1 \cdot d$. Жесткость заполнителя определялась следующими равенствами: $K_n = \frac{E}{h}, K_s = \frac{G}{h}$.



а) $d = 0,2 \text{ мм}$; б) $d = 2 \text{ мм}$.

Рисунок 2. Величина нормального раскрытия нижнего берега трещины в зернистых материалах с различным диаметром зерна при увеличении длины трещины



а) $d = 0,2 \text{ мм}, l = 0,00005 \text{ м}$; б) $d = 0,2 \text{ мм}, l = 0,00025 \text{ м}$;
в) $d = 1 \text{ мм}, l = 0,0025 \text{ м}$; г) $d = 1 \text{ мм}, l = 0,0125 \text{ м}$

Рисунок 3. Величина раскрытия трещины в сплошном и зернистом материалах

Таблица 1. Относительная погрешность вычисления разрывов смещений

$l \ 3,5 \cdot 10^3 \text{ м}; d \ 2 \text{ мм}$			$l \ 2,5 \cdot 10^4 \text{ м}; d \ 1 \text{ мм}$			$l \ 3,5 \cdot 10^4 \text{ м}; d \ 0,2 \text{ мм}$		
$D_n \cdot 10^6, \text{ м}$	$\tilde{D}_n \cdot 10^6, \text{ м}$	\tilde{D}_n	$D_n \cdot 10^7, \text{ м}$	$\tilde{D}_n \cdot 10^7, \text{ м}$	\tilde{D}_n	$D_n \cdot 10^7, \text{ м}$	$\tilde{D}_n \cdot 10^7, \text{ м}$	\tilde{D}_n
-2,82	-2,81	0,32%	-1,98	-1,99	0,51%	-2,88	-2,88	0,07%
-4,20	-4,18	0,44%	-2,67	-2,67	0,06%	-4,28	-4,27	0,28%
-4,59	-4,61	0,52%	-3,09	-3,11	0,73%	-4,70	-4,73	0,61%
-4,86	-4,80	1,16%	-3,33	-3,33	0,09%	-5,00	-4,95	1,04%
-4,87	-4,90	0,50%	-3,45	-3,44	0,14%	-5,03	-5,06	0,50%
-4,87	-4,90	0,46%	-3,45	-3,46	0,35%	-5,03	-5,05	0,45%
-4,86	-4,80	1,10%	-3,33	-3,35	0,48%	-5,00	-4,95	1,06%
-4,59	-4,62	0,79%	-3,09	-3,08	0,27%	-4,70	-4,74	0,70%
-4,20	-4,19	0,22%	-2,67	-2,68	0,33%	-4,28	-4,27	0,27%
-2,82	-2,83	0,09%	-1,98	-1,98	0,08%	-2,88	-2,88	0,01%

Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений первого рода использовали критерий [3]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{G}{2(1-\nu)} \lim_{x \rightarrow l} \frac{D_n}{\sqrt{l-x}},$$

где K_I – коэффициент интенсивности напряжений первого рода;

$2l$ – длина трещины;

G – модуль сдвига.

В результате численного решения системы линейных уравнений (1) методом разрывных смещений были найдены величины D_{nj} .

На рисунке 2 представлены зависимости величины нормального раскрытия трещины от ее длины. Длина трещины указана в миллиметрах. Графики показывают, что разрывы нормальных смещений при квазистатическом продвижении трещины на порядок увеличиваются при изменении диаметра зерна в 10 раз, а увеличение длины трещины приводит к отличию ее формы от эллиптического вида.

На рисунке 3 показаны результаты численного решения задачи для сплошной и дискретной среды. Так как нормальные смещения берегов трещины равны по величине, то на рисунке показана величина смещения только нижнего берега трещины, где $x=0$ – линия симметрии. Пунктирной линией показано графическое изображение разрывов смещений в сплошной среде, непрерывной линией – в дискретной среде. Из рисунка видно, что раскрытие трещины в дискретной среде больше, чем в сплошной.

Для раскрытия берегов трещины в сплошной среде используют представление $D_n = -\frac{2(1-\nu)}{G} p \sqrt{l^2 - x^2}$. Для разрывов смещений в зернистом материале были найдены аппроксимирующие функции вида $\tilde{D}_n = f(x)\sqrt{l-x}$, где $f(x)$ – полиномы 6-го порядка.

мирующие функции вида $\tilde{D}_n = f(x)\sqrt{l-x}$, где $f(x)$ – полиномы 6-го порядка.

В таблице 1 показана относительная погрешность $\delta(\tilde{D}_n)$ значений аппроксимирующей функции \tilde{D}_n в сравнении с численным расчетом D_n , которая подтверждает достоверность и точность полученных результатов.

Анализ полученных результатов показал, что при изучении развития трещины в исследуемом образце необходимо использовать две модели:

I – упор трещины в зерно материала;

II – упор трещины в межзеренный заполнитель.

Это обусловлено тем, что прочность зерен превышает прочность межзеренного заполнителя и продвижение трещины по границе зерна требует меньших усилий.

В результате расчетов были получены критерии роста трещин:

– для модели I:

$$K_I = p\sqrt{\pi l} \cdot \left(0,109 \cdot \ln \frac{d}{l} + 1,644 \right),$$

где $l = \frac{1}{4}d; \frac{7}{4}d; \frac{13}{4}d$;

– для модели II:

$$K_I = p\sqrt{\pi l} \cdot \left(-0,358 \cdot \left(\frac{d}{l} \right)^2 + 0,829 \cdot \frac{d}{l} + 1,357 \right),$$

где $l = \frac{5}{4}d; \frac{17}{4}d$.

Диаметр зерна изменялся от 0,2 до 2 мм.

На рисунке 4 приведены зависимости коэффициента интенсивности напряжений от длины трещины l и отношения диаметра к длине трещины $\frac{d}{l}$ при $p = 1000 \text{ Па}$.

На рисунке 4 а пунктирная линия изображает данную зависимость коэффициента ин-

тенсивности напряжений от длины трещины в сплошной среде, непрерывная – в дискретной с диаметром зерна $d = 2$ мм. Графические зависимости показывают влияние структуры материала на значение коэффициента интенсивности напряжений первого рода.

Рисунок 4б показывает зависимость коэффициента интенсивности напряжений первого рода от диаметра зерна. Рост коэффициента интенсивности напряжений при увеличении диаметра зерна говорит о разупрочнении материала.

Таким образом, увеличение зерна материала уменьшает его прочностные характеристики. Полученные результаты согласуются с экспериментальными результатами при развитии трещин в керамике, металле, горных породах [3].

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. При продвижении трещины в зернистом материале необходимо различать две модели: упор вершины трещины в зерно и ее продвижение по границе зерна.

2. Увеличение зерна уменьшает прочностные характеристики материала.

3. Полученные формулы расчета коэффициента интенсивности напряжений первого рода позволяют прогнозировать развитие трещины в зернистом материале.

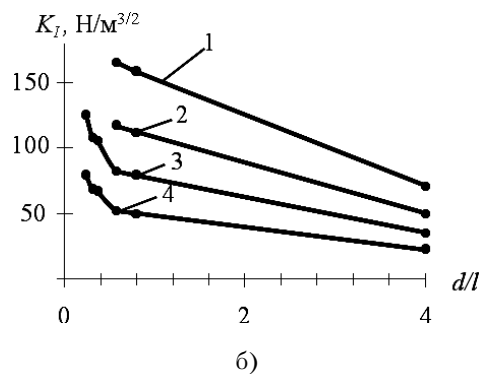
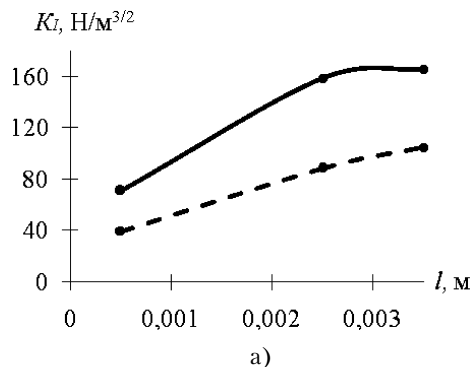


Рисунок 4. а) зависимость коэффициента интенсивности напряжений первого рода от длины трещины, формирующейся в дискретной и сплошной среде;

б) значения коэффициента интенсивности напряжений первого рода для материалов с различным диаметром зерна: 1 – $d = 2$ мм, 2 – $d = 1$ мм, 3 – $d = 0,5$ мм, 4 – $d = 0,2$ мм.

12.05.2010

Список использованной литературы:

1. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. - 328 с.
2. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А.М. Линьков. - СПб.: Наука, 1999. - 385 с.
3. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение / Дж. Коллинз. – М.: Мир, 1984. - 624 с.

Сведения об авторах: Полкунов Юрий Григорьевич, заведующий кафедрой математического анализа Оренбургского государственного университета, доктор технических наук, доцент 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2240а, тел. (3532) 372533, e-mail: matan@mail.osu.ru

Каракулина Елена Олеговна, преподаватель кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2240, тел. (3532) 372533, e-mail: matan@mail.osu.ru

Polkunov Y.G., Karakulina E.O.

The development of cracks in the discrete media with different diameter of grain.

Article is dedicated to the development of model, which describes the process of destroying the grainy materials. Laws governing formation and development of cracks in the discrete media are established here. The results of the numerical calculation of the coefficients of the intensity of the stresses of the first kind taking into account the diameter of grain are represented.

The key words: destruction, grainy material, crack.

Bibliography:

1. Crauch S. Methods of boundary elements at mechanics of rigid body / S. Krauch, A. Starfield. – М.: Mir, 1987. – 328 p.
2. Linkov A.M. Multimeter method of boundary integral equations of elasticity theory / A.M. Linkov – SPb.: Nauka, 1999. – 385 p.
3. Collins J. Materials damage in some constructions. Analysis, forecast, prevention / J. Collins – М.: Mir, 1984. – 624 p.