УДК 51 (09)

Медведева Н.Н.
Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова
E-mail: natalyamedvedev@yandex.ru

РАЗВИТИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ РАЗБИЕНИЙ В ТРУДАХ ДЖ. ДЖ. СИЛЬВЕСТРА

В статье рассмотрена история развития графического метода аддитивной теории разбиений в работах английского математика Дж. Дж. Сильвестра и его применение к доказательству теорем о разбиениях.

Ключевые слова: аддитивная теория разбиений, история комбинаторного анализа, разбиение, графический метод аддитивной теории разбиений.

Аддитивная теория разбиений является составной частью комбинаторного анализа – раздела математики, посвященного решению задач выбора и расположения частей некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Во многих комбинаторных задачах некоторая совокупность элементов распределяется по некоторому множеству ячеек. Задачи этого класса существуют с давних времен и имеют разработанную методику решения. Интерес к ним не затухает ввиду их практического значения. Они появляются в самых различных постановках: разбиениях множеств, рассечениях графов, сетей, группировках станков, автоматов-роботов и т. д.

Сложившиеся способы решения задач этого класса зависят от условий, накладываемых на виды распределяемых элементов, способы распределения, виды и вместимость ячеек.

Для подсчета числа распределений необходимо уточнить, являются ли элементы данного множества и ячейки различными (например, занумерованными) или нет. В соответствии с этим задачи делятся на следующие четыре класса.

1. Элементы множества и ячейки различимы.
2. Элементы множества неразличимы, ячейки различимы.
3. Элементы множества различимы, ячейки неразличимы.
4. Как элементы множества, так и ячейки неразличимы между собой.

Наиболее трудными для решения оказались задачи четвертого класса. Самой известной интерпретацией данного случая является теоретико-числовая задача о разбиении натуральных чисел на натуральные слагаемые. Будем считать невозрастающую неупорядоченную последовательность натуральных чисел с суммой членов, равной n, разбиением числа n на слагаемые, которые принято называть частями.

Возникнув еще в XVIII в., сейчас аддитивная теория разбиений находит широкое применение всюду, где производят либо подсчет, либо классификацию дискретных систем. Однако, как ни парадоксально, исторические аспекты формирования и развития теории разбиений до сих пор остаются недостаточно изученными. Она, как и любая теория, прошла в своем развитии ряд основных этапов, от накопления задач до систематического изложения основных фактов и теорем. Анализ первоисточников позволил установить, что с середины XVII в. до 60-х гг. XIX в. разбиения стали появляться при решении большого числа разнообразных задач, а следовательно, возникла необходимость в разработке методов их подсчета. Значительное продвижение в формировании и развитии методов подсчета разбиений произошло в работах знаменитых английских математиков А. Кэли (1821–1895) и Дж. Дж. Сильвестра (1814–1897). Из анализа их работ, посвященных этой теме, видно, что первоначально разбиения они использовали как удобный инструмент при решении других задач. Однако впоследствии эта тема так увлекла ученых, что они занялись систематическим изучением разбиений (их видов, методов подсчета, установлением взаимосвязей, доказательством большого числа теорем, устанавливающих взаимосвязи разных видов разбиений и т. д.).

Одним из эффективных методов в современной теории разбиений является графический, который сформировался в работах Сильвестра. Рассмотрим процесс его формирования и развития подробнее.

Уже в статье 1853 г. «On Mr Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical functions of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients» [2] Дж. Сильвестр показал новый вид разбиений – *сопряженные*. Так числу 9 соответствует разбиение $(3^2 21)$, под которым следует понимать запись $9 = 3 + 3 + 2 + 1$. Его ученый представил схемой:

$$\begin{array}{lll} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & \end{array}$$

Если же прочитать ее по строкам слева направо, то получим

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & \end{array}$$

Последняя схема соответствует (432) (так как $9 = 4 + 3 + 2$), названному сопряженным разбиению $(3^2 21)$. Сильвестр писал, что этот новый вид ему стал известен от Ферре, а тот, в свою очередь, познакомился с ним, разбирая кембриджские бумаги британского астронома и математика Дж. Адамса. Позднее такие схемы стали называться *графами Ферре* и приобрели вид

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

В дальнейших опубликованных работах, посвященных разбиениям, ученые развивали аналитические методы подсчета, а в 80-е гг. XIX столетия Сильвестр вновь обратился к графическому представлению. Объясняется это, по-видимому, тем, что к этому времени разбиения стали интересовать исследователей не только как прикладной аппарат, но прежде всего как объект самостоятельного изучения. Произошло становление теории разбиений, нуждавшейся в собственных методах, одним из которых и стал графический. Он не позволял найти количество разбиений какого-либо числа, но был эффективным средством доказательства теорем, устанавливающих соотношения между разного рода разбиениями. В современной математике этот метод по-прежнему широко используется. Его изложению Сильвестр посвятил обширную статью (занимающую 83 страницы в полном собрании сочинений) «A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion» [1], вышедшую в 1882–884 гг. «Конструктивная теория разбиений» – плод кропотливого труда ученого. В ней собраны достижения самого Сильвестра и многочисленных математиков, занимавшихся проблемой разбиений чисел, а также сделана попытка систематизации теории разбиений. Дадим краткую характеристику каждой из структурных частей этой работы.

В своей статье Сильвестр предложил конструктивный метод доказательства утверждений. Заметим, что определение конструктивного метода ученый не вводил, интуитивно понимая под ним способ доказательства, основанный на графических представлениях разбиений, он писал, что «понимание во многих случаях облегчается с помощью графического метода представления, который также служит инструментом преобразования» [1].

В статье приведены доказательства утверждений с помощью конструктивного метода. Одни доказательства принадлежат различным ученым (например, Эйлеру), которые занимались теорией разбиений, автором других является сам Сильвестр. Также он доказывал утверждения и теоремы, ранее доказанные другими учеными, но с помощью нового метода. Следует отметить, что хотя Сильвестр почти не иллюстрировал доказательства рисунками, практически все рассуждения можно наглядно представить с помощью графов.

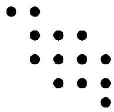
Помимо описания и применения нового метода Сильвестр также приводит многочисленные примеры связей теории разбиений и других разделов математики. Он привлек для решения ее задач инструменты не только комбинаторного анализа, но также алгебры, теории рядов и дифференциального исчисления. Множество понятий и терминов, используемых в статье, ввел сам Сильвестр. Многие из них использовались и до этого, но Сильвестр указал их место в теории разбиений и дал определение и обозначение.

Статья состоит из трех частей: «Включения» (Interact), состоящего из двух частей, и Exodion, вместе составляющих 71 параграф.

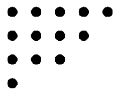
Содержание первой части является, так сказать, «классическим», то есть представляет собой ряд рассуждений, основанных на использовании метода производящих функций, в ней также приведены результаты, полученные Эйлером. Здесь же Сильвестр ввел понятия регулярного графа и сопряженного разбиения. Первый термин ученый придумал сам.

Любой граф, который дает упорядоченные разбиения как при рассмотрении по вертикальным, так и по горизонтальным линиям, ученый назвал *регулярным графом* разбиения.

Например,



– нерегулярный граф

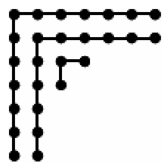


– регулярный граф

В своей статье множество утверждений Сильвестр доказал с применением сопряженных разбиений.

В первой части «Включения» Сильвестр дал примечания относительно некоторых производящих функций и их свойств. Это доказательство известных разложений $(1+ax)(1+ax^2)..(1+ax^i)$ и $(1-a)(1-ax)(1-ax^2)..(1-ax^i)$, а также доказательство того, что коэффициент общего члена производящей функции есть количество разбиений некоторого числа. Доказываемые факты были описаны еще Эйлером в его «Введении в анализ бесконечно малых», но он, оперируя рядами, не обосновывал применение своих действий. Рассуждения, приведенные Сильвестром, примечательны тем, что они проведены с помощью конструктивного метода и полностью обоснованы.

Во второй части появляется очень интересный способ представления элементов разбиения через последовательность углов, предложенный Дарфи. Поясним его на примере. Рассмотрим граф:



Его можно прочитать обычным образом, тогда получим, что он представляет разбиение ($7^2 4 3 2^3$) числа 27. По методу Дарфи частями графа являются точки, лежащие на одной ломаной, которая образует угол. То есть граф, указанный выше, представляет также разбиение (13 11 3) того же самого числа 27.

Метод, предложенный Дарфи, основан на понятии самосопряженного разбиения. Этот термин был введен неким Faa de Bruno.

Разбиение называется самосопряженным, если граф, представляющий его, симметричен относительно двух узловых границ. Или, другими словами, если граф при прочтении его по строкам и столбцам остается таким же, как прежде. К примеру, таким является приведенный выше граф.

Надо сказать, что сам Сильвестр несколько отошел от изначального применения метода Дарфи. По крайней мере, он использовал основные принципы метода не только по отношению к самосопряженным разбиениям, но и к разбиениям, не обладающим этим свойством. Сильвестр рассмотрел применение метода Дарфи к биразбиениям (в современной терминологии – двойные или двоичные). Кроме того, было довольно неожиданно увидеть еще одно доказательство пентагональной теоремы с использованием метода Дарфи, которое рассмотрено ниже.

Третья часть работы и вторая часть «Включения» содержат некоторые факты, связанные с теорией рядов, а точнее, приложение теории разбиений к теории рядов. Последняя часть Exodion представляет собой демонстрацию применения методов алгебры, математического анализа к доказательству теорем о разбиениях.

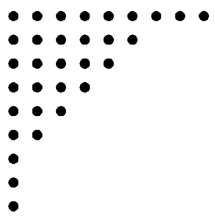
Таким образом, в рассматриваемой работе Сильвестра содержатся результаты обширного исследования вопросов теории разбиений, обзор и систематизация достижений в этой области других математиков. Ученый дал полное описание и способы применения конструктивного метода, который, в сущности, разработал он сам. Покажем примеры применения графического метода для решения задач на разбиения.

Рассмотрим, к примеру, способ отыскания числа самосопряженных разбиений числа n, соответствующих разбиениям n на нечетные неповторяющиеся части.

Для начала рассмотрим некоторые характеристики графа, представляющего самосопряженное разбиение. Он может быть разбит на квадрат из i^2 узлов и два одинаковых присоединенных графа. Оба эти графа содержат число $\frac{n-i^2}{2}$ и удовлетворяют единственному условию, что число его строк (или столбцов), то есть число частей в разбиении, которое он представляет, будет равно или меньше i. Любой такой граф, в котором есть квадрат из i^2 узлов с двумя присоединенными графами, может быть разбит другим способом на i углов, каждый из которых содержит любое непрерывно уменьшающееся нечетное число узлов. Непрерывно уменьшающееся число узлов – условие, необходимое для того, чтобы более низкие строки и следующие столбцы не выпирали за верхние строки и предшествующие столбцы. Любой набор таких равносторонних углов, расположенных в порядке убывания, образовывает упорядоченный граф. Таким образом, вышеприведенная фигура, имеющая квадрат из 9 узлов, может быть разбита на три угла, содержащих соответственно 13, 11, 3 узла. Вообще, число способов, которыми n может быть составлено из нечетных и неповторяющихся частей, будет таким же, как и количество способов, которыми число $\frac{n-i^2}{2}$ может быть разбито на не более j частей.

Самосопряженное разбиение находится следующим методом.

Чтобы видеть, как любой самосопряженный граф может быть восстановлен из соответствующего разбиения, состоящего из неповторяющихся нечетных чисел, рассмотрим случай разбиения $(17\ 9\ 5\ 1)$, представленного угловым графом, записанным ниже



Число углов – это число данных частей, в нашем примере это 4. Первые четыре строки графа будут получены прибавлением 0, 1, 2, 3 к большей «половине» (терминология Сильвестра) 17, 9, 5, 1, то есть к 9, 5, 3, 1. Это будет 9, 6, 5, 4. Общее число строк будет большей «половиной» наибольшего члена.

Оставшиеся строки имеют содержание 3, 2, 1, 1, 1, то же самое, как и столбцы графа, найденного вычитанием 4 частей из числа 9 (большая «половина» наибольшего члена). Таким образом, полученные строки образуют граф, сопряженный графу, который образован из оставшихся столбцов.

В общем, самосопряженный граф, соответствующий любому разбиению на неповторяющиеся нечетные числа $q_1, q_2, \ldots q_j$, будет найден с помощью следующего *правила*, сформулированного ученым: пусть P будет системой разбиений $k_1, k_2, \ldots k_j$, в которых любой член k_θ – большая «половина» от q_θ, увеличенная на $\theta - 1$. P' – другая система разбиений $k'_1, k'_2, \ldots, k'_j$, полученная вычитанием j из каждого члена в P. Тогда P и сопряженная система к P' вместе будут самосопряженным разбиением, соответствующим данному разбиению q.

Например, дано разбиение (19 11 7 5). P, P' будут (10 7 6 6) и (6 3 2 2) соответственно. Тогда требуемой самосопряженной системой будет 10, 7, 6, 6, 4, 4, 2, 1, 1, 1. Заметим, что P' можно также получить взятием меньших «половин» заданных частей в обратном, то есть в возрастающем, порядке и вычитанием из них чисел 0, 1, 2,... соответственно.

Переход от данного самосопряженного к соответствующему разбиению на неповторяющиеся нечетные числа – очень простой процесс. Правило таково: берутся числа в убывающем порядке, затем их необходимо удвоить и вычитать из результата последовательные натуральные нечетные числа до тех пор, пока не будет достигнута точка, в которой разница станет отрицательной. Например, самосопряженное разбиение – 6 6 5 4 3 2. Удвоим все числа, то есть получим 12 12 10 8 6 4, и вычтем из них 1, 3, 5, 7, 9, 11 соответственно. Имеем следующее – 11 9 5 1 -3, -7. Таким образом, в результате получим 11 9 5 1 – разбиение на нечетные числа, соответствующее самосопряженному разбиению 6 6 5 4 3 2.

Одно из интереснейших утверждений – так называемая пентагональная теорема, которая занимает особое место не только в творчестве Эйлера по partitio numerorum, но и во всей аддитивной теории разбиений. Изучая производящую функцию $p(n)$ числа разбиений натурального числа n, Эйлер сосредоточил внимание на произведении $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, которое при раскрытии скобок имеет следующий вид:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \\ - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots$$

Показатели степени в правой части – пятиугольные числа, определяемые формулой $n = \frac{3j^2 \pm j}{2}$, где j – целые числа, а знаки при x^n равны $(-1)^j$.

Согласно этому наблюдению Эйлер предположил, что должно быть верно равенство $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j x^{\frac{3j^2 \pm j}{2}}$, представляющее собой суть пентагональной теоремы. То есть если превратить бесконечное произведение $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$.. в ряд, то в нем будут отличны от нуля только слагаемые вида $(-1)^j x^{\frac{3j^2 \pm j}{2}}$, где j – целые числа. Эта теорема была доказана Эйлером только в 1750–1751 гг., через десять лет после того, как он ее сформулировал.

В статье «Конструктивная теория разбиений» Сильвестр привел два доказательства этой теоремы.

Одно из них является, в сущности, графической интерпретацией доказательства Ф. Франклина[1]. Заслуга Франклина состояла в том, что он доказал комбинаторную интерпретацию теоремы Эйлера:

$$p_e(D,n)-p_o(D,n)=\begin{cases}(-1)^j, \textit{ если } n=\dfrac{3j^2 \pm j}{2},\\ 0, \qquad \textit{если } n \neq \dfrac{3j^2 \pm j}{2},\end{cases}$$

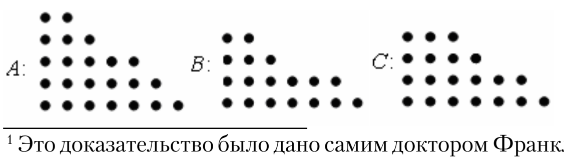
где $p_e(D,n)$ – количество разбиений *n* на четное число различных слагаемых, а $p_o(D,n)$ – количество разбиений *n* на нечетное число различных слагаемых.

Это выражение показывает, что если показатель степени при x^n не является пятиугольным числом, то разность между количеством разбиений на нечетное и четное число частей равна нулю. Тогда слагаемое вида $(-1)^j x^{\frac{3j^2 \pm j}{2}}$ обращается в нуль. Если же показатель – пятиугольное число, то тогда будет на одно больше разбиений на четное или нечетное число, в зависимости от *j*. О том, что теорему можно интерпретировать таким образом, Эйлер знал, но, по всей видимости, доказать не смог. Впоследствии эту формулировку переоткрыл Лежандр.

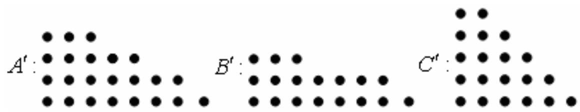
Перейдем к доказательству, предложенному Сильвестром [1, с. 11].

Для этого покажем способ изменения четности количества строк в графе без нарушения его порядка и содержания.

Если правильный граф представляет разбиение с неравными частями, его строки должны непрерывно увеличиваться или уменьшаться. Пусть такими графами будут графы, записанные в порядке возрастания сверху вниз.



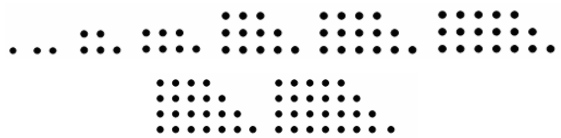
A и *B* могут быть преобразованы без изменения их содержания или порядка путем удаления узлов на вершинах и добавления вместо них новых узлов в наклонной линии в основании. В *C* наклонная линия в основании может быть удалена и превращена в линию новой вершины. Графы будут преобразованы следующим образом:



A' и B' получены из *A*, *B* путем *процесса сжатия*, а C' из *C* путем *процесса вытягивания*. Процессом сжатия Сильвестр называл преобразование графа, при котором точки верхней строки убираются и добавляются по одной к нижним строкам, образующим основание графа, процессом вытягивания – преобразование, состоящее в том, что точки наклонной линии становятся элементами первой строки.

Сжатие не может быть применено к A' и B' и вытягивание к C' без нарушения упорядоченности графа. Однако можно применить обратный процесс, а именно вытягивание, к A' и B' и сжатие к C', чтобы получить первоначальные графы *A*, *B* и *C*.

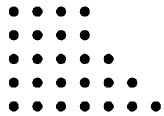
Очевидно, что когда число узлов в вершине меньше или равно числу узлов в наклоне, можно применить сжатие, а когда больше – вытягивание. Эти процессы изменяют число частей от четного к нечетному или от нечетного к четному. Так что, исключая необычные случаи, где невозможно ни сжатие, ни вытягивание, имеем непосредственное соответствие между разбиением *n* на нечетное число и разбиением *n* на четное число неповторяющихся частей. Необычные случаи – это те, где вершина графа встречает наклонную линию основания и содержит или то же самое число, или число большее, чем количество узлов на этой линии. В таком случае ни сжатие, ни вытягивание невозможно. Например, такими графами будут следующие:



Процесс вытягивания не может быть применен к этим графам, так как при удалении узлов в наклонной линии и откладывании их на

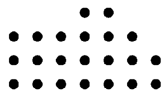
[1] Это доказательство было дано самим доктором Франклином в *Comptes Rendus* of Institute (1880).

вершине вершина потеряет узлы, этого нельзя будет преодолеть с помощью узлов в наклоне. Последний граф, преобразованный вытягиванием, превратится в следующий



Он, хотя и правильный, больше не представляет разбиение на неравные числа.

Узлы в вершине таких графов не могут быть удалены. Преобразованный граф перестанет быть правильным. Например, предпоследний граф станет:



Таким образом, видим, что необычные случаи – это разбиения, в которых количество частей равно *j*, последовательные части образуют первую или вторую из двух арифметических последовательностей

$j, j+1, j+2,...,2j-1$ или $j+1, j+2,..., 2j$.

В таких случаях содержанием графа является $\frac{3j^2-j}{2}$ или $\frac{3j^2+j}{2}$ соответственно.

Так как в результате разложения $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...$ на множители коэффициентом при x^n будет разность между числом способов разложения *n* с четным числом частей и числом способов разложения *n* с нечетным числом частей, результат будет полностью представлен формулой

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)...=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j x^{\frac{3j^2\pm j}{2}}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Используя метод Дарфи, упомянутый выше, Сильвестр получил второе доказательство этой теоремы. Оно является дополнительным и неожиданным результатом исследования совершенно другого вопроса [1, с. 31].

Сильвестр рассмотрел выражение $(1+ax)(1+ax^2)...(1+ax^i)$ и методом Дарфи нашел его разложение.

Для начала предположим *i* неограниченно большим. Рассмотрим граф 

Пусть *j* – количество частей разбиения, а Θ – сторона квадрата Дарфи.

В этом графе $j=5, \Theta=3$, и, таким образом, мы имеем квадрат из 9 точек. Назовем присоединенный граф справа – боковым придатком, а другой присоединенный граф, лежащий ниже квадрата, – расположенным ниже придатком. Содержание графа – 25 точек. 16 точек распределены между придатками. Определим условия, по которым эти 16 точек, а в общем случае $n-\Theta^2$, распределены между придатками.

Сильвестр определил два вида такого распределения. Первый – когда боковой придаток состоит из Θ неповторяющихся частей, ни одна из них не нулевая, а расположенный ниже придаток состоит из $j-\Theta$ неповторяющихся частей, ограниченных числом Θ. Этот вид представлен графом выше.

Следующий граф представляет второй вид распределения.

В нем расположенный ниже придаток состоит из $j-\Theta$ неповторяющихся частей, ограниченных числом $\Theta-1$.

Таким образом, первый вид приводит к распределению $n-\Theta^2$ точек между графом из Θ неповторяющихся, но неограниченных частей и графом из $j-\Theta$ неповторяющихся частей, но ограниченных Θ. Второй вид – к распределению $n-\Theta^2$ между группой из $\Theta-1$ неповторяющихся неограниченных частей и группой из неповторяющихся частей, ограниченных $\Theta-1$.

Число распределений первого вида – это коэффициент при $x^{n-\theta^2}a^{j-\theta}$ в

$$\frac{x^{\frac{\theta^2+\theta}{2}}}{(1-x)(1-x^2)..(1-x^\theta)}(1+ax)(1+ax^3)..(1+ax^\theta).$$

Число распределений второго вида – коэффициент при $x^{n-\theta^2}a^{j-\theta}$ в

$$\frac{x^{\frac{\theta^2-\theta}{2}}}{(1-x)(1-x^2)..(1-x^{\theta-1})}(1+ax)(1+ax^3)..(1+ax^{\theta-1}).$$

Следовательно, сумма всех распределений – коэффициент того же самого аргумента $x^{n-\theta^2}a^{j-\theta}$ в

$$\frac{x^{\frac{\theta^2-\theta}{2}}}{(1-x)(1-x^2)..(1-x^\theta)}\{x^\theta(1+ax^\theta)+$$
$$+(1-x^\theta)\}\{(1+ax)(1+ax^2)..(1+ax^{\theta-1})\}.$$

То есть $x^n a^j$ – это

$$x^{\frac{3\theta^2-\theta}{2}} a^{\theta}\left(\frac{(1+ax)(1+ax^2)..(1+ax^{\theta-1})}{(1-x)(1-x^2)..(1-x^{\theta-1})}\cdot\frac{1+ax^{2\theta}}{1-x^{\theta}}\right).$$

Таким образом, получаем уравнение

$$(1+ax)(1+ax^2)(1+ax^3)..=$$
$$=1+\frac{1+ax^2}{1-x}xa+\frac{(1+ax)(1+ax^4)}{(1-x)(1-x^2)}x^5a^2+...+$$
$$+\frac{(1+ax)(1+ax^2)..(1+ax^{j-1})(1+ax^{2j})}{(1-x)(1-x^2)..(1-x^{j-1})(1-x^j)}x^{\frac{3j^2-j}{2}}a^j+...$$

Если положить $a=-1$, то выражение примет вид

$$(1+ax)(1+ax^2)(1+ax^3)..=$$
$$=1-(1+x)x+(1+x^2)x^5+...+(-1)^j(1+x^j)x^{\frac{3j^2-j}{2}}+...,$$

представляющее собой доказанное утверждение пентагональной теоремы.

Еще раз отметим, что доказательство этого выражения Эйлер искал очень долго. Он нашел два способа доказательства, но первоначально опубликовал только один, видимо, из-за того, что второе было очень громоздким. К тому же при доказательстве ученый использовал лишь операции над рядами, не привлекая разбиения чисел.

Анализируя оба доказательства и сравнивая их с доказательством Эйлера, можно легко увидеть преимущества описанных Сильвестром методов, основанных на графических представлениях разбиений.

Заметим, что графический метод не позволяет выполнять подсчет разбиения натурального числа, но является эффективным для доказательства различных теорем, устанавливающих связь между разбиениями разных видов. Он сформировался в 80-х гг. XIX в., когда разбиения уже интересовали ученых не просто как инструмент для решения других задач, но активно формировалась сама теория разбиений как отдельное математическое направление.

21.05.2010

Список использованной литературы:
1. Sylvester J.J. A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion / J.J. Sylvester // The collection mathematical Papers. Vol. IV. – Cambridge: at the University press, 1912. – P. 1-83.
2. Sylvester J.J. On a discovery in the partition of numbers // The collection mathematical Papers. Vol. 2. Cambridge: at the University press, 1908. P. 86-89.

Сведения об авторе: Медведева Наталья Николаевна, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математики Института естественных наук и математики Хакасского государственного университета им. Н.Ф. Катанова
655017, Республика Хакасия, г. Абакан, ул. Чертыгашева, 118-104 В, тел. (962) 8001634,
e-mail: natalyamedvedev@yandex.ru

Medvedeva N.N.
Development of the graphic method of the additive theory of partitions in the works of J. J. Sylvester
The article examined the history of the development of the graphic method of the additive theory of partitions in the works of English mathematician J. J. Sylvester and its application to the proof of the theorems about the partitions.

The key words: the additive theory of partitions, the history of combinatory analysis, partition, the graphic method of the additive theory of partitions.

Bibliography:
1. Sylvester J.J. A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion / J.J. Sylvester // The collection mathematical Papers. Vol. IV. – Cambridge: at the University press, 1912. – P. 1-83.
2. Sylvester J.J. On a discovery in the partition of numbers // The collection mathematical Papers. Vol. 2. Cambridge: at the University press, 1908. P. 86-89.