УДК 512.554.36

Кучеров А.А., Пихтильков С.А., Пихтилькова О.А.
Оренбургский государственный университет
E-mail: bx24su@yandex.ru, pikhtilkov@mail.ru

О ГОМОЛОГИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНОГО РАДИКАЛА ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБР ЛИ

В работе обсуждается возможность определения локально нильпотентного радикала специальной алгебры Ли в виде пересечения ядер неприводимых представлений, неприводимых *PI*-представлений и конечномерных неприводимых представлений. Показано, что локально нильпотентный радикал специальной алгебры Ли над полем характеристики нуль содержится в пересечениях ядер неприводимых *PI*-представлений и это включение строгое.

Ключевые слова: алгебра Ли, *PI*-представление, неприводимое представление, локально нильпотентный радикал.

На Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008), Борис Исаакович Плоткин поставил вопрос о гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли.

На наш взгляд, гомологическое описание локально нильпотентного радикала специальных алгебр Ли является не менее интересной задачей.

В 1963 г. В.Н. Латышев ввел новый класс алгебр Ли [1], которые он назвал специальными по аналогии с йордановыми алгебрами.

Скажем, что алгебра Ли L специальная или SPI-алгебра Ли, если существует ассоциативная PI-алгебра A, такая, что L вложена в $A^{(-)}$ как алгебра Ли, где $A^{(-)}$ – алгебра Ли, заданная на A с помощью операции коммутирования $[x,y]=xy-yx$.

Назовем PI-представлением алгебры Ли L представление алгебры L в алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}(M)^{(-)}$ модуля M над алгеброй L, для которого ассоциированная алгебра представления $A(L)$ является PI-алгеброй.

Обозначим через $IrrPI(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых PI-представлений алгебры Ли L и саму алгебру L, если их нет.

Обозначим через $IrrFin(L)$ пересечение аннуляторов всех неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли L и саму алгебру L, если их нет.

Локально нильпотентный радикал специальных алгебр Ли является обобщением нильпотентного радикала конечномерных алгебр Ли [2, 3].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. ([3]) *Пусть алгебра Ли L имеет PI-представление в кольце эндоморфизмов векторного пространства M. Тогда:*

i) Все идеалы J алгебры L, такие, что x_M нильпотентно для любого $x \in L$, содержатся в одном из них, например U.

ii) Образ $\overline{U}$ идеала U является локально нильпотентным в алгебре $End(M)$.

iii) Идеал U является множеством элементов $x \in L$, таких, что x_M принадлежит первичному радикалу P ассоциативной алгебры $A(L)$, ассоциированной с представлением алгебры L.

По аналогии с конечномерными алгебрами назовем идеал U наибольшим идеалом локальной нильпотентности представления.

Назовем локально нильпотентным радикалом $N(L)$ специальной алгебры Ли L над полем F пересечение наибольших идеалов локальной нильпотентности всех PI-представлений алгебры Ли L над полем F.

В работе [3] показано, что радикал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным идеалом.

Цель данной работы – исследовать соотношения локально нильпотентного радикала и радикалов $Irr(L)$, $IrrPI(L)$ и $IrrFin(L)$.

Следующие включения непосредственно следуют из определения

$$Irr(L) \subset IrrPI(L) \subset IrrFin(L). \qquad (1)$$

В [4] показана строгость этих включений в общем случае и приведен пример конечномерной алгебры Ли L, для которой включение

$$Irr(L) \subset N(L) \qquad (2)$$

строгое.

Теорема 2. *Для произвольной специальной алгебры Ли L над полем F характеристики нуль имеет место включение* $N(L) \subset IrrPI(L)$, *причем в общем случае это включение строгое.*

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть алгебра Ли L над полем F характеристики нуль имеет PI-представление в алгебре эндоморфизмов* $\mathrm{End}(M)^{(-)}$ *векторного пространства M над F, такое, что L-модуль M – неприводим. Пусть I – некоторый локально разрешимый идеал алгебры Ли L. Тогда образ* $\overline{I}$ *идеала в алгебре* $\mathrm{End}(M)^{(-)}$ *лежит в центре алгебры* $\overline{L}$.

Доказательство. Пусть M - неприводимый $A(L)$-модуль, алгебра $A(L)$ порождена как ассоциативная алгебра гомоморфным образом $\overline{L}$ алгебры Ли L.

Алгебра $A(L)$ является примитивной PI-алгеброй. Согласно теореме Капланского [5] она простая, конечномерная над своим центром Z, изоморфна алгебре матриц над телом $A(L) \cong \Delta_m, m \in N$.

Тогда алгебра $A(L)$ имеет точное неприводимое представление в некотором модуле V размерности n над Z.

Пусть $\overline{Z}$ алгебраическое замыкание.

Конечномерная алгебра $\overline{Z} \otimes_Z A(L)$ над $\overline{Z}$ имеет конечномерное представление в модуле $\overline{Z} \otimes_Z V$, которое может не быть неприводимым.

Рассмотрим композиционный ряд $\overline{Z} \otimes_Z A(L)$-модулей:

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = \overline{Z} \otimes_Z V,$$

в котором каждый фактор $M_k / M_{k-1} (k = 2,...,n)$ – неприводим.

Согласно теореме Ли [2] разрешимая алгебра $\overline{Z} \otimes_Z \overline{L}$ представима треугольными матрицами в некотором базисе модуля M_k / M_{k-1}, а следовательно, и порожденная ей алгебра $\overline{Z} \otimes_Z A(L)$.

Из неприводимости модуля M_k / M_{k-1} над $\overline{Z} \otimes_Z A(L)$ следует $\dim_{\overline{Z}} M_k / M_{k-1} = 1$.

Алгебра $\overline{Z} \otimes_Z \overline{L}$ имеет треугольное представление в некотором базисе модуля $\overline{Z} \otimes_Z V$. Рассуждая так же, как выше, получим $\dim_Z V = 1$.

Следовательно, A(L)= Δ, где Δ тело, конечномерное над Z. Модуль V, неприводимый над телом, одномерен над Δ и конечномерен над Z.

Применим теорию конечномерных алгебр Ли к алгебре $Z \otimes_Z A(L)$.

Образ локально разрешимого идеала $\overline{I}$ является разрешимым идеалом. Если алгебра действует на конечномерное векторное пространство неприводимым образом, то ее разрешимый идеал лежит в центре.

Следовательно, идеал $\overline{I}$ лежит в центре алгебры $\overline{L}$.

Доказательство теоремы. Локально нильпотентный идеал $N(L)$ специальной алгебры Ли L является локально нильпотентным [3].

Пусть алгебра Ли L имеет неприводимое PI-представление в алгебре эндоморфизмов $\varphi : L \to End(M)^{(-)}$ векторного пространства M над полем F.

Тогда согласно лемме 1 $\varphi(N(L)) \supseteq Z(\varphi(L))$.

Алгебра Ли $\varphi(L)$ порождает ассоциативную алгебру A(L). Ее центр $Z(\varphi(L))$ лежит в центроиде неприводимого L-модуля M.

Согласно лемме Шура [5] центроид неприводимого модуля является телом.

Следовательно, ненулевые элементы $\phi(N(L))$ не лежат в наибольшем идеале локальной нильпотентности модуля M. Получили $\varphi(N(L)) = 0$.

Из произвольности неприводимого PI-представления M следует включение $N(L) \subseteq IrrPI(L)$.

Строгость включения следует из примера.

Пример. Пример специальной алгебры Ли L над полем F, $char\, F \neq 2$, такой, что $Irr(L) \neq 0$, локально нильпотентный радикал которой равен нулю.

В частности, $Irr(L)$ радикальная специальная алгебра Ли.

Для алгебры Ли L справедливо строгое включение

$$N(L) \subset Irr(L). \quad (3)$$

Обозначим через B коммутативную алгебру над полем F формальных степенных рядов со свободным членом от одной коммутирующей переменной.

Идеал рядов без свободного члена R – это известный пример коммутативной радикальной алгебры Ли [6].

Рассмотрим алгебру матриц второго порядка B_2 с элементами из B. Известно, что ее радикал Джекобсона $J(B_2)$ равен R_2 [5], [6].

В частности, при гомоморфном отображении φ алгебры B_2 в алгебру эндоморфизмов неприводимого B_2-модуля M справедливо $\varphi(R_2)=0$.

Рассмотрим алгебру Ли $L = B \otimes_F sl_2(F)$, где $sl_2(F)$ – алгебра Ли матриц второго порядка над F со следом нуль. Обозначим через H идеал $H = R \otimes_F sl_2(F)$.

Алгебра L вложена в PI-алгебру B_2 и, следовательно, является специальной.

Пусть $\varphi : L \to End(M)^{(-)}$ – неприводимое PI-представление алгебры L.

Покажем, что тогда модуль M является B-модулем.

Из неприводимости M следует, что любой его элемент представим в виде линейной комбинации элементов $l_1(l_2(...(l_n(m)...)$, где $l_1,...,l_n \in L, m \in M, n > 0$.

Элемент l_1 является линейной комбинацией элементов

$$a_1e_{12} + a_2e_{21} + a_3(e_{11} - e_{22}), a_1, a_2, a_3 \in B.$$

Каждый из элементов $e_{12}, e_{21}, e_{11} - e_{22}$ представим в виде коммутатора элементов алгебры Ли L.

Можно считать, что любой из элементов M представим в виде линейной комбинации элементов $[l_1', l_2''](l_2(...(l_n(m)...)$, где $l_1, l_2, ..., l_n \in L, m \in M$.

Пусть $b \in B$ – произвольный. Определим $b([l_1', l_2''](l_2(...(l_n(m)...) = [l_1', bl_2''](l_2(...(l_n(m)...)$.

Можно проверить, что по отношению к определенному умножению M является B-модулем.

Множество RM является подмодулем M.

Предположим, что $RM \neq 0$. Тогда существует $m \in M, m \neq 0$, такой, что $Rm \neq 0$.

Множество Rm является ненулевым подмодулем M. Следовательно, $Rm=M$.

Существует элемент $r \in R$, такой, что $rm=m$. Элемент r имеет правый квазиобратный $t \in B$. Тогда $r+t-rt=0$.

Получим $0 = (r + t - rt)m = rm + tm - trm = = m + tm - tm = m$. Противоречие с предположением $m \neq 0$.

Мы доказали, что $RM=0$.

Следовательно, $HM=0$.

Мы показали, что H содержится в $Irr(L)$.

Естественный гомоморфизм алгебры L в алгебру $L/H=sl_2(F)$ имеет неприводимое представление.

Мы доказали, что $Irr(L)=IrrPI(L)= =IrrFin(L)=H$.

Пусть K – кольцо частных алгебры B. Тогда $L \subseteq K_2^{(-)}$, которая имеет точное представление в K^2.

Легко проверить, что наибольший идеал нильпотентности такого представления алгебры L равен нулю.

Следовательно, $N(L)=0$.

В работе [4] поставлен вопрос о соотношении между $IrrPI(L)$ и $P(L)$ для произвольной алгебры Ли L.

Следующий вопрос также является естественным: является ли радикал $IrrPI(L)$ локально нильпотентным или локально разрешимым для специальной алгебры Ли?

Теорема 3 дает ответы на эти вопросы.

Теорема 3. *1. Ни одно из включений $IrrPI(L) \subseteq P(L)$ и $P(L) \subseteq IrrPI(L)$ не выполнено в общем случае.*

2. В общем случае $IrrPI(L)$ не является локально разрешимым даже для специальных алгебр Ли.

Доказательство. Строгость включения $IrrPI(L) \subseteq P(L)$ имеет место даже для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Для таких алгебр L справедливо $Irr(L)=N(L)$ [7].

Пусть $L=F_n, n \geq 1$.

Тогда $IrrPI(L)=0, P(L)=\{бE \backslash б \in F, E$ – *единичная матрица порядка* $n\}$.

Для доказательства строгости включения $P(L) \subseteq IrrPI(L)$ воспользуемся примером.

В примере построена специальная алгебра L, такая, что $IrrPI(L) \neq 0$.

Покажем, что $P(L)=0$.

Первичный радикал специальной алгебры Ли локально разрешим. Покажем, что алгебра L не содержит ненулевых локально разрешимых идеалов.

Пусть K – кольцо частных коммутативной алгебры формальных степенных рядов B.

Тогда алгебра $K \otimes_F L$ является простой, конечномерной над K алгеброй Ли. В частности, она не содержит ненулевых локально разрешимых идеалов.

Делаем вывод, что $P(K \otimes_F L)=0$, но тогда $P(L)=0$.

Мы также доказали вторую часть теоремы. Идеал $IrrPI(L) \neq 0$.

В силу простоты алгебры $K \otimes_F L$ идеал $K \otimes_F IrrPI(L) = K \otimes_F L$.

Следовательно, идеал *IrrPI(L)* не является локально разрешимым.

Назовем радикалом Джекобсона алгебры Ли *L* пересечение максимальных идеалов и саму алгебру *L*, если их нет [7].

Отметим, что для конечномерной алгебры Ли над полем характеристики нуль нильпотентный радикал совпадает с радикалом Джекобсона [7].

В работе [4] показано, что нельзя дать естественное гомологическое описание радикала Джекобсона.

Теперь можно сформулировать аналогичное утверждение относительно локально нильпотентного радикала.

Включения (1),(2) и (3) показывают, что нельзя дать характеризацию локально нильпотентного радикала в виде пересечения ядер неприводимых представлений некоторых естественных типов.

4.05.2010

Список использованной литературы:
1. Латышев В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями // Латышев В.Н. – Сиб. мат. журнал. – 1963. – Т. 4. – №4. – С. 821-829.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III) / Бурбаки Н. – М.: Мир, 1976. – 496 с.
3. Пихтильков С.А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли // Пихтильков С. А. – Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 769-782.
4. Кучеров А.А. О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли // Кучеров А.А., Пихтильков С.А., Пихтилькова О.А. – Чебышевский сборник (сдано в печать).
5. Херстейн И. Некоммутативные кольца / Херстейн И. – М.: Мир, 1972. – 192 с.
6. Джекобсон Н. Строение колец / Джекобсон Н. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1961. – 392 с.
7. Marshall E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra // Marshall E. I. – J. London Math. – Soc. 1967. – V. 42. – P. 416-422.

Сведения об авторах:

Кучеров Андрей Андреевич, старший преподаватель кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2240, тел. (3532) 372533, e-mail: bx24su@yandex.ru

Пихтильков Сергей Алексеевич, профессор кафедры алгебры Оренбургского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2431, тел. (3532) 372531, e-mail: pikhtilkov@mail.ru

Пихтилькова Ольга Александровна, доцент кафедры алгебры Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент,
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2431, тел. (3532) 372531, e-mail: Opikhtilkova@tula.net

Kucherov A.A., Pikhtilkov S.A., Pikhtilkova O.A.

On the homologous description of locally nilpotent radical for the special algebras of Lee.

In the work the authors discussed the possibility of determining the locally nilpotent radical of the special algebra of Lee in the form the intersection of the nuclei of irreducible ideas, irreducible PI- ideas and finite-dimensional irreducible ideas. It is shown that the locally nilpotent radical of the special algebra of Lee above the field of characteristic zero is contained into the intersections of the nuclei of irreducible PI- ideas and this part is strict.

The key words: Lee's algebra, PI- idea, irreducible idea, locally nilpotent radical.

Bibliography:
1. Latyshev V.N. On Lie algebras with identities // Latyshev V.N.– Sib. math. journal.– 1963.– V. 4.– P. 821-829.
2. Bourbaki N. Gropes et algebrea de LieГруппы и алгебры Ли (chaptire I-III) / Bourbaki N.– M.: Mir, 1976.– 496 p.
3. Pikhtilkov S.A. On locally nilpotent radical of special Lie algebras// Pikhtilkov S.A.– FPM.– 2002.– V. 8.– P. 769-782.
4. Cucherov A.A. On gomological description of special Lie algebras locally Jacobson radical // Kucherov A.A., Pikhtilkov S.A., Pikhtilkova O.A. – Cheb. Sbornik – to appear.
5. Herstein I. Noncommutative rings / Herstein I.– M.: Mir, 1972.– 192 p.
6. Jacobson N. The structure of rings / Jacobson N.– M.: Foreign literature publishing house,1961.– 392 p.
7. Marshall E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra // Marshall E. I.– J. London Math.– Soc. 1967.– V. 42.– P. 416-422.