УДК 517.944

Ивашкина Г.А.
Оренбургский государственный университет
E-mail: matan@mail.osu.ru

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Задачи со смещение были впервые поставлены А.М. Нахушевым [4]. В данной работе для уравнения $U_{xx}+S_{gny}|y|^m\ U_{yy}+\alpha|y|^{m-1}u_y=0\quad(0<m<2)$ рассмотрена задача со смещением. Доказаны единственность и существование решения.

Ключевые слова: эллиптико-гиперболический тип, единственность, существование решения, сингулярные дифференциальные уравнения.

1. Постановка задачи G.

Рассмотрим уравнение

$$U_{xx}+S_{gn}y|y|^m U_{yy}+\alpha|y|^{m-1}u_y=0\quad(0<m<2),\ (1)$$

где $m-1<\alpha<1$ – постоянная, в области D, ограниченной гладкой кривой Γ с концами в точках $A(0;0)$ и $B(1;0)$, расположенной в полуплоскости $y>0$ и двумя характеристиками уравнения (1)

Задача G. Найти функцию $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup I)\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям

$$U(Q_0(x))+aU(Q_1(x))=\delta(x),$$

$$u|_\Gamma=\varphi(S)\quad\forall S\in\Gamma,0\le S\le l;\qquad(2)$$

причем на линии параболического вырождения (y=0) выполняются следующие условия склеивания

$$U(x;-0)=U(x;+0),\ 0\le x\le1,\qquad(3)$$

$$v(x)=\lim_{y\to-0}(-y)^\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=-\lim_{y\to+0}y^\alpha\frac{\partial u}{\partial y},0\le x\le1,\ (4)$$

где α – некоторая постоянная, $\delta(x)\in C^1(\overline{I})$ и $\delta^u(x)$ – кусочно-монотонная, $\overline{I}$ – отрезок оси $O_x, Q_0(x)$ и $Q_1(x)$ – афориксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x\in[0,1]$, с характеристиками AC и BC соответственно

$$Q_0(x)=\frac{x}{2}-i\left(\frac{2-m}{4}x\right)^{\frac{2}{2-m}};Q_1(x)=\frac{1+x}{2}-i\left(\frac{2-m}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{2-m}}.$$

2. Функциональное соотношение между $T(n)$ и $V(x)$.

В полуплоскости $y<0$ уравнение (1) примет вид в характеристических координатах

$$\xi=x-\frac{2}{z-m}(-y)^{2-\frac{m}{2}},\ \eta=x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}.$$

В характеристических координатах

$$\xi=x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}},\ \eta=x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}$$

преобразуется в уравнение Эйлера - Дарбу

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0,\qquad(5)$$

где $\beta=\frac{2\alpha-m}{2(2-m)}$, $-\frac{1}{2}<\beta<0$ при $m-1<\alpha<\frac{m}{2}$.

Обобщенное решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным данным $U(x,0)=\tau(x)$,

$$\lim_{y\to-0}(-y)^\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta}\lim_{\eta-\xi\to0}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=V(x)$$

представимо в виде

$$U(\xi,\eta)=\int_0^\xi(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}T(t)dt+$$
$$+\frac{1}{2\cos\pi\beta}\int_\xi^\eta(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}T(t)dt-$$
$$-\chi_2\int_\xi^\eta(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}v(t)dt,\qquad(6)$$

где

$$\chi_2=\frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{1-2\beta},$$

$$\tau(x)=\tau(0)+\int_0^x(x-t)^{-2\beta}T(t)dt.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\tau(0)=0$, причем $\tau(x)\in C(\overline{I})\cap C^1(I)$.

Рассмотрим характеристический треугольник: $\xi=0,\eta=1,\eta=\xi$. На линии $\eta=\xi$ берем точку (x,x) и через нее проводим характеристики до пересечения с характеристиками $\xi=0$ и $\eta=1$. Координаты этих точек пересечения будут соответственно $(0;x)$ и $(x;1)$.

Исходя из решения (6), получим

$$U(Q_0(x))=\frac{1}{2\cos\pi\beta}\int_0^x(x-t)^{-\beta}t^{-\beta}T(t)dt-$$
$$-\chi_2\int_0^x(x-t)^{-\beta}t^{-\beta}v(t)dt.\qquad(7)$$

$$U(Q_1(x))=\int_0^x(x-t)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}T(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2\cos\pi\beta}\int_x^1 (t-x)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}T(t)dt-$$

$$-\chi_2\int_x^1 (t-x)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\nu(t)dt. \qquad (8)$$

Подставим (6) и (8) в первое краевое условие (2), продифференцируем его и применим последовательно операторы $D_{ox}^{-\beta}$ и $D_{x_1}^{-\beta}$.

$$x_2x^{-\beta}\nu(x)-x_2a\Bigg(\cos\pi\beta(1-x)^{-\beta}\nu(x)-$$

$$-\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\frac{\nu(t)}{t-x}dt\Bigg)-$$

$$-\frac{1}{2\cos\pi\beta}x^{-\beta}T(x)-a(1-x)^{-\beta}T(x)+$$

$$+\frac{a}{2\cos\pi\beta}(\cos\pi\beta(1-x)^{-\beta}-T(x))-$$

$$-\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\frac{T(t)}{t-x}dt=-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}D_{ox}^{-\beta}\delta'(x), \quad (9)$$

$$\chi_2\left(\cos\pi\beta x^{-\beta}\nu(x)+\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-\beta}\frac{t^{-\beta}\nu(t)}{t-x}dt\right)-$$

$$-\chi_2a(1-x)^{-\beta}\nu(x)-$$

$$-\frac{1}{2\cos\pi\beta}\left(\cos\pi\beta x^{-\beta}T(x)+\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-\beta}\frac{t^{-\beta}T(t)dt}{t-x}\right)+$$

$$+a\left(\cos\pi\beta(1-x)^{-\beta}T(x)+\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\frac{T(t)}{t-x}dt\right)+$$

$$+\frac{a}{2\cos\pi\beta}(1-x)^{-\beta}T(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}D_{x1}^{-\beta}\delta'(x). \quad (10)$$

Умножая равенство (14) на $x^{-\beta}$, а равенство (15) на $a(1-x)^{-\beta}$ и вычитая одно из другого, получим

$$\chi_2\left(x^{-2\beta}-2a\cos\pi\beta x^{-\beta}(1-x)^{-\beta}+a^2(1-x)^{-2\beta}\right)\nu(x)-$$

$$-\frac{1}{2\cos\pi\beta}\left(x^{-2\beta}-a^2(1-x)^{-2\beta}\cos 2\pi\beta\right)T(x)+$$

$$+\frac{a^2\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^1\frac{(1-t)^{-2\beta}T(t)}{t-x}dt=$$

$$=-\frac{x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}D_{ox}^{-\beta}\delta'(x)+\frac{a(1-x)}{\Gamma(1-\beta)}D_{x1}^{-\beta}\delta'(x). \quad (11)$$

Равенство (11) дает первое функциональное соотношение между функциями $T(x)$ и $\nu(x)$, полученное из условия, что решение $U(x,y)$ уравнения (1) в полуплоскости $y<0$ удовлетворяет краевому условию (3).

3. Принцип экстремума и единственность решения задачи G.

Полагая в равенстве (11) $\delta'(x)=0$, получим

$$\chi_2\left(x^{-2\beta}-2a\cos\pi\beta x^{-\beta}(1-x)^{-\beta}+a^2(1-x)^{-2\beta}\right)\nu(x)=$$

$$=\frac{1}{2\cos\pi\beta}\left(x^{-2\beta}-a^2(1-x)^{-2\beta}\cos 2\pi\beta\right)T(x)-$$

$$-\frac{a^2\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^1\frac{(1-t)^{-2\beta}T(t)dt}{t-x}. \qquad (12)$$

Коэффициент, стоящий перед $\nu(x)$, имеет положительный знак. Действительно,

$$x^{-2\beta}-2a\cos\pi\beta x^{-\beta}(1-x)^{-\beta}+a^2(1-x)^{-\beta}=$$

$$=\left(x^{-\beta}-a\cos\pi\beta(1-x)^{-\beta}\right)^2+$$

$$+a^2(1-x)^{-2\beta}(1-\cos^2\pi\beta)>0\,.$$

Определим знак правой части формулы (12) в точке $x=\xi$ положительного максимума функции $\tau(x)$.

Очевидно, что

$$T(x)=\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int_0^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta}\tau'(t)dt=$$

$$=\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\left[\tau(t)(x-t)^{2\beta}\Big|_0^{x-\varepsilon}+2\beta\int_0^{x-\varepsilon}\tau(t)(x-t)^{2\beta-1}dt\right]=$$

$$=\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\left[\tau(x-\varepsilon)\varepsilon^{2\beta}+2\beta\int_0^{x-\varepsilon}\tau(t)(x-t)^{2\beta-1}dt\right]=$$

$$=\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\tau'(x-\varepsilon)\varepsilon^{2\beta}+2\beta\tau(x-\varepsilon)\varepsilon^{2\beta-1}+$$

$$+2\beta(2\beta-1)\int_0^{x-\varepsilon}\tau(t)(x-t)^{2\beta-2}dt\Big]=$$

$$=\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\tau'(x-\varepsilon)\varepsilon^{2\beta}+2\beta\tau(x-\varepsilon)\varepsilon^{2\beta-1}+$$

$$+2\beta(2\beta-1)\int_0^{x-\varepsilon}[\tau(t)-\tau(x)](x-t)^{2\beta-2}dt+$$

$$+2\beta(2\beta-1)\tau(x)\frac{(x-t)^{2\beta-1}}{-(2\beta-1)}\Big|_0^{x-\varepsilon}\Big]=$$

$$=\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\tau'(x)\varepsilon^{2\beta}+2\beta\varepsilon^{2\beta-1}[\tau(x-\varepsilon)-\tau(x)]+$$

$$+[\tau'(x-\varepsilon)-\tau'(x)]\varepsilon^{2\beta}+$$

$$+2\beta(2\beta-1)\int_0^{x-\varepsilon}[\tau(t)-\tau(x)](x-t)^{2\beta-2}dt+2\beta\tau(x)x^{2\beta-1}\Big\}$$

При $x=\xi$ будем иметь

$$T(\xi)=\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\Big[\tau(\xi)\xi^{2\beta-1}+$$

$$+(1-2\beta)\int_0^{\xi}\left(\tau(\xi)-\tau(t)\right)(\xi-t)^{2\beta-2}dt\Bigg]. \qquad (13)$$

Преобразуем следующий интеграл

$$\int_0^1\frac{(1-t)^{-2\beta}T(t)dt}{t-x}\Big|_{x=\xi}=(1-\xi)^{-2\beta}\times$$

$$\times\left\{(1-2\beta)\int_\xi^1[\tau(z)-\tau(\xi)](z-\xi)^{2\beta-2}dz-\tau(\xi)(1-\xi)^{2\beta-1}+\right.$$

$$+(1-2\beta)\cos 2\pi\beta\int_0^{\xi}[\tau(z)-\tau(\xi)](\xi-z)^{2\beta-2}dz-$$

$$\left.-\cos 2\pi\beta\tau(\xi)\xi^{2\beta-1}\right\}. \qquad (14)$$

Найдем сумму двух слагаемых правой части формулы (12), учитывая, что $T(\xi)$ и $I(\xi)$ преобразованы по формулам (12) и (13), где $x=\xi$ – точка положительного максимума функции $\tau(x)$.

$$\frac{1}{2\cos\pi\beta}\left(\xi^{-2\beta}-a^2(1-\xi)^{-2\beta}\cos 2\pi\beta\right)*$$

$$*\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\left\{\tau(\xi)\xi^{2\beta-1}+(1-2\beta)\int_0^{\xi}[\tau(\xi)-\tau(t)](\xi-t)^{2\beta-2}dt\right\}-$$

$$-\frac{a^2\sin\pi\beta}{\pi}(1-\xi)^{-2\beta}\left\{-(1-2\beta)\int_\xi^1[\tau(\xi)-\tau(t)](t-\xi)^{2\beta-2}dt-\right.$$

$$-\tau(\xi)(1-\xi)^{2\beta-1}-$$

$$\left.-(1-2\beta)\cos 2\pi\beta\int_0^{\xi}[\tau(\xi)-\tau(t)](\xi-t)^{2\beta-2}dt-\cos 2\pi\beta\tau(\xi)\xi^{2\beta-1}\right\}=$$

$$=\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\frac{\tau(\xi)}{\xi}+(1-2\beta)\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\xi^{-2\beta}\int_0^{\xi}[\tau(\xi)-\tau(t)](\xi-t)^{2\beta-2}dt+$$

$$+(1-\xi)^{-2\beta}a^2(1-2\beta)\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_\xi^1[\tau(\xi)-\tau(t)](t-\xi)^{2\beta-2}dt+$$

$$+a^2\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\frac{\tau(\xi)}{1-\xi}<0. \qquad (15)$$

Итак, окончательно, исходя из формул (15) и (12), заключаем, что знак $\nu(x)$ отрицательный.

Лемма (принцип экстремума)

Пусть $\delta(x)\equiv 0$, тогда решение $U(x,y)$ задачи G положительный максимум (отрицательный минимум) в замкнутой области $\overline{D^+}$ принимает на кривой Γ.

Доказательство. Внутри области D^+ решение $U(x,y)$ задачи G не может достигать экстремума в силу принципа Хопфа. Предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) в $\overline{D^+}$ достигается в точке $\xi\in I$. Тогда из формулы (17) с учетом (18), (30), (31) и второго условия склеивания (6) $\nu^+(\xi)>0$. Это противоречит принципу Заремба - Жиро, согласно которому, если значение $U(x,y)$ на Γ меньше (больше), чем в точке $(\xi,0)$, то

$$\nu^+(\xi)=\lim_{y\to+0}y^\alpha\frac{\partial u}{\partial y}<0\ (>0).$$

Из принципа экстремума следует, что задача G не может иметь более одного решения.

4. Сведение задачи G к сингулярному интегральному уравнению.

В случае нормальной кривой Γ:

$$y=\left(\frac{2-m}{2}\right)^{\frac{2}{2-m}}[x(1-x)]^{\frac{1}{2-m}}$$

решение $U(x,y)\in C\left(\overline{D^+}\right)\cap C^1\left(D^+\cup I\right)\cap C^2(D^+)$ задачи E_α для уравнения $U_{xx}+y^mU_{yy}+\alpha y^{m-1}uy=0$ с краевыми условиями $U(x,y)\big|_\Gamma=\varphi(s),\quad 0\le s\le l$, $\lim\limits_{y\to+0}y^\alpha u_y=\nu^+(x),\quad 0<x<1$ получено в работе [1], исходя из которого при $y\to+0$ будем иметь второе основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^+(x)$

$$\tau(x)=-k_1\int_0^1\nu^+(z)\left[|t-x|^{-2\beta}-(t+x-2+x)^{-2\beta}\right]dt+\Phi(x), \qquad (16)$$

где

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{2-m}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$

$$\Phi(x)=\frac{k_1m}{2}\left(\frac{2}{2-m}\right)^{2\beta-1}x(1-x)\int_0^1\varphi_1(t)\frac{[t(1-t)]^{\beta-\frac{1}{2}}dt}{\left[x^2+(1-2x)t\right]^{\beta+1}} \qquad (17)$$

$$\varphi(s)=u(\xi(s),\eta(s))\Big|_\Gamma=u\left(x;\left[\frac{4}{(2-m)^2}x(1-x)\right]^{\frac{1}{2-m}}\right)=\varphi_1(x).$$

В 3 было доказано, что если решение задачи G существует, то оно единственно. Вопрос о существовании решения сводится к вопросу о разрешимости системы (16), (11).

Учитывая, что в функциональное соотношение (11) входит функция

$$T(x)=\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{2\beta}\tau'(t)dt,$$

определим ее из соотношения (16)

$$\tau'(x)=k_1 2\beta\left[-\int_0^x\nu(z)(x-z)^{-2\beta-1}dz+\int_x^1\nu(z)(z-x)^{-2\beta-1}dz+\right.$$

$$+\int_0^1 v(z)(x+z-tz)^{-2\beta-1}(1-2z)dz\Bigg]+\Phi'(x)$$

(здесь $v^+(z)$ заменено на $-v(z)$).

Тогда

$$T(x)=k_1\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\frac{d}{dx}\Big[-\int_0^x (x-t)^{2\beta}dt\int_0^t v(z)(t-z)^{-2\beta-1}dz+$$

$$+\int_0^x (x-t)^{2\beta}dt\int_t^1 v(z)(z-t)^{-2\beta-1}dz+$$

$$+\int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}dt\int_0^1 v(z)(t+z-2tz)^{-2\beta-1}(1-2z)dz\Big]+$$

$$+\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-z)^{2\beta}\Phi'(z)dz. \qquad (18)$$

Выполняя ряд несложных преобразований над интегралами, входящими в формулу (18), получим

$$T(x)=2k_1 v(x)\sin^2\pi\beta+k_1\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\int_0^1 v(z)\left(\frac{z}{x}\right)^{-2\beta} *$$

$$*\left(\frac{1}{z-x}+\frac{1-2z}{z+x-2zx}\right)dz+$$

$$+\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-z)^{2\beta}\Phi'(z)dz. \qquad (19)$$

С помощью найденного по формуле (19) выражения для функции $T(x)$ преобразуем интеграл, входящий в (11)

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}}{t-x}T(t)dt=2k_1\sin\pi\beta\int_0^1\frac{(1-t)^{-2\beta}}{t-x}v(t)dt+$$

$$+k_1\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\int_0^1\frac{(1-t)^{-2\beta}}{t-x}dt\int_0^1 v(z)\left(\frac{z}{t}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{z-t}+\frac{1-2z}{t+z-2tz}\right)dz+$$

$$+\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\int_0^1\frac{(1-t)^{-2\beta}}{t-x}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-z)^{2\beta}\Phi'(z)dz \qquad (20)$$

$$I^*=\frac{k_1\sin 2\pi\beta}{\pi}(1-x)^{-2\beta}\int_0^1\left(\frac{1-t}{t-x}\right)^{-2\beta}\frac{dt}{t-x}\int_0^1 v(z)\left(\frac{z}{t}\right)^{2\beta} *$$

$$*\left(\frac{1}{z-t}+\frac{1-2z}{t+z-2tz}\right)dz.$$

По формуле Пуанкаре - Бертрана изменение порядка интегрирования дает выброс в виде $-\pi^2 v(x)$, т. е.

$$I^*=\frac{k_1\sin 2\pi\beta}{\pi}(1-x)^{-2\beta}\Big[-\pi^2 v(x)+(1-x)^{2\beta} *$$

$$*\int_0^1 v(z)z^{-2\beta}dz\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\frac{1}{t-x}\left(\frac{1}{z-t}+\frac{1-2z}{t+z-2tz}\right)dt\Big]=$$

$$=-k_1\sin 2\pi\beta(1-x)^{-2\beta}\pi v(x)+\frac{2k_1\sin 2\pi\beta}{\pi}\int_0^1 v(z)z^{1-2\beta}(1-z)dz *$$

$$*\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\frac{1}{(t-x)(z-t)(t+z-2tz)}dt=-\frac{2k_1\sin 2\pi\beta}{\pi} *$$

$$*\int_0^1\frac{v(z)z^{1-2\beta}(1-z)}{z-x}dz\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\frac{1}{(t+z-2tz)(x-t)}dt+$$

$$+\frac{2k_1\sin 2\pi\beta}{\pi}\int_0^1\frac{v(z)z^{1-2\beta}(1-z)}{z-x}dz *$$

$$*\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\frac{1}{(t+z-2tz)(z-t)}dt=$$

$$=-\frac{2k_1\sin 2\pi\beta}{\pi}\int_0^1\frac{v(z)z^{1-2\beta}(1-z)}{(x+z-2xz)(z-x)}dz *$$

$$*\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{x-t}+\frac{1-2z}{t+z-2+z}\right)dt+$$

$$+\frac{k_1\sin 2\pi\beta}{\pi}\int_0^1\frac{v(z)z^{-2\beta}dz}{z-x}\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{z-t}+\frac{1-2z}{t+z-2tz}\right)dt \qquad (21)$$

Рассмотрим внутренние интегралы

$$\mathrm{I}\quad\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{x-t}+\frac{1-2z}{t+z-2tz}\right)dt=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\frac{1}{x-t}dt+\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1-2z}{t+z-2tz}\right)dt=$$

$$=-\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\left[1-\left(\frac{1-x}{x}\right)^{-2\beta}\cos 2\pi\beta\right]+\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\left[1-\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta}\right]=$$

$$=\pi\left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^{-2\beta}ctg 2\pi\beta-\frac{1}{\sin 2\pi\beta}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta}\right). \qquad (22)$$

$$\mathrm{II.}\quad\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1}{z-t}+\frac{1-2z}{t+z-2tz}\right)dt=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\frac{dt}{z-t}+\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-2\beta}\left(\frac{1-2z}{t+z-2tz}\right)dt=$$

$$=-\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}+\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta}ctg 2\pi\beta+\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}-\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta}=$$

$$=-\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta}\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}(1-\cos 2\pi\beta)=$$

$$=-\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta}\frac{\pi}{2\sin\pi\beta\cos\pi\beta}2\sin^2\pi\beta=-\pi tg\pi\beta\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta}. \qquad (23)$$

Подставим (22) и (23) в (21)

$$= -\frac{\pi}{\sin 2\pi\beta} + \left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta} ctg 2\pi\beta + \frac{\pi}{\sin 2\pi\beta} - \frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta} =$$

$$= -\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta} \frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}(1-\cos 2\pi\beta) =$$

$$= -\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta} \frac{\pi}{2\sin\pi\beta\cos\pi\beta} 2\sin^2\pi\beta = -\pi tg\pi\beta\left(\frac{1-z}{z}\right)^{-2\beta}.$$

Тогда формула (20) примет следующий вид

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}T(t)dt}{t-x} = -k_1\left(\frac{1-x}{x}\right)^{-2\beta}\cos 2\pi\beta\, *$$

$$* \int_0^1 v(z) z^{-2\beta}\left(\frac{1}{z-x}\frac{1-2z}{z+x-2zx}\right)dz +$$

$$+ k_1\int_0^1 v(z)(1-z)^{-2\beta}\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1-2z}{z+x-2zx}\right)*$$

$$* \, dz - k_1\pi\sin 2\pi\beta(1-x)^{-2\beta}v(x) +$$

$$+ \frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}}{t-x}dt\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\xi)^{2\beta}\Phi'(\xi)d\xi. \quad (24)$$

Подставляя (24) и (19) в функциональное соотношение (11), после несложных преобразований получим

$$\left[(x_2\cos\pi\beta - k_1\sin^2\pi\beta)x^{-2\beta} - 2a\cos^2\pi\beta x^{-\beta}(1-x)^{-\beta}x_2 + \right.$$

$$+ a^2\left(\cos\pi\beta x_2 + k_1\cos 2\pi\beta\sin^2\pi\beta - k_1\sin\pi\beta\sin 2\pi\beta\cos\pi\beta\right)*$$

$$\left. * \,(1-x)^{-2\beta}\right]v(x) -$$

$$- k_1\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi}\int_0^1 v(z)z^{-2\beta}\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1-2z}{z+x-2zx}\right)*$$

$$* \, dz + \frac{a^2\sin 2\pi\beta}{2\pi}k_1\int_0^1 v(z)(1-z)^{-2\beta}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1-2z}{z+x-2zx}\right)dz = F(x), \quad (25)$$

где

$$F(x) = \left(x^{-2\beta} - a^2(1-x)^{-2\beta}\cos 2\pi\beta\right)*$$

$$* \frac{\sin\pi\beta\cos\pi\beta}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-z)^{2\beta}\Phi'(z)dz -$$

$$- \frac{a^2\sin^2\pi\beta\cos^2\pi\beta}{\pi^2\beta}\int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}dt}{t-x}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-z)^{2\beta}\Phi'(z)dz -$$

$$- \frac{x^{-\beta}\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}D_{ox}^{-\beta}\delta^1(x) + \frac{a^2(1-x)^{-\beta}\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}D_{x_1}^{-\beta}\delta'(x). \quad (26)$$

Учитывая, что $\chi_2 = k_1 tg\pi\beta$, уравнение (25) можно представить в виде

$$(x^{-2\beta} + a^2(1-x)^{-2\beta} - 2a\lambda x^{-\beta}(1-x)^{-\beta})v(x) +$$

$$+ \frac{\lambda}{\pi}\int_0^1 v(z)\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1-2z}{z+x-2zx}\right)k(z)dz =$$

$$= F(x)\frac{1}{k_1\sin\pi\beta(1-\sin\pi\beta)}, \quad (27)$$

где $\lambda = \dfrac{\cos\pi\beta}{1-\sin\pi\beta}$, $k(z) = a^2(1-z)^{-2\beta} - z^{-2\beta}$.

Из единственности следует разрешимость уравнения (27).

12.05.2010

Список использованной литературы:

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: «Высшая школа», 1985. С. 241-260.
2. Ивашкина Г.А., Невоструев Л.М. // Дифференциальные уравнения, 14, №2, Минск, 1978, с. 137-143.
3. Нахушев А.М. // Дифференциальные уравнения, Минск, 5, №1, 1969, с. 90-96.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962. С. 235-244.
5. Hardy G., Liltlewood I., Some properties of fractional integrals I, Math.Z. 27,4, 1928. C. 565-606.
6. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений /Рыжик И.М. М., 1962. С. 298-306.

Сведения об авторе:

Ивашкина Галина Андреевна, доцент кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2240, тел. (3532)372576, e-mail: matan@mail.osu.ru

Ivashkina G.A.

On one boundary-value problem with the displacement for mixed elliptical-hyperbolic type equations

Tasks with displacement were for the first time set by Nakhushev A.M. [4]. In this work task with the displacement is examined. Uniqueness and existence of the solution are proved.

The key words: elliptical-hyperbolic type, uniqueness, existence of the solution, singular differential equations.

Bibliography:

1. Smirnov MM The equations of mixed type. M.: «High School», 1985. S. 241-260.
2. Ivashkina GA, Nevostruev LM / / Differential Equations, 14, № 2, Minsk, 1978, pp. 137-143.
3. Nakhushev AM / / Differential Equations, Minsk, 5, № 1, 1969, pp. 90-96.
4. Muskhelishvili NI Singular integral equations. Fizmatgiz, 1962. S. 235-244.
5. Hardy G., Liltlewood I., Some properties of fractional integrals I, Math.Z. 27,4, 1928. S. 565-606.
6. Gradshtein IS Tables of integrals, sums, series and products / Ryzhik IM M., 1962. S. 298-306.