УДК 37.016:51

Зубова И.К., Рассоха Е.Н.
Оренбургский государственный университет
E-mail: cabin@house.osu.ru

ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ ВЫПУКЛОСТИ И ВОГНУТОСТИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Рассмотрены три определения понятия выпуклости и вогнутости графика функции с помощью метода касательных, хорд и аналитического метода. Показаны исторические условия их формирования с позиции развития дифференциального исчисления. Предложена схема изложения данной темы студентам физико-математических специальностей.

Ключевые слова: выпуклость (вогнутость) графика функции; непрерывность функции; дифференцируемость функции; касательная прямая; секущая прямая; хорда.

Понятия выпуклости и вогнутости графика функции имеют большое значение в исследовании ее поведения. Ознакомившись с этими понятиями, студент существенно упрощает процесс полного исследования функции, построения ее графика.

Анализируя ряд учебников по математическому анализу, как для инженерно-технических, так и для физико-математических специальностей, можно заметить, что авторы не склонны к единому подходу в определении данных понятий.

В некоторых учебниках для инженерно-технических специальностей понятия выпуклости и вогнутости вводят только как определение 1 или определение 2.

Определение 1. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (вогнутым вниз) в данном промежутке, если он целиком расположен ниже (выше) касательной в его произвольной точке.

Определение 2. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (вогнутым вниз) в данном промежутке, если каждая хорда (кроме ее концов) лежит ниже (выше) соответствующей части графика этой функции.

Многие авторы учебников для физико-математических специальностей определяют эти понятия только с аналитической точки зрения (определение 3), указывая, что определения 1 и 2 – это есть свойства выпуклости и вогнутости графика функции, или их геометрический смысл.

Определение 3. График функции $y = f(x)$, определенной на интервале (a,b), называется выпуклым вверх в данном интервале, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a,b)$ и любого числа $t \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \qquad (1)$$

в частности, если имеет место неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \qquad (2)$$

Вогнутость вниз определяется аналогично, но при этом изменяется знак неравенства на противоположный.

На наш взгляд, как первый, так и второй подходы обедняют математические знания студентов.

Данные понятия формировались вместе с развитием дифференциального исчисления. Поэтому, чтобы найти оптимальные способы изложения указанной темы, рассмотрим некоторые моменты предыстории формирования дифференциального исчисления. Прежде всего обозначим те прикладные задачи, решение которых способствовало появлению первых понятий этого исчисления. К таким задачам относятся:

1) задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции;

2) задача о проведении касательной к кривой.

Решению первой задачи посвящена работа Пьера Ферма (1601–1665) «Метод исследования наибольших и наименьших». Содержание этой работы впервые стало известно из писем Ферма, в которых вопросы, связанные, как мы говорим сейчас, с отысканием экстремума функции, начинают обсуждаться с 1629 года. Частично эта работа была опубликована в 1642–44 гг., а полностью – уже после смерти Ферма, в 1679 году.

Правило, предложенное Ферма, рассмотрим на следующем примере: рассечь данный отрезок АС точкой В так, чтобы объем параллелепипеда, у которого в основании будет лежать квадрат, построенный на отрезке АВ, а высота равна отрезку ВС, был наибольшим. Рассмотрим рисунок 1.

Пусть $AC = b$, $AB = a$, тогда объем параллелепипеда, равный $V = a^2(b-a)$, должен быть максимальным. Заменим в этом выражении a на $a+E$. На современном языке математического анализа это прозвучало бы как «придадим a приращение E». При такой замене объем будет равным $V = (a+E)^2(b-a-E)$. Этот новый объем Ферма условно приравнивает к старому.

Мы здесь сказали бы, что приращение E независимой переменной a стремится к нулю. Но у Ферма еще не было такой терминологии, поскольку не было и понятия предела! Поэтому он считает, что два объема «как бы» равны, то есть $(a+E)^2(b-a-E) = a^2(b-a)$. Проделаем алгебраические преобразования.

$$(a^2+2aE+E^2)(b-a-E) = a^2(b-a);$$

$$a^2(b-a)+(2aE+E^2)(b-a)-(a+E)^2E = a^2(b-a);$$

$(2a+E)(b-a)E-(a+E)^2E = 0$; т. к. $E \neq 0$, то можно разделить на E.

$$2a(b-a)+E(b-a)-(a+E)^2 = 0;$$

$$2a(b-a)-a^2+E(b-a-E)-2aE = 0.$$

Уничтожим те слагаемые, которые содержат множитель E. По какому праву мы это делаем? Мы сказали бы: «Потому что E стремится к нулю». В результате получим: $2a(b-a)-a^2 = 0$. Тогда, выражая a из последнего равенства, можно записать ответ: $a = \frac{2}{3}b$. Если провести до конца аналогию с современным рассуждением, то получим:

$$f(a+E) \approx f(a) \Rightarrow f(a+E)-f(a) \approx$$

$$\approx 0 \Rightarrow \frac{f(a+E)-f(a)}{E} \approx 0.$$

Перейдем к пределу при $E \to 0$: $\lim\limits_{E\to 0}\frac{f(a+E)-f(a)}{E} = f'(a) = 0$. Получили необходимое условие экстремума.

Ферма не оговаривает специально, но, несомненно, имеет в виду, что величина E играет роль «очень малого приращения» независимой переменной a.

В этой же работе он упоминает о том, что аналогичным методом можно решить и задачу о проведении касательной к кривой. Это вторая задача, с которой тесно связано появление дифференциальных методов. Рассмотрим подробнее метод, предложенный Ферма для ее решения.

Кривая задана уравнением $y = f(x)$. Для малой дуги этой кривой проведем секущую SMN. Обратимся к рисунку 2.

Точка S – точка пересечения секущей с осью координат (она у Ферма была одна). Треугольник MNP называется характеристическим треугольником. Этот треугольник подобен треугольнику SMR. Следовательно, $\frac{SR}{MP} = \frac{MR}{NP}$, или $SR = \frac{MR \cdot MP}{NP}$. Это равенство в привычных для нас терминах дифференциального исчисления будет выглядеть так: $SR = \frac{f(x)\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}$.

Затем Ферма переходит от секущей к касательной, полагая Δx или MP «как бы равным нулю», и получает, что отрезок ST «как бы равен» произведению $MR\frac{MP}{NP}$. Мы здесь сказали бы, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)} = \frac{f(x)}{f'(x)}$, или $f(x) = QT = f'(x)ST = ST \cdot tg\alpha$ (см. рисунок 3).

Таким образом, познакомив студентов с этими историческими сведениями, мы сможем добиться лучшего понимания геометрического смысла производной функции в точке, лучшего усвоения правил отыскания точки экстремума функции, лучшего запоминания теоремы Ферма, тесно связанной с необходимым условием существования экстремума. Кроме того, мы сумеем показать, что и понятия выпуклости и вогнутости графика функции формировались в тесной связи с задачами о касательных и секущих кривой.

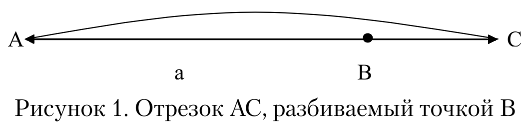

Рисунок 1. Отрезок AC, разбиваемый точкой B

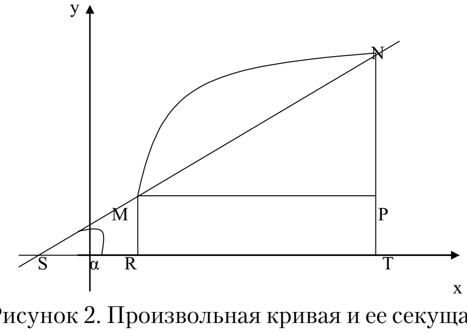

Рисунок 2. Произвольная кривая и ее секущая, заданные в системе координат

После этого, на наш взгляд, целесообразно на занятиях по данной теме давать все три определения выпуклости и вогнутости графика функции в промежутке. При этом обязательно указать, что каждое сформулированное условие охватывает некоторый класс функций. Например, при формулировке первого определения показываем, что функция обязательно должна быть дифференцируемой. Если, например, рассмотреть функцию $y = a^{|x|}$ в интервале $(-\infty;+\infty)$, ее график будет выпуклым и по методу определения с помощью хорды, и по аналитическому методу, между тем как метод касательных здесь не применим, т. к. $f'(0)$ не существует.

Итак, при изложении данной темы можно придерживаться следующей схемы. Сформулировать три определения выпуклости (вогнутости) графика функции. Причем в третьем определении можно отметить, что простейшим случаем неравенства (1) является неравенство (2). Функция, удовлетворяющая неравенству (2), удовлетворяет и неравенству (1), но класс функций, удовлетворяющих неравенству (1), шире. Геометрически неравенство (2) означает, что середина любой хорды кривой лежит под этой кривой, при этом в качестве кривой понимается любой, но не обязательно непрерывный график функции.

После такого изложения формулировок определений для студентов физико-математических специальностей можно сформулировать и доказать для класса непрерывных на интервале (a,b) функций следующую теорему.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то определения 2 и 3 выпуклости графика функции $y = f(x)$ эквивалентны.

Доказательство. Доказательство проведем для случая вогнутости вниз графика функции. Пусть $y = f(x)$ вогнутая функция в интервале (a,b) в смысле определения 2. Докажем, что $y = f(x)$ вогнутая в смысле определения 3, то есть имеет место неравенство (1).

Возьмем две произвольные точки x_1, x_2 из интервала (a,b), так что будет выполняться неравенство: $a < x_1 < x_2 < b$. Через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ проведем прямую, как на рисунке 4.

Так как $f(x)$ имеет вогнутый график по определению 2 в интервале (a,b), то хорда AB лежит выше соответствующей части графика. Пусть x^* некоторая точка, лежащая в интервале (x_1, x_2). Тогда из неравенства $x_2 - x^* < x_2 - x_1$ следует, что $x_2 - x^* = t(x_2 - x_1)$, где t есть некоторое число $0 < t < 1$.

Отсюда будем иметь:

$$x^* = tx_1 + (1-t)x_2.$$

Следовательно, $DE = f(x^*) = f(tx_1 + (1-t)x_2)$.

Из того, что $\Delta AMC \sim \Delta CBN$, получим:

$$\frac{CE - f(x_1)}{f(x_2) - CE} = \frac{(1-t)(x_2 - x_1)}{t(x_2 - x_1)}.$$

Из этого равенства следует, что

$CE = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Из вогнутости графика функции $f(x)$ по определению 2 следует, что $DE < CE$, то есть

$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Поскольку x^* произвольная точка, то первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь обратное утверждение. Предположим, что для функции $f(x)$ в интервале (a,b) выполняется неравенство (2). Покажем, что $f(x)$ имеет вогнутый вниз график в смысле определения 2, то есть каждая хорда лежит выше соответствующей части графика данной функции. Предположим противное. Пусть график функции $f(x)$ не является вогнутым вниз в смысле определения 2. Тогда найдется такой интервал (α, β), содержащийся в (a,b),

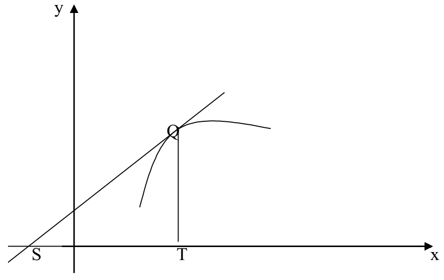

Рисунок 3. Произвольная кривая и ее касательная в точке Q, заданные в системе координат

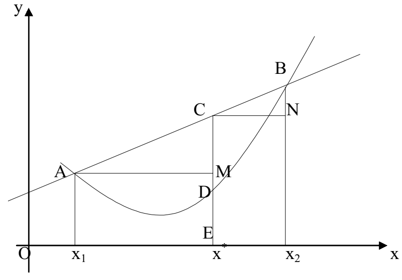

Рисунок 4. Произвольная вогнутая вниз кривая, заданная в системе координат

что дуга кривой $f(x)$ будет лежать выше хорды, проходящей через точки $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$. Пусть $y = g(x)$ – уравнение прямой, проходящей через эти точки. Тогда должно иметь место неравенство:

$$f(x) > g(x), \quad \forall x \in (\alpha, \beta). \qquad (3)$$

Очевидно, что для функции $y = g(x)$ имеет место равенство:

$$g(\alpha) + g(\beta) = 2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \qquad (4)$$

Напомним, что по условию будем иметь:

$$f(\alpha) = g(\alpha), \quad f(\beta) = g(\beta).$$

Следовательно, в силу (2) и (4) получим следующее:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} = \frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2} = g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

то есть

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Последнее неравенство противоречит условию (3). Наше предположение оказалось неверным. <

Для доказательства эквивалентности определений 1, 2 и 3 можно доказать сначала следующую теорему.

Теорема 2. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет график, вогнутый вниз, по определению 3 на интервале (a,b), то ее производная $f'(x)$ возрастает на этом интервале.

Доказательство. Из соотношения $x = tx_1 + (1-t)x_2$ можно выразить:

$$t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

Тогда неравенство (1) можно записать в виде:

$$f(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

или

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_2) f(x_2) > 0.$$

Учитывая, что график функции вогнут в смысле определения 3 на заданном интервале, получим:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (5)$$

при $x_1 < x < x_2$, и $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$.

Устремляя x в неравенстве (5) последовательно к x_1 и к x_2, получим:

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2),$$

что устанавливает монотонность производной функции $y = f(x)$.

Учитывая это для выпуклой функции по определению 3, а также используя теорему Лагранжа, найдем:

$$f'(x_1) \le f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} =$$
$$= f'(\xi_2) \le f'(x_2),$$

при $x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$.

Последнее неравенство означает, что $f'(x)$ возрастающая функция на интервале (a,b). <

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), то определения 1, 2, 3 выпуклости (вогнутости) графика функции $y = f(x)$ эквивалентны.

Доказательство. Учитывая теорему 1, достаточно доказать эквивалентность определений 1 и 3.

Пусть график функции $f(x)$ является вогнутым вниз на интервале (a,b) в смысле определения 3. Докажем, график функции $f(x)$ является вогнутым вниз и по определению 1.

Выберем произвольную точку x_0 на интервале (a,b). Тогда уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ будет иметь вид:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

поэтому

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

где ξ – точка, находящаяся между x и x_0. Так как на соответствующем участке график функции $y = f(x)$ вогнут вниз в смысле определения 3, то по теореме 2 функция $f'(x)$ возрастает на этом участке и знак разности $f'(\xi) - f'(x_0)$ совпадает со знаком $x - x_0$, поэтому $f(x) - y(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. Это означает вогнутость вниз графика функции $f(x)$ на интервале (a,b) и по определению 1.

Докажем теперь и обратное утверждение. Если $f(x) - y(x) > 0$, $\forall x,\, x_0 \in (a,b)$ имеет место неравенство

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0,$$

то получим

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0), \text{ при } x < x_0,$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) \text{ при } x > x_0.$$

Таким образом, $\forall\, x, x_1, x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x < x_2$, получим

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Последнее неравенство – это есть неравенство (5), полученное из неравенства (1), что доказывает эквивалентность определений 1 и 3. <

Итак, предложенная методика изложения материала по теме выпуклости и вогнутости графика функции на промежутке, как показывает многолетний опыт работы, дает высокие результаты в качестве освоения данной темы, что означает ценность и полезность данной работы.

12.05.2010

Список использованной литературы:

1. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу: учеб. для вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков; под ред. В.А. Садовничего. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с. – ISBN 5-7107-8900-3.
2. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX-X кл. – М.: «Просвещение», 1983. – 351 с.
3. Гусак А.А. Высшая математика. В 2-х т. Т.1.: Учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 448 с. – ISBN 985-6577-33-0 (Т.1).
4. Насибов М.Х. Об изложении определения понятия выпуклости и вогнутости функции / М.Х. Насибов // Сборник научно-методических статей по математике. Вып. 16. – М.: Изд-во МПИ, 1989. – С. 112-116.
5. Рыбников К.А. История математики: Учебное пособие для университетов / К.А. Рыбников. – М.: Изд. МГУ, 1994. – 456 с.
6. Рыбников К.А. Возникновение и развитие математической науки: книга для учителей / К.А. Рыбников. – М.: Просвещение, 1987. – 159 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие для университетов и педагогических институтов: в 3-х т. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 608 с.

Сведения об авторах:

Зубова Инна Каримовна, доцент кафедры математического анализа
Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2240, тел. (3532)372535, e-mail: matan@mail.osu.ru

Рассоха Елена Николаевна, доцент кафедры математической кибернетики
Оренбургского государственного университета, кандидат педагогических наук
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, тел. (3532)372535,e-mail: cabin@house.osu.ru

Zubova I.K., Rassokha E.N.
Approaches to the determination of convexity and concavity of plotted function.
The authors examined three determinations of the concept of convexity and concavity of plotted function with help of the method of tangents, chords and analytical method. The historical conditions for their formation are shown from the position of the development of differential calculus. The diagram of the account of this theme is offered to the students of physico-mathematical specialties.

The key words: the convexity (concavity) of plotted function; the continuity of function; the differentiability of function; tangential straight line; secant straight line; chord.

Bibliography:

1. Arkhipov G.I. Lectures on mathematical analysis: textbook for institutions of higher education / G.I. Arkhipov, V.A. Sadovnichiy, V.N. Chubarikov; ed. V.A. Sadovnichiy. – M.: Drofa, 2004. – 640 p. – ISBN 5-7107-8900-3..
2. Gleizer G.I. History of mathematics at school. IX-X classes. – M: «Prosveshchenie», 1983. – 351 p.
3. Gusak A.A. Higher mathematics. In 2 vol. V. 1.: textbook for students of institutions of higher education / A.A. Gusak. – Mn.: TetraSistems, 2001. – 448 p. – ISBN 985-6577-33-0 (V.1).
4. Nasibov M.Kh. About presentation of determination of the concepts of function convexity and concavity / M.Kh. Nasibov // Collection of scientific-methodological articles of mathematics. Issue 16. – M.: Publishing house MPI, 1989. – P. 112-116.
5. Rybnikov K.A. History of mathematics: teaching aid for universities / K.A. Rybnikov. – M.: Publishing house of MSU, 1994. – 456 p.
6. Rybnikov K.A. Origin and development of mathematical science: book for teachers / K.A. Rybnikov. – M.: Prosveshchenie, 1987. – 159 p.
7. Fikhtengolts G.M. Course of differential and integral calculus: teaching aid for universities and teacher’s training institutes: in 3 vol. / G.M. Fikhtengolts. – M.: Nauka, 1969. –V. 1. – 608 c..