

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ ОТРАСЛИ

В данной работе предложена динамическая модель поведения предприятий телекоммуникационной отрасли в виде системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. На базе реальных данных объема абонентской базы и тарифной политики операторов сотовой связи определены параметры представленной модели. Численно решена задача оптимального управления поведением предприятий с учетом запаздывания.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальные уравнения с запаздыванием, оптимальное управление, идентификация параметров, принцип максимума Понтрягина.

Телекоммуникационная отрасль относится к важнейшим секторам, которые обеспечивают функционирование и согласованную работу всех отраслей экономики. Без современной национальной телекоммуникационной инфраструктуры России невозможно ее вхождение в мировое экономическое и информационное пространство.

Российская отрасль информационно-коммуникационных технологий при существующих темпах развития занимает пятое место в Европе по объему предоставляемых услуг. При этом динамика роста составляет порядка 30% в год, тогда как в Европе этот показатель составляет 3,5–4% ежегодно.

По прогнозам консалтинговой компании J&P, российский рынок информационных технологий в 2010 году удвоится, а к 2015 году вырастет более чем в четыре раза. Потребность населения в телекоммуникационных услугах ежегодно растет, что определяет необходимость дальнейшего качественного развития операторов связи и соответственно ставит перед ними задачу эффективного реагирования на изменение состояния внешней среды.

Важнейшим фактором, характеризующим конкурентоспособность операторов связи, является емкость системы связи, определяемая числом потенциальных абонентов. Поэтому весьма актуальной представляется задача разработки эффективного механизма управления стратегией развития предприятий телекоммуникационной отрасли [1].

В рамках задачи разработки стратегии развития и оптимального управления поведением операторов связи в условиях конкурентной борьбы за общие ресурсы (в данном случае это

пользователи услуг) важное место занимает разработка математической модели данного процесса.

Для этой цели рассмотрим n конкурирующих фирм, предоставляющих услуги сотовой связи, которые существуют в одной экономической нише, т. е. с общими трудовыми и природными ресурсами и общими потребителями сотовой связи (абонентами). Предположим, что рассматриваемые фирмы не являются монополистами и что услуга незамещаема.

Обозначим через $x_i(t)$ – число абонентов i -го оператора сотовой связи в момент времени t . Предположим, что в отсутствие конкурентов число абонентов i -й фирмы растет экспоненциально с коэффициентом прироста ε_i ($\varepsilon_i > 0$), т. е.

$$x_i(t) = x_{i0} \cdot \exp(\varepsilon_i t), \quad (1)$$

где x_{i0} – число абонентов i -го оператора сотовой связи в начальный момент времени.

Принимая во внимание эффект насыщения на рынке, где услуги сотовой связи продаются, уравнение (1) примет вид:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t)[\varepsilon_i - \gamma_{ii}x_i(t)] \quad (2)$$

Наличие конкурентов на рынке сотовой связи, развивающихся с подобными динамическими уравнениями, меняет вид уравнения, поскольку кроме естественного прироста следует учесть и убыль числа абонентов в силу влияния конкурирующих фирм. Следовательно, их общая динамика может быть выражена следующей системой уравнений:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) \left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k(t) \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $\gamma_{ik}, k = 1, \dots, n$ – коэффициент взаимного влия-

ния i -го и k -го предприятий, предоставляющих услуги сотовой связи [7].

Очевидно, что система (3) не отражает объективную реальность, так как динамические переменные $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ учитываются в модели в один и тот же момент времени t . В действительности необходимо учесть временной лаг, который является разницей во времени между изменениями в рыночной ситуации и моментом принятия управленческих решений с целью реагирования на эти изменения. Этот лаг обозначим τ , где $\tau > 0$. Таким образом, система (3) трансформируется следующим образом:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) \left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k(t - \tau) \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений (4) по сложившимся традициям носит имя моделей Лотки - Вольтерры [2].

Субъективизм при выборе модели данного типа основан на фактах, которые необходимо учесть при моделировании конкурентоспособности предприятий, в том числе нелинейность и существование временного лага при функционировании участников рынка. В данной задаче основным нелинейным свойством является эффект насыщения рынка: потребителей сотовой связи не станет больше, чем определенное количество, даже если услуги сотовой связи станут дешевле. Так время реакции на изменение условий спроса (т. е. изменение числа пользователей услуг сотовой связи) или на изменение поведения конкурентов (например, предоставление новых видов услуг или внедрение современных технологий) может быть продолжительным, поскольку требуются затраты времени и капитала для реализации новшеств на рынке.

Таким образом, для описания динамики поведения абонентской базы операторов сотовой связи воспользуемся логистической моделью Лотки - Вольтерры с запаздыванием во времени [5].

Для того чтобы смоделировать процесс управления поведением предприятия сотовой связи, в модель (4) конкуренции операторов сотовой связи, функционирующих на общем рынке, внесем дополнения.

В качестве управляющего воздействия i -го оператора сотовой связи используем показатель $u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, характеризующий среднюю

стоимость минуты пользования услугами связи оператора в момент времени t и удовлетворяющий ограничению:

$$\alpha_i \leq u_i(t) \leq \beta_i, \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

где α_i – минимальная средняя стоимость минуты связи, при которой затраты на издержки не превысят выручку, получаемую от использования услуг сотовой связи (себестоимость минуты связи);

β_i – максимальная средняя стоимость минуты связи, позволяющая оператору оставаться конкурентоспособным на рынке.

Система уравнений, описывающая динамику изменения абонентской базы операторов сотовой связи, с учетом влияния средней стоимости минуты на прирост числа абонентов примет вид:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(t) \left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k(t - \tau) \right] - p_i u_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где p_i – коэффициент влияния средней стоимости минуты связи на прирост числа абонентов, а количество абонентов i -го оператора сотовой связи на интервале запаздывания задано непрерывными функциями $\varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$:

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Необходимо также учесть существование нижней грани объема абонентской базы, которая обеспечивает нормальное функционирование предприятия [3]. Это ограничение может быть записано в следующем виде:

$$x_i(t) \geq \eta_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

На сегодняшний день на рынке России действуют три крупнейших оператора сотовой связи: «МТС», «Билайн», «Мегафон». Для анализа воспользуемся данными абонентской базы и данными тарифной политики операторов сотовой связи, которые ежеквартально публикуются в финансовой отчетности (их динамика представлена на рисунках 1, 2 соответственно) [8, 9, 10]. В целях дальнейшего построения модели оптимального управления поведением операторов предположим, что одно из предприятий («Билайн») представлено обособленно, а все остальные – совокупно, т. е. объединим остальные предприятия путем простого суммирования числа абонентов на рынке.

Пусть $x_1(t)$ – первый экономический агент, оператор сотовой связи «Билайн», $x_2(t)$ – вто-

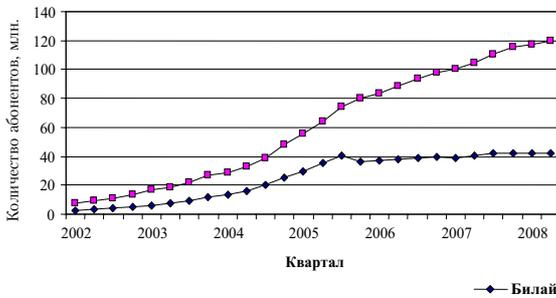
рой экономический агент, включающий все остальные предприятия, предоставляющие услуги сотовой связи на российском рынке. Согласно представленным выше предположениям их общая динамика может быть описана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t-\tau) - \\ - \gamma_{12}x_2(t-\tau)] - p_1u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t-\tau) - \\ - \gamma_{22}x_2(t-\tau) - p_2u_2(t), \end{cases} \quad (9)$$

где $\varepsilon_i, \gamma_{ik}, p_i, i, k = \overline{1,2}$ – неизвестные коэффициенты модели, τ – величина запаздывания, которая также неизвестна, $u_1(t)$ – средняя стоимость минуты связи оператора «Билайн» в момент времени t , $u_2(t)$ – средняя стоимость минуты связи остальных операторов в момент времени t .

Для оценки параметров модели преобразуем систему (9) в интегральную форму:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) \exp \left[\int_0^t (\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(s-\tau) - \right. \\ \left. - \gamma_{12}x_2(s-\tau) - p_1u_1(s)x_1^{-1}(s)) ds \right] \\ x_2(t) = x_2(0) \exp \left[\int_0^t (\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(s-\tau) - \right. \\ \left. - \gamma_{22}x_2(s-\tau) - p_2u_2(s)x_2^{-1}(s)) ds \right] \end{cases} \quad (10)$$



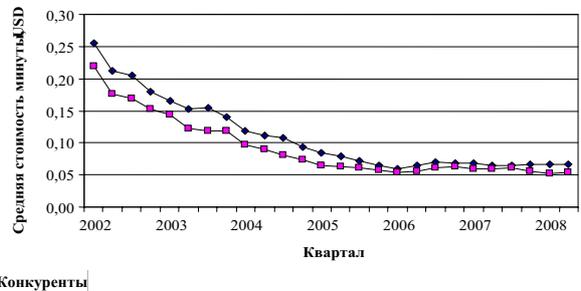
Первоначально рассмотрим случай без учета запаздывания, т. е. когда $\tau = 0$, чтобы продемонстрировать необходимость введения временного лага.

Поскольку интегралы в выражениях последней системы могут быть приближены линейными функциями, из системы уравнений (10) (при нулевом запаздывании) получим нелинейную разностную систему с неизвестными коэффициентами:

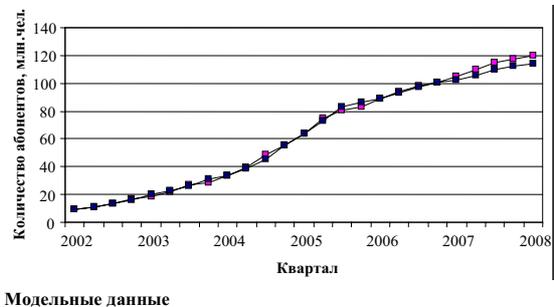
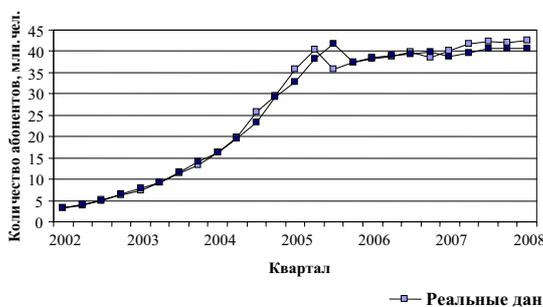
$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) * \\ * \exp[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(k) - \gamma_{21}x_2(k) - p_1u_1(k)x_1^{-1}(k)] \\ x_2(k+1) = x_2(k) * \\ * \exp[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(k) - \gamma_{22}x_2(k) - p_2u_2(k)x_2^{-1}(k)] \end{cases} \quad (11)$$

Неизвестные коэффициенты включены в систему (11) линейно, следовательно, их можно определить, используя метод наименьших квадратов (МНК) [6]. Для идентификации модели воспользуемся только частью данных, а на остальных данных (интервалом в 1 год: с 3-го квартала 2007 г. до 2-го квартала 2008 г. включительно) проверим модель на адекватность [11]. В результате решения получим модель с коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \cdot \\ \cdot [0,30355 - 0,004 \cdot x_1(t) - 0,00146 \cdot x_2(t)] - 0,85525u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \cdot \\ \cdot [0,20528 + 0,00380 \cdot x_1(t) - 0,00336 \cdot x_2(t)] - 0,67325u_2(t). \end{cases} \quad (12)$$



Рисунки 1, 2. Динамика абонентской базы (млн. чел.) и средней стоимости минуты пользования услугами сотовой связи (USD) по России оператора сотовой связи «Билайн» и его конкурентов поквартально



Рисунки 3, 4. Результат моделирования для квартального объема абонентской базы оператора «Билайн» и его конкурентов (без учета временного лага): сравнение реальных и модельных данных в интервале с 3-го квартала 2007 г. до 2-го квартала 2008 г.

Графики реальной кривой и модельной приведены на рисунках 3, 4.

Отклонение прогнозных оценок от фактических данных абонентской базы оператора сотовой связи «Билайн» и его конкурентов составляет 4,03% и 4,43% соответственно.

Проверим полученную модель на адекватность с помощью функционала, являющегося усредненным квадратом ошибки прогноза на один год:

$$D_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=22}^{25} [x_1(k+1) - x_1(k) * \exp(\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(k) - \gamma_{12}x_2(k) - p_1u_1(k)x_1^{-1}(k))]^2 + [x_2(k+1) - x_2(k) * \exp(\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(k) - \gamma_{22}x_2(k) - p_2u_2(k)x_2^{-1}(k))]^2. \quad (13)$$

В результате найдем значение функционала качества для модели без запаздывания: $D_0 = 29,52577$.

Одним из инструментов укрепления рыночных позиций предприятия в условиях растущей конкуренции является улучшение качества и расширение спектра дополнительных услуг. Таким образом, перспективы развития и сохранения прочного положения на рынке во многом зависят от технической и инновационной политики менеджмента операторов связи [4].

Для того чтобы учесть запаздывание, связанное с разницей во времени между изменениями в рыночной ситуации и принятием управленческих решений, предположим, что единицей его измерения является квартал, а значит, величина τ – целое число. Аналогично предыдущим рассуждениям из системы (10) при $\tau \neq 0$ получим нелинейную разностную систему с временным лагом, параметры (величина лага и коэффициенты модели) которой неизвестны:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) \exp \left[\varepsilon_1 - \gamma_{11} \frac{x_1(k+1-\tau) + x_1(k-\tau)}{2} - \gamma_{21} \frac{x_2(k+1-\tau) + x_2(k-\tau)}{2} - p_1u_1(k)x_1^{-1}(k) \right], \\ x_2(k+1) = x_2(k) \exp \left[\varepsilon_2 - \gamma_{21} \frac{x_1(k+1-\tau) + x_1(k-\tau)}{2} - \gamma_{22} \frac{x_2(k+1-\tau) + x_2(k-\tau)}{2} - p_2u_2(k)x_2^{-1}(k) \right]. \end{cases}$$

Так как и в случае с запаздыванием коэффициенты входят в систему линейно, для их вычисления воспользуемся методом наименьших квадратов при различных значениях

$\tau, \tau = 1, \dots, 19$. После применения МНК оптимальные коэффициенты становятся функциями $\tau: \varepsilon_i = \varepsilon_i(\tau), \gamma_{ik} = \gamma_{ik}(\tau), p_i = p_i(\tau), i, k = \overline{1, 2}$.

Таким образом, установление параметров модели проведем в два этапа: для имеющихся данных (часть данных) построим два функционала, зависящих от величины лага τ :

$$S_\tau^1(\varepsilon_1, \gamma_{11}, \gamma_{12}) = \sum_{k=\tau+1}^{21} \left[\ln \frac{x_1(k+1)}{x_1(k)} - \varepsilon_1 + \frac{\gamma_{11}}{2} (x_1(k-\tau) + x_1(k+1-\tau)) + \frac{\gamma_{12}}{2} (x_2(k-\tau) + x_2(k+1-\tau)) + p_1u_1(k)x_1^{-1}(k) \right]^2, \quad (14)$$

$$S_\tau^2(\varepsilon_2, \gamma_{21}, \gamma_{22}) = \sum_{k=\tau+1}^{21} \left[\ln \frac{x_2(k+1)}{x_2(k)} - \varepsilon_2 + \frac{\gamma_{21}}{2} (x_1(k-\tau) + x_1(k+1-\tau)) + \frac{\gamma_{22}}{2} (x_2(k-\tau) + x_2(k+1-\tau)) + p_2u_2(k)x_2^{-1}(k) \right]^2.$$

Используя МНК, рассчитаем оптимальные коэффициенты модели при произвольном τ .

На втором этапе, чтобы выбрать оптимальную величину запаздывания τ , воспользуемся остатком данных и построим функционал, являющийся усредненным квадратом ошибки прогноза на один год:

$$D_\tau = \frac{1}{4} \sum_{k=22}^{25} \left[x_1(k+1) - x_1(k) \exp \left(\varepsilon_1 - \frac{\gamma_{11}}{2} (x_1(k-\tau) + x_1(k+1-\tau)) - \frac{\gamma_{12}}{2} (x_2(k-\tau) + x_2(k+1-\tau)) - p_1u_1(k)x_1^{-1}(k) \right) \right]^2 + \left[x_2(k+1) - x_2(k) \exp \left(\varepsilon_2 - \frac{\gamma_{21}}{2} (x_1(k-\tau) + x_1(k+1-\tau)) - \frac{\gamma_{22}}{2} (x_2(k-\tau) + x_2(k+1-\tau)) - p_2u_2(k)x_2^{-1}(k) \right) \right]^2. \quad (15)$$

Вычислим значения функционала качества для каждого $\tau, \tau = 1, \dots, 19$.

В результате расчетов и численных экспериментов окончательно считаем наилучшим лаг, равный трем кварталам, и модель с оптимальными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[0,28121 - 0,01242x_1(t-3) + 0,00241x_2(t-3)] - 2,49952u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[0,19267 - 0,00166x_1(t-3) - 0,00104x_2(t-3)] - 2,05483u_2(t), \end{cases} \quad (16)$$

где шкала времени имеет в качестве единицы один квартал. Приведенные графики (рисунки 5, 6) демонстрируют расположение модельной кривой среди реальных данных. Отклонение прогнозных оценок от фактических данных абонентской базы оператора сотовой связи «Билайн» и его конкурентов составляет 2,49% и 1,38% соответственно.

Экономическая интерпретация полученного результата:

- коэффициент прироста числа абонентов оператора сотовой связи «Билайн» без учета эффекта насыщения ε_1 больше соответствующего коэффициента его конкурентов ε_2 : это значит, что абонентская база оператора «Билайн» наращивает объемы быстрее, чем абонентская база других операторов сотовой связи; наибольшее возможное увеличение абонентов в квартал оператор «Билайн» может осуществить до 24%, а его конкуренты – до 20%;

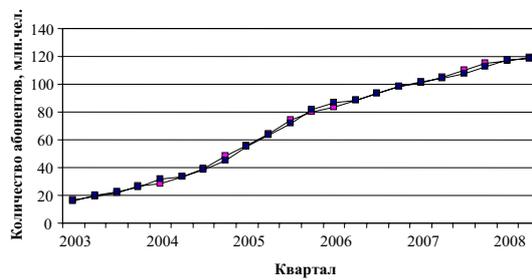
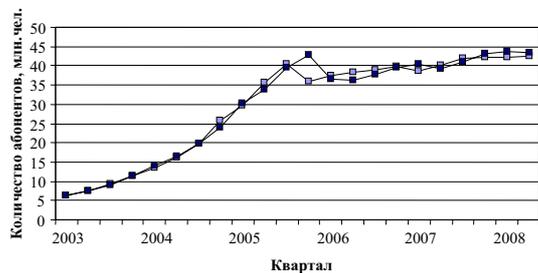
- коэффициенты γ_{ik} отвечают в модели за изменение спроса на данный вид предоставляемых услуг при увеличении объемов абонентской базы всех операторов сотовой связи;

- коэффициенты p_i – за уменьшение спроса на услуги сотовой связи при увеличении средней стоимости минуты связи;

- временной лаг составляет три квартала: такая задержка в реакции соответствует времени изменения качества предоставляемых услуг сотовой связи, способного изменить конкурентную ситуацию на рынке. Очевидно, что различные операторы сотовой связи вводят качественные изменения в предоставляемые услуги за разное время, но в данном случае использован средний статистический срок.

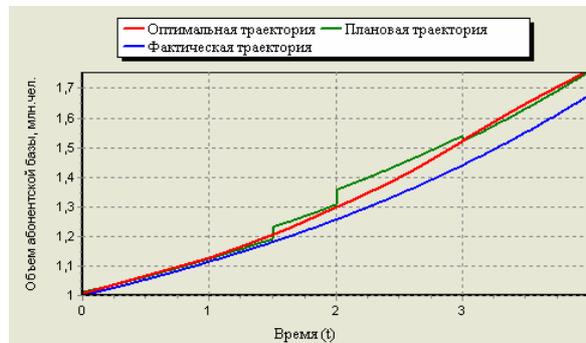
Анализ выбранной модели показал, что введение временного лага в данном случае приносит новую динамику по сравнению с моделью без лагов. Так отклонение прогнозных оценок от фактической реализации состояния системы без учета временного лага составляет до 4,43%, а при введении временного запаздывания, равного трем кварталам, отклонение снижается до 2,29%. Полученный результат свидетельствует, что введение запаздывания не только естественно, но и существенно дополняет модель управления поведением предприятия сотовой связи.

Решив задачу идентификации параметров модели, перейдем к решению задачи оптимального управления, которая состоит в оптимизации тарифной политики предприятия сотовой связи «Билайн» для обеспечения выполнения



—□— Реальные данные —●— Модельные данные

Рисунки 5, 6. Результат моделирования для квартального объема абонентской базы оператора сотовой связи «Билайн» и его конкурентов: сравнение реальных и модельных данных в интервале с 3-го квартала 2007 г. до 2-го квартала 2008 г.



Рисунки 7, 8. Оптимальная тарифная политика и динамика абонентской базы оператора сотовой связи «Билайн» при использовании оптимальной и фактической тарифной политики

плана развития абонентской базы [7]. В математических терминах данная задача может быть представлена в следующем виде.

Необходимо найти такую тарифную политику оператора «Билайн» $u_1(t), t \in [0, T)$, которая при динамических ограничениях (16) доставляла бы минимум следующему функционалу:

$$J(u_1) = (M - x_1(T))^2 + \int_0^T (r(t) - x_1(t))^2 Q dt \rightarrow \min, \quad (17)$$

где M – плановый уровень объема абонентской базы оператора «Билайн» в конечный момент времени $T, r(t) \geq x_1(t), t \in [0, T)$ – плановая траектория изменения фазового вектора оператора «Билайн» с учетом запаса, гарантирующего выполнение плана и определяемого исходя из практики планирования на предприятии, Q – средний уровень расходов одного абонента оператора «Билайн» за пользование услугами связи.

Для решения поставленной задачи применим принцип максимума Понтрягина для системы с постоянным запаздыванием.

Решение краевой задачи принципа максимума Понтрягина весьма затруднительно, поэтому был разработан программный продукт, реализующий ее численное решение. В его основе лежит алгоритм метода проекции градиента, учитывающий штрафные слагаемые.

Исследуем влияние плановой траектории $r(t)$ развития абонентской базы оператора «Билайн» на характер управления $u_1(t)$, в качестве которого мы приняли усредненную величину стоимости минуты связи данного оператора. И, как следствие, проанализируем влияние управления на прирост числа потребителей услуг оператора «Билайн». Для этого смоделируем следующую практическую ситуацию.

Выберем в качестве временного интервала T построения оптимального управления промежутков времени в один год, т. е. четыре квартала, и зададим параметры. Предположим, что количество абонентов в начальный момент времени t_0 оператора «Билайн» и его конкурентов составляет 1 и 3 млн. человек соответственно. Минимальный объем абонентской базы $\eta_i, i = 1, 2$, обеспечивающий нормальное функционирование предприятия, зафиксируем на том же уровне. Минимальное значение средней стоимости минуты связи оператора «Билайн» возьмем 0,06 USD, максимальное – 0,07 USD. Исходя из имеющихся дан-

ных, среднюю величину расходов одного абонента «Билайн» установим на уровне 12,3 USD [1].

В качестве плановой траектории движения с учетом запаса выберем следующую последовательность векторов. На промежутке до середины 2-го квартала запланируем прирост абонентской базы «Билайн» на 10 тыс. (0,01 млн.) человек по сравнению с фактической траекторией развития абонентской базы, которая определялась из имеющихся данных о фактическом управлении на рассматриваемом отрезке времени. С середины до конца второго квартала – на 50 тыс. (0,05 млн.) человек. До конца 3-го квартала увеличим прирост в объеме, равном 100 тыс. (0,1 млн.) человек. Поскольку в реальной ситуации может возникнуть проблема перегруженности сотовой связи, на интервале с 3-го по 4-й квартал уменьшим плановый прирост до 80 тыс. (0,08 млн.) человек.

В результате расчетов получим, что с 1-го квартала рассматриваемого периода алгоритм предполагает снижение стоимости минуты связи и минимально возможное значение (0,05 USD) фиксирует с середины 3-го квартала. Далее алгоритм предполагает повышение стоимости минуты связи, и к концу 4-го квартала она достигает максимальной величины (0,07 USD). Графическое представление оптимального и фактического управления представлено на рисунках 7, 8.

В таблице 1 приведены значения планируемого прироста абонентов «Билайн» и полученные в результате оптимального управления.

Анализируя развитие абонентской базы оператора «Билайн», полученное в результате оптимальной тарифной политики, и динамику плановой траектории развития абонентской базы, а также результаты таблицы 1, можно заключить следующее. Предложенный в качестве критерия качества квадратичный функционал, минимизирующий отклонение от плановой траектории развития абонентской базы оператора сотовой связи с учетом запаса, позволяет рас-

Таблица 1. Сравнение планируемого прироста абонентской базы и прироста, полученного в результате оптимальной тарифной политики

Отрезок времени, квартал	Прирост абонентской базы, тыс. чел.	
	по плану	получили
[0; 1,5]	10	23
(1,5; 2]	50	52
(2; 3]	100	80
(3; 4]	80	87

смаатривать различные сценарии поведения предприятий на рынке и находить управленческие решения, реализующие эти сценарии.

Созданный программный продукт обеспечивает руководителей предприятия сотовой связи инструментарием поддержки принятия управленческих решений по разработке мероприятий в части тарифной политики для выполнения плана объема абонентской базы.

Следует отметить, что уточнение параметров модели при поступлении новой информации об абонентской базе и тарифной политике операторов позволит повысить точность моделирования, прогнозирования, оценивания потенциальной емкости рынка и эффективность управления поведением предприятия в условиях конкуренции на рынке предоставляемых услуг.

6.05.2010

Список использованной литературы:

1. Аналитика рынка сотовой связи в России [Электронный ресурс]: Информационно-аналитическое агентство сотового рынка России и мира. – Режим доступа: WWW.URL: http://www.sotovik.ru/analyt_old/russia/
2. Андреева Е.А. Вариационное исчисление и методы оптимизации / Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. – Оренбург - Тверь: ГОУ ОГУ, Твер. гос. ун-т, 2004. – 575 с.
3. Андреева Е.А. Математическое моделирование / Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2004 – 502 с.
4. Афанасьева К.Е., Ширяев В.И. Идентификация состояния и прогнозирование регионального рынка // Проблемы управления. – Ч.: ЮУГУ, 2007. №3.
5. Болодурин И.П. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и их приложения: учебное пособие / И.П. Болодурин. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2006. – 101 с.
6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
7. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: учебное пособие / Б.А. Лагоша. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.
8. Сводки ежеквартальной финансовой отчетности [Электронный ресурс]: Официальный сайт компании сотовой связи МТС. – Режим доступа: URL: <http://www.company.mts.ru/ir/report/>
9. Сводки ежеквартальной финансовой отчетности [Электронный ресурс]: Официальный сайт компании сотовой связи Мегафон. – Режим доступа: URL: <http://www.megafon.ru/about/invest/otchet/>
10. Сводки ежеквартальной финансовой отчетности [Электронный ресурс]: Официальный сайт компании сотовой связи Билайн. – Режим доступа: URL: <http://www.mobile.beeline.ru/press/vimpelcom/index.wbp>
11. Черепанов О.И. Элементарные основы теории идентификации систем. – М.: Мир, 2004.

Сведения об авторах:

Болодурин Марина Павловна, доцент кафедры финансов предприятий
Оренбургского государственного университета, кандидат экономических наук, доцент
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 6504, тел. (3532) 370536, e-mail: finp@mail.osu.ru

Огурцова Татьяна Александровна, преподаватель кафедры прикладной математики
Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 3211, тел. (3532) 372536, e-mail: prmat@mail.osu.ru

Bolodurina I.P., Bolodurina M.P., Ogurtsova T.A.

Optimal control and simulation of innovation development of telecommunication branch

The work offers dynamic model of enterprise behavior in the telecommunication field in the form of the system of differential equations with the delay. The parameters of the represented model are determined on the base of real data of the volume of user base and tariff policy of the operators of mobile connection. The problem of optimal control of the behavior of enterprises taking into account delay is numerically solved.

The key words: Mathematical model, differential equations with the delay, optimal control, the identification of the parameters, Pontryagin's maximum principle.

Bibliography:

1. Analytics of cellular network market in Russia [Internet-resource]: Informational-analytical agent of cellular market of Russian and world. – Access mode: WWW.URL: http://www.sotovik.ru/analyt_old/russia/
2. Andreeva E.A. Calculus of variations and methods of optimization / E.A. Andreeva, V.M. Tsiruleva. – Orenburg-Tver: SEI OSU, Tver State University, 2004. – 575 p.
3. Andreeva E.A. Mathematical modeling / E.A. Andreeva, V.M. Tsiruleva. – Tver: Tver State university, 2004 – 502 p.
4. Afanasieva K.E., Shiryayev V.I. Identification of condition and forecasting of regional market // Problems of management. – Ch.: YUGU 2007. №3.
5. Bolodurina I.P. Differential equations with retarded argument and their enclosures: textbook / I.P. Bolodurina. – Orenburg: IPK SEI OSU, 2006. – 101 p.
6. Verzhbitskiy V.M. Bases of numerical methods / V.M. Verzhbitskiy – M.: Higher School, 2002. – 840 p.
7. Lagosha B.A. Optimal control at economics: textbook / B.A. Lagosha. – M.: Finances and statistics, 2003. – 192 p.
8. Reports of quarterly financial reporting [Internet-resource]: Official site of a cellular network company MTS. – Access mode: WWW.URL: <http://www.company.mts.ru/ir/report/>
9. Reports of quarterly financial reporting [Internet-resource]: Official site of a cellular network company Megafon. Access mode: WWW.URL: <http://www.megafon.ru/about/invest/otchet/>
10. Reports of quarterly financial reporting [Internet-resource]: Official site of a cellular network company Beeline. – Access mode: WWW.URL: <http://www.mobile.beeline.ru/press/vimpelcom/index.wbp>
11. Cherepanov O.I. Elementary bases of systems identification theory. – M.: Mir, 2004.