УДК 681.5.03

Влацкая И.В., Кожевникова В.Е., Максименко А.В.
Оренбургский государственный университет
E-mail: mois@mail.osu.ru

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В работе рассматриваются вопросы разработки нелинейных систем с дискретным временем в условиях неопределенности. Представлена программная реализация алгоритма расчета траектории нелинейных систем с начальными условиями и внешними воздействиями.

Ключевые слова: нелинейная система, неопределенность, состояние.

В идеологии создания промышленных АСУ методом совмещенного синтеза решающую роль играет степень достаточности текущей и постоянной информации об объекте управления.

Полная текущая информация означает, что все необходимые для управления координаты состояния объекта – отклонение управляемого параметра от его задания, интеграл и, возможно, производные этого отклонения – измеряются, причем эти измерения допустимо считать точными. Если же измеряются не все координаты состояния или эти измерения сопровождаются заметными измерительными ошибками, то текущая информация об объекте считается неполной. В этом случае имеет место одна из двух оставшихся градаций: достаточная или недостаточная текущая информация. Если по результатам имеющихся измерений возможно хотя бы теоретически найти состоятельные оценки неизмеряемых или неточно измеряемых координат, то такой объем текущей информации считается достаточным. Действительно, при этом для реализации принятого закона управления можно неизмеряемые координаты состояния заменить их оценками. Если же имеющийся состав и объем измерений принципиально не позволяет получить состоятельные оценки координат состояния, то соответствующая система называется системой с недостаточной текущей информацией. Таким образом, системы с полной или достаточной текущей информацией позволяют синтезировать и количественно реализовать закон управления [1].

В настоящее время проблеме построения алгоритмов управления объектами с неполной информацией уделяется большое внимание. Это объясняется несколькими факторами. Наиболее важным из них является отсутствие достоверных моделей систем управления сложными технологическими процессами. Поведение реальной системы управления обычно характеризуется некоторой неопределенностью, причем при достаточно большом объеме информации об объекте внешнее возмущение можно представить как случайный процесс [2].

В анализе систем, подверженных случайным воздействиям, наибольшее распространение получил метод описания объекта через пространство состояний.

Начальным этапом разработки систем управления с динамическими объектами с дискретным временем является выбор вектора состояния и вывод уравнения состояния, поскольку первичное описание объектов задается обычно в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных [3].

В теории идентификации предметом рассмотрения является отдельная связь выходных переменных от всех влияющих на них входных переменных.

Поведение динамического объекта с дискретным временем можно описать следующим уравнением состояния:

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k) \tag{1}$$

при схеме измерений

$$y_k = H(x_k), \tag{2}$$

где y_k – вектор наблюдений.

x_k – состояние системы на момент времени $k, (k = 1,2...n)$,

u_k – внешние воздействия на момент времени $k, (k = 1,2...n)$.

Прямое измерение всех компонент вектора состояния не всегда возможно. В этом случае классический подход к оценке методом наименьших квадратов приводит к использованию непоследовательных схем оценки. Недостаток данного метода состоит в необходимости повторять полный расчет каждый раз, когда производится дополнительное наблюдение. Рекуррентные алгоритмы позволяют уменьшить количество вычислительных операций и упростить программирование задач оценки [4].

Новая оценка состояния строится как старая оценка плюс «взвешенная» разность между измерением выхода и прогнозом этого измерения на основании прошлых измерений. Для начала рекуррентной процедуры вычисления необходимы априорные сведения о шумах и начальном состоянии системы x_0 и $\mu(x_0)$.

В случае неполной информации о сложном процессе можно представлять неточно заданные параметры в виде нечетких величин. На практике ситуация также усложняется частичным или полным отсутствием информации о статистических характеристиках шумов. Поэтому предлагается для решения задачи оценивания применять теорию нечетких множеств [5].

Приведем описание алгоритма [2].

Рассмотрим нелинейную динамическую систему с дискретным временем.

В уравнении (3) индекс k соответствует k-му моменту времени:

$$x_{k+1} = F_k(x_k, w_k),\ k = 1,2,\dots, \tag{3}$$

для которого измерение и состояние системы связаны соотношением:

$$z_k = H_k(x_k, v_k). \tag{4}$$

F_k, H_k – нелинейная функция соответствующих аргументов;

x_k – состояние динамической системы,

w_k – нечеткая помеха, заданная для каждого момента времени k-функцией принадлежности $\mu(w_k)$,

v_k – ошибка измерения с функцией принадлежности $\mu(v_k)$.

Будем предполагать независимость ошибок измерения, помех и состояния в смысле определения независимости нечетких величин. Наилучшая четкая оценка состояния в момент времени k при заданной функции принадлежности $\mu\left(x_k \middle| \overline{z_k}\right)$ состояния x_k при наличии последовательности измерений $\overline{z_k} = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ может быть найдена из соотношения:

$$\mu(x_k^0) = \max_{x_k} \mu\left(x_k \middle| \overline{z_k}\right). \tag{5}$$

Точечная оценка состояния системы в момент $(k+1)$ при наличии известной функции принадлежности $\mu\left(x_{k+1} \middle| \overline{z_k}\right)$ может быть определена аналогичным образом:

$$\mu(x_{k+1}^0) = \max_{x_{k+1}} \mu\left(x_k \middle| \overline{z_k}\right). \tag{6}$$

Принимая во внимание (6) и используя в качестве характеристики нечеткого начального состояния x_0 априорную функцию принадлежности $\mu(x_0)$, можно определить функцию $\mu(x_0|z_0)$:

$$\mu(x_0|z_0) = \mu(x_0) \wedge \sup_{v_0 - F_0^{-1}(x_0, z_0)} \mu(v_0). \tag{7}$$

Если измерения отсутствуют, т. е. не учитывается вектор наблюдений, тогда рекуррентные соотношения для нахождения апостериорной функции принадлежности для нечеткого состояния системы на любом шаге (k+1) можно записать следующим образом:

$$\mu(x_{k+1}|\bar{z}_k) = \max\left\{\mu(x_k|\bar{z}_k) \wedge \sup_{v_k - F_{k+1}^{-1}(x_{k+1}, x_k)} \mu(w_k)\right\}. \tag{8}$$

Для случая установившегося состояния, когда $x_{k+1} = x_k$, выражение (8) принимает вид [6, 7]:

$$\mu(x_{k+1}|\bar{z}_{k+1}) = \mu(x_k|\bar{z}_k) \wedge \sup_{v_{k+1} - F_{k+1}^{-1}(x_{k+1}, z_{k+1})} \mu(v_{k+1}). \tag{9}$$

Таким образом, от задачи идентификации системы мы пришли к более узкой задаче определения последующих значений состояний нелинейной системы с учетом внешних воздействий.

Согласно вышеизложенному алгоритму разработана программная реализация алгоритма расчета траектории нелинейной системы в условиях неопределенности:

$$\mu(x_{k+1}|\bar{z}_k) = \mu(x_{k+1}) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1} - F_{k+1}^{-1}(x_{k+1}, z_{k+1})} \mu(w_k)\right\}. \tag{10}$$

Алгоритм выполнения программы состоит из следующих шагов:

1. Задать размерность матрицы входных параметров.
2. Задать внешние воздействия.
3. Задать начальное значение x_0 и значение $\mu(x_0)$.
4. Решение ищется с помощью следующей рекуррентной процедуры:

$$\mu(x_{k+1}|\bar{z}_k) = \max\left\{\mu(x_k|\bar{z}_k) \wedge \sup_{v_k - F_{k+1}^{-1}(x_{k+1}, x_k)} \mu(w_k)\right\}, \tag{11}$$

где $\overline{z_k} = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ – наилучшая оценка состояния в момент времени k.

Пример 1. Реализация алгоритма для нелинейной функции вида $F(x) = e^x - x^3$.

Зададим начальные состояния (таблица 1) и внешние воздействия (таблица 2).

При начальном состоянии x_0 и значении $\mu(x_0)$

Таблица 1. Начальное состояние

x_0	0,8
x_0	0,2

Таблица 2. Внешние воздействия

x	0,8	0,63	0,091	1,2	0,6
x	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3

Пошаговое выполнение алгоритма даст следующие результаты:

$$x_1 = F(x_0) + w_0 = F(0{,}8) + 0{,}2 = 0{,}63,$$

$$\mu(x_1|\bar{z}_1) = \mu(x_1) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1}-x^2} \mu(w_k)\right\} = 0{,}3,\ k = 1$$

$$x_2 = F(x_1) + w_1 = F(0{,}63) + 0{,}3 = 0{,}091,$$

$$\mu(x_2|\bar{z}_2) = \mu(x_2) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1}-x^2} \mu(w_k)\right\} = 0{,}3,\ k = 2$$

$$x_3 = F(x_2) + w_2 = F(0{,}091) + 0{,}1 = 1{,}2,$$

$$\mu(x_3|\bar{z}_3) = \mu(x_3) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1}-x^2} \mu(w_k)\right\} = 0{,}3,\ k = 3$$

$$x_4 = F(x_4) + w_4 = F(1{,}2) + 0{,}05 = 0{,}6,$$

$$\mu(x_4|\bar{z}_4) = \mu(x_4) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1}-x^2} \mu(w_k)\right\} = 0{,}3,\ k = 4$$

Значения состояний x_k и соответствующих значений функции $\mu(x_k)$ приведены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты работы алгоритма идентификации

x	0,8	0,63	0,091	1,2	0,6
μ(x)	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3

В результате работы алгоритма получена траектория нелинейной системы в нечетких условиях, определяемая функцией вида $F(x) = e^x - x^3$. Рассмотренная последовательность состояний не монотонна.

Пример 2. Реализация алгоритма для нелинейной функции вида $F(x) = e^x - x^2$.

Зададим начальные состояния (таблица 4) и внешние воздействия (таблица 5).

При начальном состоянии x_0 и значении $\mu(x_0)$

Таблица 4. Начальное состояние

x_0	0,8
x_0	0,2

Таблица 5. Внешние воздействия

W	0,2	0,3	0,1	0,05
W	0,3	0,1	0,2	0,1

Пошаговое выполнение алгоритма даст следующие результаты:

$$x_1 = F(x_0) + w_0 = F(0{,}8) + 0{,}2 = 1{,}43,$$

$$\mu(x_1|\bar{z}_1) = \mu(x_1) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1}-x^2} \mu(w_k)\right\} = 0{,}3,\ k = 1$$

$$x_2 = F(x_1) + w_1 = F(1{,}43) + 0{,}3 = 0{,}73,$$

$$\mu(x_2|\bar{z}_2) = \mu(x_2) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1}-x^2} \mu(w_k)\right\} = 0{,}3,\ k = 2$$

$$x_3 = F(x_2) + w_2 = F(0{,}73) + 0{,}1 = 1{,}34,$$

$$\mu(x_3|\bar{z}_3) = \mu(x_3) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1}-x^2} \mu(w_k)\right\} = 0{,}3,\ k = 3$$

$$x_4 = F(x_4) + w_4 = F(1{,}34) + 0{,}05 = 0{,}66,$$

$$\mu(x_4|\bar{z}_4) = \mu(x_4) = \max_{x_k}\left\{\mu(x_k) \wedge \sup_{v_{k+1}-x^2} \mu(w_k)\right\} = 0{,}3,\ k = 4$$

Значения состояний x_k и соответствующих значений функции $\mu(x_k)$ приведены в таблице 6.

Таблица 6. Результаты работы алгоритма идентификации

x	0,8	1,43	0,73	1,34	0,66
μ(x)	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3

В результате работы алгоритма получена модель нелинейной системы в нечетких условиях, определяемая функцией вида $F(x) = e^x - x^2$. Рассмотренная последовательность состояний не монотонна.

В основе представленного алгоритма лежит принцип максимизации функции принадлежности, что позволяет минимизировать различия между полученными данными и данными реальной нелинейной системы.

На основании проведенных исследований реализован алгоритм расчета траектории нелинейной системы в нечетких условиях. Исходя из результатов работы программы можно заключить, что динамика значений состояний системы находится в зависимости от вида нелинейной функции аргументов.

При использовании данного алгоритма из начальных состояний были получены последующие значения состояний, т. е. траектория нелинейной системы в нечетких условиях.

15.06.2010

Список использованной литературы:

1. Фитерман, М.Я. Роль информации и идентификация при создании АСУ / М.Я. Фитерман // Промышленная автоматизация в России. – 2007. – №11. – С. 2-4
2. Алтунин, А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с.
3. Семенов, А.Д. Идентификация объектов управления: Учебн. пособие / А.Д. Семенов, Д.В. Артамонов, А.В. Брюхачев. – Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2003. – 211 с.
4. Попков, Ю.С. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем / Ю.С. Попков, О.Н. Киселев, Н.П. Петров [и др.]. – М.: Энергия, 1976. – 440 с.
5. Эйкхорф, П. Современные методы идентификации систем: Пер. с англ. / П. Эйкхорф. – М.: Мир, 1982.– 400 с.
6. Гроп, Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
7. Музыкин, С. Н. Моделирование динамических систем / С.Н. Музыкин, Ю.М. Родионова. – Ярославль: Верх.-Волж. кн. изд-во, 1984. – 304 с.

Работа выполнена при поддержке ФЦП421П госконтракт П2376

Сведения об авторах:

Влацкая Ирина Валерьевна, заведующая кафедрой математического обеспечения информационных систем Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук, доцент
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2131, тел. (3532)372534
e-mail: mois@mail.osu.ru

Кожевникова Вера Евгеньевна, ведущий инженер кафедры математического обеспечения информационных систем Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2132, тел. (3532)372534
e-mail: vedmara@rambler.ru

Максименко Анатолий Валерьевич, научный сотрудник кафедры математического обеспечения информационных систем Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2132, тел. (3532)372534
e-mail: zas111@list.ru

Vlatskaya I.V., Kozhevnikova V.E., Maksimenko A.V.

THE ALGORITHM OF THE TRAJECTORY CALCULATION OF NONLINEAR SYSTEM UNDER THE CONDITIONS OF UNCERTAINTY

The authors examined questions of the development of nonlinear systems with the discrete time under the conditions of uncertainty. There is the program realization of the algorithm of the trajectory calculation of nonlinear systems with the initial conditions and the external actions. The key words: nonlinear system, uncertainty, state.

Bibliography:

1. Fiterman M.J. The role of information and identification with the creation of ACS / M.J. Fiterman // Industrial Automation in Russia. – 2007. – №11. – S. 2-4
2. Altunin A.E. Models and algorithms for decision making in fuzzy environment / A.E. Altunin, M.V. Semukhin. – Tyumen: Publishing Tyumen State University, 2000. – 352 pp.
3. Semenov A.D. Identification of facilities management: Scholastic. manual / A.D. Semenov, D.V. Artamonov, A.V. Bryuhachev. – Penza: Izd Penza State University, 2003. – 211 pp.
4. Popkov Y.S. Identification and optimization of nonlinear stochastic systems / Y.S. Popkov, O.N. Kiselev, N.P. Petrov [and others]. – Moscow: Energiya, 1976. – 440 pp.
5. Eykhorf P. Current methods of identification systems: Per. from English. / P. Eykhorf. – M.: Mir, 1982.– 400 pp.
6. Grope D. Methods of identification systems / D. Grope. – M.: Mir, 1979. – 302 pp.
7. Muzykin S. Modelling of Dynamical Systems / S.N. Muzykin, Y.M. Rodionov. – Yaroslavl: Verh.-Volga. book. Publishing House, 1984. – 304 pp.