УДК 51(091)

Шухман Е.В.
Оренбургский государственный педагогический университет
E-mail: moye@inbox.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОНСТАНТ В ОПУБЛИКОВАННЫХ И НЕОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТАХ Л. ЭЙЛЕРА

В статье рассмотрены опубликованные работы Эйлера и заметки из его записных книжек, связанные с вычислением константы Эйлера - Маскерони γ и константы Эрдёша - Борвейна α .

Ключевые слова: история математики, Леонард Эйлер, константа Эйлера - Маскерони, константа Эрдёша - Борвейна.

С древних времен большой интерес математиков вызывали задачи вычисления математических констант с большой точностью. Наиболее богатую историю имеет задача о вычислении знаменитого числа π . Так задача о вычислении площади круга встречается в клинописных табличках вавилонско-ассирийской культуры, в древнеегипетских папирусах, в трудах Архимеда, в работах средневековых арабских, индийских и китайских математиков.

Создание и развитие анализа бесконечно малых в XVII–XVIII вв. привело как к появлению новых констант, так и к разработке новых методов их приближенного вычисления. История математических констант в XVIII в. неразрывно связана с именем великого математика Леонарда Эйлера (1707–1783). Он впервые стал широко использовать современные обозначения: π для отношения длины окружности к диаметру и e для предела $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Методы вычисления константы π, использованные Эйлером, подробно проанализированы в наших работах [1, 2]. Далее в статье рассмотрены некоторые методы, предложенные Эйлером для вычисления других математических констант.

Константа Эйлера - Маскерони γ наряду с константами π и e входит в тройку констант, наиболее важных для всех разделов математики. Константа Эйлера - Маскерони может быть определена следующим равенством:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0{,}5772156649\ldots$$

До настоящего времени неизвестно, является ли γ иррациональным или трансцендентным числом. Отметим, что для обозначения константы Эйлер не использовал символ γ, но применял разные обозначения: *C, O,* λ *, Const.,* Δ *, b, n.*

Существует много исследований, посвященных трудам Эйлера, имеющим отношение к константе Эйлера - Маскерони. Это прежде всего монография Дж. Хэвила [3], обзорная статья Дж. Глейшера [4], размещенное в Интернете эссе Э. Сандифира [5].

После Эйлера константу γ изучал итальянский математик Лоренцо Маскерони (1750–1800). В трактате 1790 г. «Adnotationes ad Euleri Calculum Integralem» («Замечания к интегральному исчислению Эйлера») Маскерони приводит константу с точностью до 32 знаков, однако в 20–22 знаках делает ошибку [6, с.11]. Многие историки математики, в том числе Хэвил, Глэйшер и Данхем [7], ошибочно считают, что обозначение γ введено именно Маскерони. Однако в работе [6] Маскерони использует для обозначения константы заглавную букву *A*. Сандифир предполагает, что впервые обозначение γ употребил немецкий математик Карл Антон Бретшнайдер (1808–1878) [5].

Впервые связь между частичной суммой гармонического ряда и логарифмической функцией Эйлер рассмотрел в работе 1734 г. «De Progressionibus harmonicis observationes» («Исследования гармонических прогрессий») [8]. Эйлер рассматривает частичную сумму гармонического ряда с общим членом $\frac{c}{a+(n-1)b}$ как функцию *s(i),* где *i* - количество членов. Он получает дифференциальное уравнение для *s(i)* в виде $ds=\frac{c\cdot di}{a+ib}$.Решение этого уравнения будет иметь вид $s(i)=C+\frac{c}{b}ln(a+ib)$. В частности, для классического гармонического ряда $a=b=c=1$ и $1+\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{i}=ln(i+1)+C$. Появившаяся константа С – это и есть константа Эйлера - Маскерони. Далее Эйлер выводит равенство:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}=ln(i+1)+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}+\ldots)-$$

$$-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2^3}+\ldots)+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2^4}+\ldots)-\ldots \quad (1)$$

К этому моменту он уже вывел выражения для сумм обратных степеней в [9]. Поэтому Эйлер легко получает приближенное равенство для константы C с 5 верными знаками после запятой: $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}=ln(i+1)+0{,}577218$.

К вычислению γ Эйлер возвращается в статье 1735 г. «Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali» («Вычисление сумм рядов с заданным общим членом») [10]. В этой статье вычисление γ является простым примером использования формулы суммирования Эйлера - Маклорена. В § 25, записывая формулу суммирования для функции $\frac{1}{x}$, Эйлер получает равенство

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x}=$$

$$=\gamma+\ln(x)+\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-\frac{1}{132x^{10}}+\ldots \quad (2)$$

Далее он суммирует первые десять членов ряда с точностью до 16 десятичных знаков, получая результат 2,9289682539682539, берет с точностью до 18 знаков ln 10 = 2,302585092994045684 и получает значение константы с точностью 15 знаков после запятой 0,5772156649015329. Этот же пример Эйлер включил в главу VI «О суммировании прогрессий с помощью рядов» второй части «Дифференциального исчисления» [11, с. 303–305].

Новые результаты, относящиеся к константе γ, Эйлер получил в работе 1768 г. «De summis serierum numeros Bernoullianos involventium» («О суммах рядов, включающих числа Бернулли») [12]. Константа Эйлера - Маскерони появляется в работе при описании суммы гармонического ряда. Эйлер получает выражение для γ, подобное (1):

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)+\ldots \quad (3)$$

Большое количество тождеств, содержащих константу γ, Эйлер получил в статье, представленной в 1776 г., «De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente» («О замечательном числе, встречающемся при суммировании натуральной гармонической прогрессии») [13]. Число γ является главным объектом изучения в этой статье. Эйлер устанавливает связь γ с суммами рядов степеней обратных величин (в современной терминологии - со значениями дзета-функции $\zeta(x)$) и получает следующие тождества:

$$1-\gamma=\frac{1}{2}(\zeta(2)-1)+\frac{1}{3}(\zeta(3)-1)+\frac{1}{4}(\zeta(4)-1)+\ldots \quad (4)$$

$$2\gamma-1=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\zeta(3)\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\zeta(5)\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}\zeta(7)\right)+\ldots \quad (5)$$

$$2-2\ln 2-\gamma=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2^3-1}{2^3}\zeta(3)-\frac{2}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2^5-1}{2^5}\zeta(5)-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{2^7-1}{2^7}\zeta(7)-\frac{2}{7}\right)+\ldots \quad (6)$$

$$1-2\ln 2+\gamma=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3\cdot 2^3}\zeta(3)\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{2}{5\cdot 2^5}\zeta(5)\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{2}{7\cdot 2^7}\zeta(7)\right)+\ldots \quad (7)$$

$$ln 2-\gamma=\frac{1}{3\cdot 2^2}\zeta(3)+\frac{1}{5\cdot 2^4}\zeta(5)+\frac{1}{7\cdot 2^6}\zeta(7)+\ldots \quad (8)$$

$$1-ln\frac{3}{2}-\gamma=\frac{1}{3\cdot 2^2}(\zeta(3)-1)+\frac{1}{5\cdot 2^4}(\zeta(5)-1)+\frac{1}{7\cdot 2^6}(\zeta(7)-1)+\ldots \quad (9)$$

Просуммировав 15 членов ряда(4), Эйлер получает значение γ с точностью до 6 знаков. Из ряда (9) при суммировании 10 членов получается значение с 12 верными знаками после запятой.

Также Эйлер использовал константу γ в главе XVI «О дифференцируемости непредставимых функций» II части «Дифференциального исчисления» [11, с.527–529], при дифференцировании «непредставимой функции $S=1\cdot 2\cdot 3\ldots x$» (Г-функции в современных обозначениях). Эйлер получает для логарифма Г-функции выражение:

$$\ln S=-x\cdot 0{,}5772156649015325+$$

$$+\frac{1}{2}x^2(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots)-\frac{1}{3}x^3(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots)+\ldots$$

После дифференцирования он выводит разложение логарифмической производной S в виде:

$$\frac{dS}{S} = -dx \cdot 0{,}5772156649015325 +$$

$$+\frac{xdx}{1(1+x)} + \frac{xdx}{2(2+x)} + \frac{xdx}{3(3+x)} + \ldots$$

Отсюда получается, что производная логарифма Г-функции в точке $x = 0$ равна $-\gamma$.

Константа Эйлера - Маскерони, обозначаемая Δ, встречается во многих формулах работы «De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$» («О гипергеометрической кривой, заданной выражением $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$») [14]. Эта работа содержит подробное изучение свойств Г-функции. Для решения этой задачи Эйлер исследует производную логарифма Г-функции и получает для нее выражение:

$$\frac{dy}{ydx} = -\Delta + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \ldots$$

Выражения, включающие константу γ, встречаются и в переписке Эйлера с его современниками. Так в письме к Дж. Стирлингу от 18 июня 1736 г. Эйлер приводит свои результаты, на тот момент еще не опубликованные: формулу(2), обозначая константу через *b*, вычисленное значение *b* = 0,5772156649015329 с точными 15 знаками после запятой, а также значения сумм тысячи и миллиона первых членов гармонического ряда [15, с. 123]. В письме к И. Бернулли от 20 июня 1740 г. также приводится формула (2), значение константы 0,57721566490153252 и значение суммы миллиона членов гармонического ряда [16, с. 264]. В письме к Гольдбаху от 23 июня 1744 г. Эйлер приводит выражение для производной логарифма Г-функции при натуральных значениях *x* в виде:

$$\frac{dy}{ydx} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} - n, \tag{10}$$

где *n* = 0,5772156649 [17, с.198].

Заметки, относящиеся к вычислению константы γ, можно найти в записных книжках Эйлера, хранящихся в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН [18]. В записной книжке № 131 на л. 269 приведена формула (2) и с ее помощью вычислена сумма первых 10 членов гармонического ряда. В записной книжке № 132 на л. 234 об. Эйлер приводит выражение (10) для производной логарифма Г-функции, а также вычисляет значения производной при *x* = 0,...,4. Эти заметки впервые опубликованы и подробно рассмотрены в статье И.В. Игнатушиной [19].

Таблица 1. Абсолютная погрешность вычисления γ

Ряд	50 членов	100 членов	200 членов
(1)	$1\ 10^{2}$	$5\ 10^{3}$	$2\ 10^{3}$
(3)	$9\ 10^{16}$	$8\ 10^{31}$	$6\ 10^{61}$
(4)	$2\ 10^{17}$	$8\ 10^{33}$	$3\ 10^{63}$
(5)	$2\ 10^{3}$	$1\ 10^{3}$	$6\ 10^{4}$
(6)	$2\ 10^{51}$	$2\ 10^{99}$	$3\ 10^{195}$
(7)	$5\ 10^{3}$	$2\ 10^{3}$	$1\ 10^{3}$
(8)	$3\ 10^{33}$	$1\ 10^{63}$	$3\ 10^{124}$
(9)	$2\ 10^{64}$	$6\ 10^{125}$	$1\ 10^{245}$

Таким образом в многочисленных работах Эйлер предложил несколько рядов для вычисления константы γ. Наиболее известен асимптотический ряд (2), который широко использовался вплоть до недавнего времени. Так с помощью этого ряда Дональд Кнут в 1962 г. вычислил более 1200 верных десятичных цифр γ [20]. Другие ряды, предложенные Эйлером, ранее не исследовались с точки зрения точности вычислений. Мы провели сравнение абсолютной погрешности вычисления для различных рядов, рассмотренных в работах Эйлера. Была определена абсолютная погрешность вычисления константы для заданного количества членов ряда. Вычисления производились в пакете Mathematica 5.2 в режиме точных вычислений. Для вычисления дзета-функции использовалась встроенная функция Zeta. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Отметим, что для вычисления γ в работе [13] Эйлер использовал ряд (9), действительно дающий наиболее высокую точность вычислений.

Интересным примером менее известной константы, по-видимому, впервые приближенно вычисленной Эйлером, является константа Эрдёша - Борвейна. До настоящего времени этот факт не был отмечен в литературе по истории математики. Константа Эрдёша - Борвейна α определяется как сумма бесконечного ряда величин, обратных числам Мерсенна [21]:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}. \tag{11}$$

Свое наименование константа получила в честь венгерского математика Пола Эрдёша (1913–1996) и канадского математика Питера Борвейна (род. 1953), доказавших иррациональность числа α. Эрдёш в 1948 г. доказал иррациональность сумм вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^n - 1}$, где *t>1* – натуральное число, [22]. Борвейн в 1987 году доказал более общий результат: иррациональность $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^n+r}$, где r – произвольное рациональное число, не равное никакой степени t [23].

У Эйлера ряд (11) впервые встречается в статье «Methodus generalis summandi progressiones» («Общие методы суммирования прогрессий») [24], написанной в 1732 г., в качестве примера ряда, сумму которого невозможно найти с помощью опубликованной в этой статье формулы суммирования. Эйлер здесь не предлагает никакого метода для вычисления суммы этого ряда.

Тем не менее, ученый не оставил попыток вычислить сумму ряда (11), но следующую публикацию на эту тему выполнил только через 17 лет – в 1749 г. В статье «Consideratio quarumdam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae» («Рассмотрение некоторых рядов, имеющих особые свойства») [25] Эйлер изучает ряд:

$$s(x)=\frac{1-x}{1-a}+\frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3}+\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6}+ \\ +\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}}+\ldots, \qquad (12)$$

где показатели степени в знаменателе – соседние треугольные числа вида $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Эйлер фактически строит бесконечное продолжение интерполяционной формулы Ньютона для функции $log_a x$ в узлах $1, a, a^2, a^3, \ldots$, где логарифм принимает целочисленные значения. Однако полученная функция $S(x)$ не совпадает с логарифмом. Подробности об изучении Эйлером функции $s(x)$ приведены в статьях Э. Сандифира [26] и В. Готчи [27]. Для нашего исследования важно, что значение функции $S(x)$ в точке 0

$$s(0)=-\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a^3-1}+\frac{1}{a^4-1}+\ldots\right). \qquad (13)$$

Заметим, что при подстановке $a=2$ в (13) получается величина, противоположная по знаку сумме ряда (11). Эйлер утверждает, что ряд (13) при $a>1$ сходится к некоторому конечному числу, в то время как логарифм в точке 0 стремится к $-\infty$. Эйлер пишет, что «значение суммы ряда при $a>1$ конечно и может быть легко приближенно вычислено, но не выражается через рациональные и иррациональные числа» [25, p. 105]. Под иррациональными числами Эйлер здесь понимает радикалы и известные константы, такие как π.

Для приближенного вычисления суммы ряда (13) Эйлер рассматривает более общий ряд

$$s=\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a^2-z}+\frac{1}{a^3-z}+\frac{1}{a^4-z}+\ldots \qquad (14)$$

Каждый член ряда (14) может быть представлен как сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{a^n-z}=\frac{\frac{1}{a^n}}{1-\frac{z}{a^n}}=\frac{1}{a^n}+\frac{z}{a^{2n}}+\frac{z^2}{a^{3n}}+\ldots \qquad (15)$$

Далее Эйлер отделяет первые n членов ряда (14), обозначая их сумму

$$A=\frac{1}{a-z}+\frac{1}{a^2-z}+\frac{1}{a^3-z}+\ldots+\frac{1}{a^n-z}.$$

Остальные члены ряда (14) разворачиваются в геометрические прогрессии, после чего за скобки выносятся степени z

$$s=A+\frac{1}{a^{n+1}}+\frac{1}{a^{n+2}}+\frac{1}{a^{n+3}}+\frac{1}{a^{n+4}}+\ldots \\ +z\left(\frac{1}{a^{2n+2}}+\frac{1}{a^{2n+4}}+\frac{1}{a^{2n+6}}+\frac{1}{a^{2n+8}}+\ldots\right)+ \\ +z^2\left(\frac{1}{a^{3n+3}}+\frac{1}{a^{3n+6}}+\frac{1}{a^{3n+9}}+\frac{1}{a^{3n+12}}+\ldots\right)+\ldots$$

Выражения в каждой строке заново сворачиваются по формуле суммы геометрической прогрессии

$$s=A+\frac{1}{a^n(a-1)}+\frac{z}{a^{2n}(a^2-1)}+ \\ +\frac{z^2}{a^{3n}(a^3-1)}+\frac{z^3}{a^{4n}(a^4-1)}+\ldots \qquad (16)$$

Эйлер утверждает, что полученный ряд сходится гораздо быстрее, чем исходный. Подставляя $a=2$ в (16), он получает:

$$s=A+\frac{1}{2^n}+\frac{z}{3\cdot 4^n}+\frac{z^2}{7\cdot 8^n}+\frac{z^3}{15\cdot 16^n}+\ldots$$

Для вычисления константы (11) Эйлер принимает $z=1$ и выбирает $n=4$. Тогда

$$A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}$$

и

$$\alpha=A+\frac{1}{16}+\frac{1}{3\cdot 16^2}+\frac{1}{7\cdot 16^3}+\frac{1}{15\cdot 16^4}+\ldots \qquad (17)$$

Эйлер вычисляет A с точностью 15 десятичных цифр после запятой, прибавляет сумму нескольких членов из (17) и получает приближенное значение $\alpha \approx 1{,}606695152415291$ с точностью 15 десятичных цифр после запятой. Отметим, что у Эйлера не указано, сколько членов ряда (17) нужно взять для вычислений с требуемой точностью. Сандифир [26] считает, что Эйлер прибавил первые 15 членов ряда. Наши вычисления с помощью пакета Mathematica 5.2 показали, что для получения нужного приближения α достаточно просуммировать первые 9 членов.

Далее Эйлер приводит еще одно выражение для (13). Для этого каждый член ряда опять представляется в виде суммы бесконечной геометрической прогрессии аналогично (15), но затем члены группируются по степеням *a*. Получается следующий ряд:

$$s = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^5} + \frac{4}{a^6} + \frac{2}{a^7} + \ldots \quad (18)$$

Здесь числитель каждого члена равен количеству делителей у показателя степени *a* в знаменателе. Так член $\frac{4}{a^6}$ имеет в числителе 4, потому что показатель степени 6 имеет ровно 4 делителя. Если показатель степени - простое число, то числитель будет равен 2, если составное - то больше 2. Эйлер пишет, что это разложение позволяет легко вычислить большое число знаков суммы (13) при *a=10*: количества делителей, не превышающие 10, просто дадут последовательные цифры суммы:

$$s \approx 0{,}1223242434262445262644283446 28.$$

Чтобы лучше понять, как Эйлер пришел к этим результатам, необходимо рассмотреть записи в записных книжках, имеющие отношение к константе Эрдёша - Борвейна. Впервые Эйлер выписывает ряд (11) на л. 89 записной книжки 131, датированной 1736–1740 гг., в виде

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \ldots$$

Он сразу приводит другое выражение для этой суммы, аналогичное (18)

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{2}{2^5} + \frac{4}{2^6} + \frac{2}{2^7} + \ldots$$

Далее записано приближенное значение для суммы с шестью цифрами после запятой и несколько близких по значению дробей: $1{,}606695 \approx \frac{8}{5} \approx \frac{45}{28} \approx \frac{98}{61}$.

На следующем л. 89 об. каждый член ряда представляется в виде суммы геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{8^1} + \frac{1}{16^1} + \frac{1}{32^1} + \frac{1}{64^1} + \ldots \\
\frac{1}{3} &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{32^2} + \frac{1}{64^2} + \ldots \\
\frac{1}{7} &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{32^3} + \frac{1}{64^3} + \ldots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Фактически (в современных обозначениях) константа Эрдёша - Борвейна представлена двойным рядом

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{mn}}.$$

Далее Эйлер, начиная с *n+1* строки, сворачивает суммы по столбцам по формулам суммы геометрической прогрессии и получает:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{1\cdot 2^n} + \frac{1}{3\cdot 4^n} + \frac{1}{7\cdot 8^n} + \frac{1}{15\cdot 16^n} + \frac{1}{31\cdot 32^n} + \frac{1}{63\cdot 64^n} + \ldots$$

Ниже Эйлер приводит приближенное значение α, причем не только в десятичной системе 1,60669515241527, но и в двоичной

$$1{,}1001101101010000011000000111000000110010000000 1.$$

Вычисления в двоичной системе здесь удобнее, поскольку приходится суммировать дроби, в знаменателе которых стоят степени двойки. Подробно использование Эйлером двоичной системы счисления рассмотрено в статье [28].

Таким образом, Эйлер разработал методы вычисления константы Эрдёша - Борвейна и получил ее приближенное значение с точностью 13 знаков после запятой не позднее 1740 г. Однако эти результаты были опубликованы только через 10 лет. Возможно, Эйлер не считал нужным публиковать свои результаты, пока не получил обобщение (12). Кроме этого, можно предположить, что Эйлер пытался выразить значение новой константы через известные иррациональные константы, но никаких подтверждений этому мы не имеем, кроме уже процитированного утверждения из [25].

Следует отметить, что ряд (13) в истории науки оказался связан с именем Иоганна Генриха Ламберта (1728–1777), который рассматривал ряды вида

$$S(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{q^n}{1-q^n}.$$

При $a_n = 1$ и $q = \frac{1}{2}$ получаем ряд (13).

А.П. Юшкевич в [29, с. 206] подробно рассмотрел использование Эйлером рядов Ламберта (для $a_n = n$) при изучении свойств сумм делителей натуральных чисел и доказательстве пентагональной теоремы. Эти ряды также применяются в теории чисел для исследования распределения простых чисел в натуральном ряду [25, с. 207].

Константа Эрдёша - Борвейна находит применение не только в теории чисел, но и в теоретической информатике при анализе сложности алгоритмов, например, вместе с константой Эйлера - Маскерони входит в формулу для вычислении ожидаемого числа сравнений при удачном поиске случайного элемента в дереве цифрового поиска [30, p.355].

Подводя итоги, отметим, что Эйлер впервые рассмотрел константы, которые сегодня мы называем константами Эйлера - Маскерони и Эрдёша - Борвейна, нашел много полезных тождеств для их вычисления, смог вычислить их значение с точностью до 15 десятичных цифр после запятой.

Нами выполнено систематическое описание опубликованных работ Эйлера и заметок из записных книжек, имеющих отношение к вычислению упомянутых констант. Проведено экспериментальное сравнение точности рядов для вычисления константы Эйлера - Маскерони при одинаковом числе суммируемых членов. Подтверждено, что Эйлер для вычислений использовал наиболее точный ряд. На основе общепринятой датировки записных книжек установлено, что основные методы вычисления константы Эрдёша-Борвейна Эйлер получил не позднее 1740 г.

21.05.2010

Список использованной литературы:

1. Шухман Е.В. Приближенное вычисление числа пи с помощью ряда для $arctg\ x$ в опубликованных и неопубликованных работах Леонарда Эйлера // История науки и техники. – 2008 – №4. – С. 2-17.
2. Шухман Е.В. Об оценке остатка асимптотического ряда для вычисления числа p, предложенного Л. Эйлером // История науки и техники. – 2009 – №10. – С. 2-7.
3. Havil J. Gamma. Exploring Euler's Constant. – Princeton: Princeton University Press, 2003. – 266 p.
4. Glaisher J.W.L. On the History of Euler's Constant // The Genius of Euler. Reflections on his Life and Work. ed. W.Dunham – Washington D.C.: Mathematical Association of America, 2007. – pp. 147-152.
5. Sandifier C.E. Gamma The Constant. [Electronic resource] – Washington D.C.: MAA, 2007. – URL: http://www.maa.org/editorial/euler/»How Euler Did It 48 Gamma constant».pdf (date access 20.04.2010).
6. Mascheroni L. Adnotationes ad Euleri Calculum Integralem. – Ticini, 1790. – 72 p.
7. Dunham W. Euler: The master of us all. – Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1999. – 185 p.
8. Euler L. De Progressionibus harmonicis observationes // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1740. – Vol. 7. – P. 150-161.
9. Euler L. De summis serierum reciprocarum // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1740. – Vol. 7. – P. 123-134.
10. Euler L. Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1741. – Vol. 8. – P. 9-22.
11. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Пер. Выготского М.Я. – М.-Л: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 580 с.
12. Euler L. De summis serierum numeros Bernoullianos involventium // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1770. – Vol. 14. – P. 129-167.
13. Euler L. De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente // Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae. – 1785. – Vol. 5. – pp. 45-75.
14. Euler L. De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$ // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1769. – Vol. 13. – P. 3-66.
15. Красоткина Т.А. Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга // Историко-математические исследования, вып. X. – М.: Физматгиз, 1957. – С. 117-158.
16. Euler L. Briefwechsel // Leonhardi Euleri Opera Omnia. Ser. IVA: Commercium epistolicum. Vol. II .– Basel: Birkhдuser, 1998. – 757 p.
17. Juškevič A.P., Winter E. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764. – Berlin:Akademie-Verlag, 1965.– 420 p.
18. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН (ПФА РАН). Ф. 136. Оп. 1. №129-140.
19. Игнатушина И.В. Вопросы теории Г-функции в записных книжках Л. Эйлера // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера: Сборник научных статей. Выпуск 3. – Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2002. – С. 30-53.
20. Knuth D.E. Euler's Constant to 1271 Places / Donald E. Knut // Mathematics of Computation. – 1962. – Vol. 16, No. 79. – pp. 275-281.
21. Weisstein E.W. Erdos-Borwein Constant. [Electronic resource] // MathWorld – Wolfram Web Resource. URL: http://mathworld.wolfram.com/Erdos-BorweinConstant.html (date access 20.04.2010)
22. Erdös P. On arithmetical properties of Lambert series// Journal of Indian Mathematical Society. – 1948. – V. 12. – pp. 63-66.
23. Borwein P. B. On the irrationality of $\sum 1/(q^n + r)$ // Journal of Number Theory. – 1991. – V. 37, 3. – pp. 253-259.
24. Euler L. Methodus generalis summandi progressions // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1738. – Vol. 6. – P. 68-97.
25. Euler L. Consideratio quarumdam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1753. – Vol. 3. – P. 86-108.
26. Sandifier C.E. A false logarithm series. [Electronic resource] – Washington D.C.: Mathematical Association of America, 2007. – URL: http://www.maa.org/editorial/euler/»How Euler Did It 50 false log series».pdf (date access 20.04.2010)

27. Gautschi, W. On Euler's attempt to compute logarithms by interpolation: A commentary to his letter of February 16, 1734 to Daniel Bernoulli. // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2008 –V. 219, 2. – pp. 408-415.
28. Шухман А.Е., Шухман Е.В. Заметки о недесятичных системах счисления в опубликованных работах и записных книжках Леонарда Эйлера // Математика в высшем образовании. – 2008.– №6. – С. 143-146.
29. Юшкевич А.П. И.Г. Ламберт и Л. Эйлер // Историко-математические исследования, вып. XXV. – М.: Наука, 1980. – С. 189-217.
30. Finch, Steven R. Mathematical Constants. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 602 p.

Сведения об авторе:
Шухман Елена Владимировна, старший преподаватель кафедра информатики и методики преподавания информатики Оренбургского государственного педагогического университета
460044. г. Оренбург, ул. Конституции 9/1 кв. 25, тел. 89226217747, e-mail: moye@inbox.ru

Shukhman E.V.
Approximate calculation of some mathematical constants in the published and unpublished works of L. Eyler.
There is the published work of Eyler and note from his notebooks, connected with the calculation of the constant of Eyler-Maskheroni g and constant of Erdesh -Borveyn b.
The key words: history of mathematics, Leonard Eyler, Eyler-Maskheroni constant, Erdesh -Borveyn constant.

Bibliography:
1. Shukman E.V. Approximate calculation of pi using the series for the $arctg\ x$ in the published and unpublished works by Leonhard Euler. // Istoriya nauki i tekhniki. – 2008 – N.4. – pp. 2-17. (in Russian)
2. Shukman E.V. An estimate of remainder of the asymptotic series for calculating of π introduced by Euler. // Istoriya nauki i tekhniki. – 2009 – N.10. – pp. 2-7. (in Russian)
3. Havil J. Gamma. Exploring Euler's Constant. – Princeton: Princeton University Press, 2003 – 266 p.
4. Glaisher J.W.L. On the History of Euler's Constant. // The Genius of Euler. Reflections on his Life and Work. ed. W.Dunham – Washington D.C.: Mathematical Association of America, 2007. – pp.147-152.
5. Sandifier C.E. Gamma The Constant. [Electronic resource] – Washington D.C.: MAA, 2007. – URL: http://www.maa.org/editorial/euler/»How Euler Did It 48 Gamma constant».pdf (date access 20.04.2010).
6. Mascheroni L. Adnotationes ad Euleri Calculum Integralem. – Ticini, 1790 – 72 p.
7. Dunham W. Euler: The master of us all. – Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1999. – 185 p.
8. Euler L. De Progressionibus harmonicis observationes. // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1740 – Vol.7 – P.150-161.
9. Euler L. De summis serierum reciprocarum. // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1740 – Vol. 7 – P. 123-134.
10. Euler L. Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali. // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1741 – Vol. 8 – P. 9-22.
11. Euler L. Foundations of Differential Calculus– Moscow, 1949.– 580 p. (in Russian)
12. Euler L. De summis serierum numeros Bernoullianos involventium // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1770 – Vol. 14 – P. 129-167.
13. Euler L. De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente. // Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae. – 1785 – Vol. 5 – pp. 45-75
14. Euler L. De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$ // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1769 – Vol. 13 – P. 3-66.
15. Krasotkina T.A. The correspondence between Euler and Stirling. // Istoriko-matematicheskiye issledovaniya, vol. X. – M.: Fizmatgiz, 1957. – pp. 117-158. (in Russian)
16. Euler L. Briefwechsel // Leonhardi Euleri Opera Omnia. Ser. IVA: Commercium epistolicum. Vol. II – Basel: Birkhдuser, 1998. – 757 p.
17. Juљkevии A.P., Winter E. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764. – Berlin:Akademie-Verlag, 1965.– 420 p.
18. Sankt-Petersburg's branch of Archive Russian Science Academy, collection 136, list 1, documents 129-140.
19. Ignatushina I.V. Reviews of Gamma function theory in notebooks by L. Euler. // From the history of mathematics by XVIII sc. Vol.3 – Orenburg: OSPU, 2002. – pp. 30-53. (in Russian)
20. Knuth D.E. Euler's Constant to 1271 Places / Donald E. Knut // Mathematics of Computation – 1962 – Vol. 16, No. 79 – pp. 275-281.
21. Weisstein E.W. Erdos-Borwein Constant. [Electronic resource] // MathWorld – Wolfram Web Resource. URL: http://mathworld.wolfram.com/Erdos-BorweinConstant.html (date access 20.04.2010)
22. Erdцs P. On arithmetical properties of Lambert series// Journal of Indian Mathematical Society. – 1948 – V. 12 – pp. 63-66.
23. Borwein P. B. On the irrationality of $\sum 1/(q^n + r)$ // Journal of Number Theory. – 1991. – V. 37, 3 – pp. 253-259.
24. Euler L. Methodus generalis summandi progressions.// Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1738. – Vol. 6 – P. 68-97.
25. Euler L. Consideratio quarumdam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1753 – Vol. 3 – P. 86-108.
26. Sandifier C.E. A false logarithm series. [Electronic resource] – Washington D.C.: Mathematical Association of America, 2007. – URL: http://www.maa.org/editorial/euler/»How Euler Did It 50 false log series».pdf (date access 20.04.2010)
27. Gautschi, W. On Euler's attempt to compute logarithms by interpolation: A commentary to his letter of February 16, 1734 to Daniel Bernoulli. // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2008 –V. 219, 2 – pp. 408-415.
28. Shukhman A.E., Shukhman E.V. Notes about nondecimal numerations in the published papers and note-books by Leonard Euler. // Matematika v vysshem obrazovanii. – 2008.– №6. – pp.143-146. (in Russian)
29. Yushkevich A.P. J.H. Lambert and L. Euler. // Istoriko-matematicheskiye issledovaniya, vol. XXV. – M.: Nauka, 1980. – pp. 189-217. (in Russian)
30. Finch, Steven R. Mathematical Constants. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 602 p.