УДК 514.76

Харитонова С.В.
Оренбургский государственный университет
E-mail: hcb@yandex.ru

ТЕНЗОР КРУЧЕНИЯ ПЕРВОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ ЛОКАЛЬНО КОНФОРМНО ПОЧТИ КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

В данной статье вычислены компоненты тензора кручения первой канонической связности $\tilde{\nabla}$ локально конформно почти косимплектических (далее lcAC$_S$-) многообразий, изучен геометрический смысл обращения в нуль на пространстве присоединенной G-структуры компонент тензора кручения связности $\tilde{\nabla}$ таких многообразий.

Ключевые слова: почти контактные структуры, конформные преобразования, тензор кручения, связность.

1. Предварительные сведения. Пусть M^{2n+1} – гладкое нечетномерное многообразие размерности свыше трех; $C^{\infty}(M)$ – алгебра гладких функций многообразия M^{2n+1}; X(M) – $C^{\infty}(M)$-модуль гладких векторных полей на M^{2n+1}, d – оператор внешнего дифференцирования.

Почти контактной метрической (короче AC-) структурой [1], [2] на многообразии M называется совокупность (η,ξ,Φ,g) тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры; ξ – векторное поле, называемое характеристическим; Φ – поле тензора типа (1;1), называемое структурным эндоморфизмом модуля X(M), $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ – риманова метрика [1], [3]. При этом

1) $\eta(\xi)=1$;

2) $\eta\circ\Phi=0$;

3) $\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y)$, $X,Y\in X(M)$.

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим (AC-) многообразием.*

Напомним [3], [4], что почти контактная метрическая структура $S=(\eta,\xi,\Phi,g)$ называется *почти косимплектической* (AC$_S$-) структурой, если ее контактная и фундаментальная формы замкнуты. Тензор $\Omega(X,Y)=g(X,\Phi Y)$ кососимметричен и называется фундаментальной формой AC-структуры.

Пусть $S=(\eta,\xi,\Phi,g)$ – AC-структура на многообразии M^{2r+1}. В C^{∞}(M)-модуле X(M) гладких векторных полей на AC-многообразии внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $l=id-\eta\otimes\xi=-\Phi^2$ и $m=\eta\otimes\xi=id+\Phi^2$ на распределения $\mathsf{L}=\mathrm{Im}\,\Phi=\ker\eta$ и $\mathsf{M}=\ker\Phi=L(\xi)$ размерностей 2n и 1 соответственно, причем $X(M)=\mathsf{L}\oplus\mathsf{M}$. L называется *первым*, а M – *вторым фундаментальным распределением.* Пара $\{\Phi|_{\mathsf{L}},g|_{\mathsf{L}}\}$ определяет эрмитову структуру на распределении L, рассматриваемом как C-модуль. В распределении L^C вводятся в рассмотрение взаимно дополнительные проекторы: $\sigma=\frac{1}{2}(id-\sqrt{-1}\Phi)$ и $\bar{\sigma}=\frac{1}{2}(id+\sqrt{-1}\Phi)=\tau\circ\sigma$, где τ – иволютивный антиавтоморфизм, называемый оператором комплексного сопряжения.

Таким образом, комплексификация X^C(M) распадается в прямую сумму собственных подмодулей эндоморфизма Φ:

$$X^C(M)=D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}\oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}\oplus D_{\Phi}^{0}\ [2].$$

Доказано [1], что к (2n+1)-мерному AC-многообразию, как метрическому f-многообразию дефекта 1, внутренним образом присоединяется G-структура, структурной группой которой является группа Ли $\{e\}\times U(n)$. Тотальное пространство этой G-структуры состоит из модифицированных A-реперов, то есть комплексных реперов вида $(p,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat{1}},\ldots,\varepsilon_{\hat{n}})$, где $\varepsilon_0=\xi_p,\varepsilon_a=\sqrt{2}\sigma_p(e_a),\varepsilon_{\hat{a}}=\sqrt{2}\bar{\sigma}_p(e_a)$, где $(e_1,\ldots,e_n)$ – комплексный ортонормированный базис пространства L_p, как C-модуля, $p\in M$. Эти реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в этих реперах принимают вид:

$$(\Phi_i^j)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\sqrt{-1}I_n&0\\0&0&-\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix},(g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{pmatrix},\quad(1)$$

где I_n – единичная матрица порядка n. Здесь и далее индексы i, j, k пробегают значения от 0 до 2n, индексы a, b, c, d – значения от 1 до n, $\hat{a}=a+n$.

Из структуры матрицы метрического тензора вытекает правило поднятия и опускания индексов: $t^a_{\ldots}=t_{\hat{a}\ldots}; t_{a\ldots}=t^{\hat{a}}_{\ldots}$.

2. Локально конформно почти косимплектические многообразия. *Конформным преобразованием АС-структуры* $S=(\eta,\xi,\Phi,g)$ на многообразии М называется переход от S к АС-структуре $\tilde{S}=(\tilde{\eta},\tilde{\xi},\tilde{\Phi},\tilde{g})$, при этом

$$\tilde{\eta}=e^{-\sigma}\eta,\ \tilde{\xi}=e^{\sigma}\xi,\ \tilde{\Phi}=\Phi,\ \tilde{g}=e^{-2\sigma}g,$$

где σ – определяющая функция соответствующего конформного преобразования. Если σ =*const*, конформное преобразование называется тривиальным, или гомотетией.

АС-структура S на многообразии М называется *локально конформно почти косимплектической*, короче – $lcAC_S$-структурой, если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p\in M$ допускает конформное преобразование в почти косимплектическую структуру [5], [6]. Назовем это преобразование локально конформным. Многообразие, на котором фиксирована $lcAC_S$ -структура, называется $lcAC_S$-многообразием. Заметим, что при σ = *const* получаем AC_S-многообразие.

Можно показать, что априори определенная локально, 1-форма $d\sigma$ с компонентами $\{\sigma_i\}$ определена на М глобально [6]. Форма α с компонентами $\{\sigma_i\}$ называется *контактной формой Ли*.

В работе [6] на пространстве присоединенной G-структуры найдена первая группа структурных уравнений $lcAC_S$-многообразий:

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega^a=-\omega_b^a\wedge\omega^b+B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b+\\
&\quad +B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+B^a{}_b\omega\wedge\omega^b+B^{ab}\omega\wedge\omega_b;\\
&2)\ d\omega_a=\omega_a^b\wedge\omega_b+B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b+\\
&\quad +B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+B_a{}^b\omega\wedge\omega_b+B_{ab}\omega\wedge\omega^b;\\
&3)\ d\omega=C^b\omega\wedge\omega_b+C_b\omega\wedge\omega^b.
\end{aligned}\tag{2}$$

При этом:

$$\begin{aligned}
&1)\ B^{[abc]}=B_{[abc]}=0;\ 2)\ B^{[ab]}=B_{[ab]}=0;\\
&3)\ B_a{}^b=B^b{}_a=\sigma_0\delta_a^b;\\
&4)\ B^{ab}{}_c=2\sigma^{[a}\delta_c^{b]};\ 5)\ B_{ab}{}^c=2\sigma_{[a}\delta_{b]}^c;\\
&6)\ C^b=-\sigma^b;\ 7)\ C_b=-\sigma_b,
\end{aligned}\tag{3}$$

где $\{\omega_j^i\}$ – компоненты формы римановой связности, $\{\omega^i\}$ – компоненты формы смещения (причем, $\omega^0=\omega$), а $B^{ab}{}_c$, $B_{ab}{}^c$; B^{abc}, B_{abc}; B^{ab}, B_{ab}; $B^a{}_b$, $B_b{}^a$; C^b, C_b – гладкие функции на пространстве присоединенной G-структуры, служащие компонентами первого, второго, третьего, четвертого и пятого структурных тензоров (тензоров Кириченко)[1].

Напомним [1], что на АС-многообразии M^{2n+1} форма связности ∇ задана компонентами ω_j^i, то есть ее матрица имеет вид:

$$(\omega_i^j)=\begin{pmatrix}\omega_0^0=0 & \omega_a^0 & \omega_{\hat{a}}^0\\ \omega_0^a & \omega_b^a & \omega_{\hat{b}}^a\\ \omega_0^{\hat{a}} & \omega_b^{\hat{a}} & \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}}=-\omega_a^b\end{pmatrix}.\tag{4}$$

Тензорные компоненты формы римановой связности $lcAC_S$-многообразий на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид [6]:

$$\begin{aligned}
&\omega_{\hat{b}}^a=-2\sigma^{[a}\delta_c^{b]}\omega^c-2B^{cab}\omega_c;\\
&\omega_b^{\hat{a}}=-2\sigma_{[a}\delta_{b]}^c\omega_c-2B_{cab}\omega^c;\\
&\omega_0^a=\sigma_0\omega^a+B^{ab}\omega_b-\sigma^a\omega;\\
&\omega_0^{\hat{a}}=\sigma_0\omega_a+B_{ab}\omega^b-\sigma_a\omega;\\
&\omega_{\hat{a}}^0=-\sigma_0\omega^a-B^{ab}\omega_b+\sigma^a\omega;\\
&\omega_a^0=-\sigma_0\omega_a-B_{ab}\omega^b+\sigma_a\omega.
\end{aligned}\tag{5}$$

3. Геометрия первой канонической связности локально конформно почти косимплектических многообразий. Рассмотрим форму θ с компонентами $\{\theta_j^i\}$, где

$$\theta_b^a=\omega_b^a;\ \theta_{\hat{b}}^{\hat{a}}=\omega_{\hat{b}}^{\hat{a}}=-\omega_a^b;$$

$$\theta_0^0=\theta_a^0=\theta_{\hat{a}}^0=\theta_0^a=\theta_0^{\hat{a}}=\theta_{\hat{b}}^a=\theta_a^{\hat{b}}=0.\tag{6}$$

Можно доказать [7], что построенная выше форма θ с компонентами $\{\theta_j^i\}$ является формой связности АС-структуры. Построенную указанным образом связность назовем *первой канонической связностью* АС-структуры и обозначим $\tilde{\nabla}$ [7]. Справедлива

Теорема. [7]. В терминах первой канонической связности $\tilde{\nabla}$ на АС-многообразии имеют место соотношения:

1) $\tilde{\nabla}\Phi=0$; 2) $\tilde{\nabla}\eta=0$; 3) $\tilde{\nabla}\xi=0$; 4) $\tilde{\nabla}g=0$.

Пусть $\tilde{S}$ – тензор кручения связности $\tilde{\nabla}$ АС-многообразия, а $\{\tilde{S}_{jk}^i\}$ – его компоненты на пространстве присоединенной G-структуры. Вычислим на пространстве присоединенной G-структуры компоненты $\{\tilde{S}_{jk}^i\}$ $lcAC_S$-многообразия. Для этого запишем первую группу структурных уравнений АС-структуры в связности $\tilde{\nabla}$ и сравним ее со структурными уравнениями первой группы $lcAC_S$-многообразия. Для АС-многообразия уравнения имеют вид [1]:

$$d\omega^i=-\theta_j^i\wedge\omega^i+\frac{1}{2}\tilde{S}_{jk}^i\omega^i\wedge\omega^k\tag{7}$$

Расписав данные соотношения на пространстве присоединенной G-структуры с учетом (2), (3) и (6), получим следующие ненулевые элементы спектра тензора $\tilde{S}$:

$$\underset{(0)}{\tilde{S}} = \left\{ \tilde{S}^0_{a0} = \sigma_a, \tilde{S}^0_{\hat{a}0} = \sigma^a \right\},$$

$$\underset{(1)}{\tilde{S}} = \left\{ \tilde{S}^a_{b0} = \tilde{S}^{\hat{b}}_{\hat{a}0} = -\sigma_0 \delta^a_b \right\},$$

$$\underset{(2)}{\tilde{S}} = \left\{ \tilde{S}^a_{\hat{b}0} = B^{ab}, \tilde{S}^{\hat{a}}_{b0} = -B_{ab} \right\},$$

$$\underset{(3)}{\tilde{S}} = \left\{ \tilde{S}^a_{\hat{b}c} = -2\sigma^{[a}\delta^{b]}_c, \tilde{S}^{\hat{a}}_{b\hat{c}} = -2\sigma_{[a}\delta^c_{b]} \right\},$$

$$\underset{(4)}{\tilde{S}} = \left\{ \tilde{S}^a_{\hat{b}\hat{c}} = 2B^{abc}, \tilde{S}^{\hat{a}}_{bc} = 2B_{abc} \right\}, \qquad (8)$$

остальные элементы равны нулю.

Выясним геометрический смысл обращения в нуль элементов спектра тензора кручения. Для этого поочередно приравняем к нулю каждый элемент спектра тензора кручения и проанализируем полученные тождества.

Рассмотрим $\underset{(0)}{\tilde{S}}$. Пусть

$$\tilde{S}^0_{a0} = 0, \tilde{S}^0_{\hat{a}0} = 0. \qquad (9)$$

На пространстве присоединенной G-структуры эти равенства согласно (8) равносильны тождествам: $\sigma_a = 0, \sigma^a = 0$. Тогда $d\sigma = \sigma_0 \omega$, следовательно, форма Ли $\alpha \parallel \omega$, а значит [6], на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения $lcAC_S$-многообразия индуцируется почти келерова структура.

Очевидно, для $\tilde{S}$ компонента $\tilde{S}^0_{00} = 0$. Следовательно, объединив это с равенствами (9), получим $\tilde{S}^0_{k0} = 0$. Запишем это соотношение в безындексной форме: $\eta \circ \tilde{S}(X, \xi) = 0, X \in X(M)$.

Таким образом, верна

Теорема. На $lcAC_S$-многообразии М следующие утверждения равносильны:

1) $\underset{(0)}{\tilde{S}} = 0$;

2) $\eta \circ \tilde{S}(X, \xi) = 0, X \in X(M)$;

3) на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения многообразия М индуцируется почти келерова структура.

Пусть $\underset{(1)}{\tilde{S}} = 0$. Согласно (8) это равносильно $\sigma_0 = 0$, то есть $\alpha(\xi) = d\sigma(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi(\sigma) = 0$. Последнее означает, что функция σ постоянна на траекториях характеристического вектора ξ, то есть σ является первым интегралом потока, определенного характеристическим вектором.

В фиксированной точке многообразия М условия $\tilde{S}^a_{b0} = 0, \tilde{S}^{\hat{b}}_{\hat{a}0} = 0$ запишутся, очевидно, как $\tilde{S}(\varepsilon_b, \varepsilon_0)^a = 0, \tilde{S}(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_0)^{\hat{a}} = 0$. Так как $\xi = \varepsilon_0$, а ε_a и $\varepsilon_{\hat{a}}$ – базисные векторы линейных пространств $(D_\Phi^{\sqrt{-1}})_p$ и $(D_\Phi^{-\sqrt{-1}})_p$, $p \in M$, соответственно последние равенства можно записать в виде:

$$\sigma \circ \tilde{S}(\sigma(X), \xi) = 0, \quad \bar{\sigma} \circ \tilde{S}(\bar{\sigma}(X), \xi) = 0, X \in L^C.$$

Данные равенства комплексно сопряжены, поэтому рассмотрим, например, первое. По определению проектора σ будем иметь:

$$(id - \sqrt{-1}\Phi) \circ \tilde{S}((id - \sqrt{-1}\Phi)(X), \xi) = 0, \quad X \in L^C.$$

Раскрыв это выражение по линейности, выделив действительную и мнимую часть, получим:

$$\tilde{S}(X, \xi) - \Phi \circ \tilde{S}(\Phi X, \xi) - \\ - \sqrt{-1}\left\{\Phi \circ \tilde{S}(X, \xi) + \tilde{S}(\Phi X, \xi)\right\} = 0, X \in L^C.$$

Это соотношение выполняется тождественно, если равны нулю и его действительная, и его мнимая часть, а с учетом тождества $\left(\Phi|_{L^C}\right)^2 = -id$ [1] достаточно рассмотреть, например, равенство нулю действительной части. Так как проектором на L^C является эндоморфизм $l = -\Phi^2$, то с учетом $\Phi^3 + \Phi = 0$ окончательно получим:

$$\tilde{S}(\Phi^2 X, \xi) - \Phi \circ \tilde{S}(\Phi X, \xi) = 0, X \in X(M).$$

Описанная процедура называется процедурой восстановления тождества [2].

Проделанные рассуждения позволяют сформулировать следующий результат:

Теорема. На $lcAC_S$-многообразии следующие утверждения равносильны:

1) $\underset{(1)}{\tilde{S}} = 0$;

2) $\tilde{S}(\Phi^2 X, \xi) - \Phi \circ \tilde{S}(\Phi X, \xi) = 0, X \in X(M)$;

3) функция σ является первым интегралом потока, определенного характеристическим вектором.

Рассмотрим тензор $\underset{(2)}{\tilde{S}}$ с компонентами $\left\{ \tilde{S}^a_{\hat{b}0} = B^{ab}, \tilde{S}^{\hat{a}}_{b0} = -B_{ab} \right\}$. Согласно (8) это равносильно $B^{ab} = 0, B_{ab} = 0$. Что, в свою очередь, равносильно $\Phi^0_{a,b} = 0$ [6]. На пространстве присоединенной G-структуры последнее тождество запишется $\eta \circ \nabla_{\eta_b}(\Phi)\varepsilon_a = 0$. Проведя процедуру восстановления тождества, получим

$$\eta \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y - \eta \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y = 0, X, Y \in X(M).$$

В фиксированной точке многообразия M условия $\tilde{S}^{a}_{\hat{b}0}=0, \tilde{S}^{\hat{a}}_{b0}=0$ запишутся, очевидно, $\tilde{S}(\varepsilon_{\hat{b}},\varepsilon_0)^a=0, S(\varepsilon_b,\varepsilon_0)^{\hat{a}}=0$. Проводя процедуру восстановления данных соотношений, убеждаемся в их равносильности следующему:

$$\tilde{S}(\Phi^2X,\xi)+\Phi\circ\tilde{S}(\Phi X,\xi)=0, X\in X(M). \quad (10)$$

Таким образом, доказана

Теорема. На $lcAC_S$-многообразии следующие утверждения равносильны:

1) $\underset{(2)}{\tilde{S}}=0$;

2) $\eta\circ\nabla_{\Phi^2X}(\Phi)\Phi^2Y-\eta\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y=0, X,Y\in X(M)$;

3) $\tilde{S}(\Phi^2X,\xi)+\Phi\circ\tilde{S}(\Phi X,\xi)=0, X\in X(M)$.

Пусть тензор $\underset{(3)}{\tilde{S}}$ равен нулю, то есть его компоненты $\tilde{S}^{a}_{\hat{b}c}=0, \tilde{S}^{\hat{a}}_{b\hat{c}}=0$. На пространстве присоединенной G-структуры согласно (8, 9) получим равенства

$$\sigma^{[a}\delta^{b]}_{c}=0, \sigma_{[a}\delta^{c}_{b]}=0. \quad (11)$$

Раскроем скобки альтернации в первом из них: $\sigma^a\delta^b_c-\sigma^b\delta^a_c=0$. Отсюда, свернув по a и c, получим $\sigma^a(n-1)=0$. Поскольку $\dim M^{2n+1}>3$, получим $\sigma^a=0$. Аналогичным образом из второго равенства (11) найдем $\sigma_a=0$. Заметим, что при $\sigma^a=\sigma_a=0$ форма Ли $\alpha\parallel\omega$, и, значит [6], на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения $lcAC_S$-многообразия индуцируется почти келерова структура, а тензор $\underset{(0)}{\tilde{S}}$ также равен нулю.

Записав условия $\tilde{S}^{a}_{\hat{b}c}=0, \tilde{S}^{\hat{a}}_{b\hat{c}}=0$ в безындексной форме и выполнив процедуру восстановления тождеств, получим:

$$\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi^2Y)+\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y)-\Phi\circ\tilde{S}(\Phi X,\Phi^2Y)+$$
$$+\Phi\circ\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi Y)=0, X,Y\in X(M).$$

Доказана

Теорема. На $lcAC_S$-многообразии следующие утверждения равносильны:

1) $\underset{(3)}{\tilde{S}}=0$;

2) $\begin{aligned}&\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi^2Y)+\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y)-\\&-\Phi\circ\tilde{S}(\Phi X,\Phi^2Y)+\Phi\circ\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi Y)=0\end{aligned}$;

3) $\eta\circ\tilde{S}(X,\xi)=0, X\in X(M)$.

4) на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения многообразия M индуцируется почти келерова структура.

Рассмотрим $\underset{(4)}{\tilde{S}}=\{\tilde{S}^{a}_{\hat{b}\hat{c}},\tilde{S}^{\hat{a}}_{bc}\}$. Этот тензор равен нулю, если на пространстве присоединенной G-структуры $\tilde{S}^{a}_{\hat{b}\hat{c}}=0, \tilde{S}^{\hat{a}}_{bc}=0$. Проводя процедуру восстановления данных тождеств, убеждаемся в их равносильности следующему:

$$\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi^2Y)-\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y)-\Phi\circ\tilde{S}(\Phi X,\Phi^2Y)-$$
$$-\Phi\circ\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi Y)=0, X,Y\in X(M) \quad .$$

С учетом (8) обращение в нуль тензора $\underset{(4)}{\tilde{S}}$ равносильно тождествам $B^{abc}=0$ и $B_{abc}=0$. Последние, согласно [6], означают, что на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения $lcAC_S$-многообразия M индуцируется структура класса W_4 в классификации Грэя - Хервеллы [8] почти эрмитовых структур.

Таким образом, справедлива

Теорема. На $lcAC_S$-многообразии следующие утверждения равносильны:

1) $\underset{(4)}{\tilde{S}}=0$;

2) $\begin{aligned}&\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi^2Y)-\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y)-\\&-\Phi\circ\tilde{S}(\Phi X,\Phi^2Y)-\Phi\circ\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi Y)=0;\end{aligned}$

3) на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения $lcAC_S$-многообразия M индуцируется структура класса W_4 в классификации Грэя - Хервеллы почти эрмитовых структур.

Из строения компонент (8) тензора кручения $\tilde{S}$ связности $\tilde{\nabla}$ получаем еще один справедливый на $lcAC_S$-многообразии результат. Именно верна

Теорема. Тензор кручения первой канонической связности на $lcAC_S$-многообразии обладает следующими свойствами:

1) $\eta\circ\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y)=0; \quad (12)$

2) $\begin{aligned}&\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi^2Y)-\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y)+\\&+\Phi\circ\tilde{S}(\Phi X,\Phi^2Y)+\Phi\circ\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi Y)=0\end{aligned}$.

Доказательство. 1) Согласно (8) $\tilde{S}^{0}_{bc}=0, \tilde{S}^{0}_{b\hat{c}}=0, \tilde{S}^{0}_{\hat{b}\hat{c}}=0$. Записав данные соотношения в без индексной форме, получим тождества:

$$\eta\circ(\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi^2Y)-\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y))=0,$$

$$\eta\circ(\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi^2Y)+\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y))=0, X,Y\in X(M).$$

Что равносильно

$$\eta\circ\tilde{S}(\Phi^2X,\Phi^2Y)=0, \eta\circ\tilde{S}(\Phi X,\Phi Y)=0, X,Y\in X(M). \quad (14)$$

Заметим, что последние два тождества эквивалентны. Таким образом, (12_1) доказано.

2) Аналогично убеждаемся, что равенства $\tilde{S}^a_{bc} = 0, \tilde{S}^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} = 0$ равносильны (12_2).

В заключение докажем результат, выражающий связь между первой канонической и римановой связностями $lcAC_S$-многообразия.

Теорема. На $lcAC_S$-многообразии первая каноническая связность $\tilde{\nabla}$ совпадает с римановой связностью ∇ тогда и только тогда, когда M^{2n+1} –косимплектическое многообразие.

Доказательство. Компоненты формы связности ∇, отличные от компонент связности $\tilde{\nabla}$ и отличные от нуля, выражаются равенствами (5). С учетом (6) очевидно, что $\tilde{\nabla} = \nabla$ тогда и только тогда, когда $\omega^a_{\hat{b}} = 0, \omega^{\hat{a}}_b = 0, \omega^a_0 = 0, \omega^0_a = 0$. Итак, следуя (5), получим:

$$\omega^a_{\hat{b}} = 0 \Leftrightarrow -2\sigma^{[a}\delta^{b]}_c\omega^c - 2B^{cab}\omega_c = 0;$$

$$\omega^{\hat{a}}_b = 0 \Leftrightarrow -2\sigma_{[a}\delta^c_{b]}\omega_c - 2B_{cab}\omega^c = 0;$$

$$\omega^a_0 = 0 \Leftrightarrow \sigma_0\omega^a + B^{ab}\omega_b - \sigma^a\omega = 0; \qquad (15)$$

$$\omega^0_a = 0 \Leftrightarrow -\sigma_0\omega_a - B_{ab}\omega^b + \sigma_a\omega = 0.$$

Что в силу линейной независимости базисных форм равносильно

$$B^{cab} = 0, B_{cab} = 0, B^{ab} = 0, B_{ab} = 0,$$
$$\sigma^a = 0, \sigma_a = 0, \sigma_0 = 0. \qquad (16)$$

В силу полученных соотношений структурные уравнения $lcAC_S$-многообразия примут вид:

1) $d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b$;

2) $d\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b$; (17)

3) $d\omega = 0$.

Хорошо известно [3], что это структурные уравнения косимплектических многообразий.

Обратно, если $lcAC_S$-многообразие является косимплектическим, то выполняются равенства (15) и (16). Следовательно, компоненты формы связности ∇ в равенствах (5) все равны нулю. Тогда с учетом (6) $\tilde{\nabla} = \nabla$, что и требовалось доказать.

4.05.2010

Список использованной литературы:

1. Кириченко, В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях [Текст] / В.Ф. Кириченко. – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
2. Кириченко, В.Ф. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий [Текст] / В.Ф. Кириченко, А.Р. Рустанов // Математический сборник. – 2002. – Т. 8. – №193. – С. 1173-1201.
3. Кириченко, В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий [Текст] / В.Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ. – 1986. – Т. 18. – С. 25-71.
4. Goldberg, S. Integrability of almost cosymplectic structures [Text] / S. Goldberg, K. Yano // Pacifc J. Math. – 1969. – Vol.31. – №2. – P. 373-382.
5. Olszak, Z. Locally conformal almost cosymplectic manifolds [Text] / Z. Olszak // Colloq. math. – 1989. – Vol.57. – N1. – P. 73-87.
6. Харитонова, С.В. О геометрии локально конформно почти косимплектических многообразий / С.В. Харитонова // Математические заметки. – 2009. – Т. 86. – Вып.1. – С. 126-138.
7. Баклашова, Н.С. Геометрия тензора кручения первой канонической связности LCQS многообразий / Н.С. Баклашова // Тезисы докладов Международной конференции «Геометрия в Одессе – 2006». – Одесса: Фонд «Наука». – 2006. – С. 27-28.
8. Gray, A. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants [Text] / A. Gray, L.M. Hervella // Ann. Math. pure ed a Pl. – 1980. –Vol. 123. – P. 35-58.

Сведения об авторе:

Харитонова Светлана Владимировна, старший преподаватель кафедры геометрии и топологии Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2534, тел. (3532)372532, e-mail: hcb@yandex.ru.

Kharitonova S.V.

The tensor of twisting the first canonical connectedness locally of conformally almost cosimplect varieties

This author calculated the components of the tensor of twisting the first canonical connectedness locally of conformally almost cosimplect (further lcACS-) varieties, studied the geometric sense of rotation into zero on the space of the connected G- structure of the components of the tensor of twisting the connectedness of such varieties.

The key words: almost contact structures, conformal conversions, the tensor of twisting, connectedness.