УДК 514.76

Рустанов А.Р.[1], Щипкова Н.Н.[2]
[1]Российский государственный университет туризма и сервиса, Институт сервиса, г. Москва (филиал)
[2]Оренбургский государственный университет
E-mail: aligadzhi@yandex.ru, ningeom@pochtamt.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА C_{11}

В работе рассматривается новый класс почти контактных метрических многообразий, обобщающий класс косимплектических многообразий. Получена полная классификация АС-многообразий класса C_{11} постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, косимплектическое многообразие, тензор голоморфной секционной кривизны.

Контактные и почти контактные структуры составляют один из наиболее содержательных примеров дифференциально-геометрических структур. Их изучение именно как дифференциально-геометрических структур началось с появлением основополагающих работ С. Чженя [1], Дж. Грея [2], С. Сасаки [3].

Впервые классификация почти контактных метрических структур была приведена в работах: Д. Чинья и Дж. Марреро [4]; Д. Чинья и С. Гонзалез [5]; В.Ф. Кириченко [6]. В данной работе мы придерживаемся терминологии, принятой в работе [6].

В данной работе рассматриваются почти контактные метрические (коротко, АС-) многообразия класса C_{11} в классификации Чинья и Гонзалеза. Почти контактные метрические многообразия класса C_{11} характеризуются тождеством [5]:

$$\nabla_X(\Omega)(Y,Z) = -\eta(X)\nabla_\xi(\Omega)(\Phi Y,\Phi Z), \qquad (1)$$

где X,YOX(M). Поскольку

$$\nabla_X(\Omega)(Y,Z) = <Y, \nabla_X(\Phi)Z> = -<\nabla_X(\Phi)Y, Z>,$$

тождество (1) запишется в виде

$$-<\nabla_X(\Phi)Y, Z> = -\eta(X)<\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y, \Phi Z>.$$

Полученное равенство с учетом соотношения $<\Phi X,\Phi Y> = <X,Y> - \eta(X)\eta(Y)$ перепишем в виде $<\nabla_X(\Phi)Y, Z> = \eta(X)<\Phi\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y, Z>,\ X,Y,Z \in X(M)$. Так как ZOX(M) произвольное векторное поле, то из последнего равенства получим:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \eta(X)\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y;\ X,Y \in X(M). \qquad (2)$$

Пусть (M, x, h,Φ,g) – АС-многообразие класса C_{11}. В тождестве (2) положим Y=x, тогда

$$\nabla_X(\Phi)\xi = 0,\ X \in X(M). \qquad (3)$$

Поскольку для АС-многообразий имеем $\Phi\circ\nabla_X(\Phi)\xi = \nabla_X\xi,\ X \in X(M)$, то согласно (3) получим, что

$$\nabla_X\xi = 0,\ X \in X(M). \qquad (4)$$

В частности, из (3) следует, что $\nabla_\xi(\Phi)\xi = 0$. Значит, и шестой структурный тензор АС-структуры класса C_{11} [7] равен нулю, т. е.

$$G = \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\xi = 0. \qquad (5)$$

Кроме того, из (3) следует, что $\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = 0,\ X \in X(M)$. А значит, четвертый и пятый структурные тензоры АС-структуры класса C_{11} [7] равны нулю, т. е.

$$1)\ E(X) = -\frac{1}{2}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\} = 0;$$

$$2)\ F(X) = \frac{1}{2}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\} = 0,\ X,Y \in X(M) \qquad (6)$$

А третий структурный тензор АС-структуры класса C_{11} [7] примет вид:

$$D(X) = \frac{1}{4}\left\{-\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X + \Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X\right\},\ X,Y \in X(M). \qquad (7)$$

Если в тождестве (2) положить X=x, то

$$\nabla_\xi(\Phi)Y = \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y,\ Y \in X(M). \qquad (8)$$

В частности,

$$\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y = \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 Y,\ Y \in X(M). \qquad (9)$$

Отсюда $\eta(\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y) = \eta(\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 Y) = 0$, $Y \in X(M)$, т. е.

$$\eta(\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y) = 0,\ Y \in X(M). \qquad (10)$$

С учетом (9) и (10) третий структурный тензор АС-структуры класса C_{11} примет вид:

$$D(X) = \frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)X,\ X \in X(M). \qquad (11)$$

Теперь заменим в тождестве (2) X на ФX, тогда

$$\nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y = 0;\ X,Y \in X(M). \qquad (12)$$

Таким образом, структурные тензоры АС-структуры класса C_{11} имеют вид:

1) $B(X,Y) = 0$; 2) $C(X,Y) = 0$; 3) $D(X) = \frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)X$;
4) $E(X) = 0$; 5) $F(X) = 0$; 6) $G = 0$.

Таким образом, имеет место следующее:

Предложение 1. Пусть S=(F,x,h,g) – АС-структура на многообразии М. Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) S – АС-структура класса C_{11};

(2) $B=C=D_0=E=F=G=0$;

(3) S – АС-32-структура.

Расписывая (2) на пространстве присоединенной G-структуры [6], получим следующее:

Предложение 2. На пространстве присоединенной G-структуры компоненты ковариантного дифференциала структурного оператора имеют вид:

$$1)\ \Phi^0_{0,i}=\Phi^a_{b,i}=\Phi^{\hat a}_{\hat b,i}=\Phi^i_{0,j}=\Phi^a_{\hat b,c}= =\Phi^a_{\hat b,\hat c}=\Phi^{\hat a}_{b,c}=\Phi^{\hat a}_{b,\hat c}=0;$$

$$2)\ D^a{}_{\hat b}=B^{ab}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat b,0};\ 3)\ D^{\hat a}{}_b=B_{ab}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,0}.$$

Предложение 3. Пусть S=(F,x,h,g) – АС-32-структура на многообразии М. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$1)\ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\Phi Y=0;\ 2)\ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\Phi^2 Y=0;$$

$$3)\ \nabla_X(\Phi)\xi=0;\ 4)\ \nabla_X\xi=0.$$

Предложение 4. АС-32-структура является косимплектической структурой тогда и только тогда, когда $B^{ab}=B_{ab}=0$, т. е. $\nabla_\xi(\Phi)X=0$.

Предложение 4 дает примеры АС-32-структур, пример 3-мерной АС-32-структуры дается в [5].

В силу вышеизложенного первая группа структурных уравнений АС-структуры класса C_{11} на пространстве присоединенной G-структуры примет вид [6]:

$$\begin{aligned}&1)\ d\omega=0;\\&2)\ d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+B^{ab}\omega\wedge\omega_b;\\&3)\ d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+B_{ab}\omega\wedge\omega^b,\end{aligned}\qquad(13)$$

где $B^{ab}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat b,0},\ B_{ab}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,0},$

$\overline{B^{ab}}=B_{ab},\ B^{ab}=-B^{ba},\ B_{ab}=-B_{ba}.$

Стандартная процедура дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений (13) дает:

$$\begin{aligned}&1)\ d\theta^a_b+\theta^a_c\wedge\theta^c_b=A^{ad}_{bc}\omega^c\wedge\omega_d;\\&2)\ dB^{ab}+B^{cb}\theta^a_c+B^{ac}\theta^d_c=D^{ab0}\omega;\\&3)\ dB_{ab}-B_{cb}\theta^c_a-B_{ac}\theta^c_b=D_{ab0}\omega,\end{aligned}\qquad(14)$$

где $A^{ad}_{[bc]}=A^{[ad]}_{bc}=0$.

Дифференцируя внешним образом (14:1), получим:

$$dA+A^{hd}_{bc}\theta^a_h+A^{ah}_{bc}\theta^d_h-A^{ad}_{hc}\theta^h_b-A^{ad}_{bh}\theta^h_c= =A^{ad}_{bch}\omega^h+A^{adh}_{bc}\omega_h,\qquad(15)$$

где $\{A^{ad}_{bch},A^{adh}_{bc}\}$ – система функций, симметричная по любой паре верхних либо нижних индексов, служащая на пространстве присоединенной G-структуры компонентами ковариантного дифференциала тензора голоморфной секционной кривизны. При этом получим тождества:

$$1)\ A^{a[c}_{bh}B^{|h|d]}=0;\ 2)\ A^{ah}_{b[c}B_{|h|d]}=0.\qquad(16)$$

Тождество (15:1) назовем первым фундаментальным тождеством.

Для тензорных компонент формы римановой связности АС-структуры имеем следующие соотношения на пространстве присоединенной G-структуры [6]:

$$\begin{aligned}&1)\ \theta^a_{\hat b}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat b,k}\omega^k;\ 2)\ \theta^{\hat a}_b=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,k}\omega^k;\\&3)\ \theta^a_0=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,k}\omega^k;\ 4)\ \theta^{\hat a}_0=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,k}\omega^k;\\&5)\ \theta^0_a=-\sqrt{-1}\Phi^0_{a,k}\omega^k;\ 6)\ \theta^0_{\hat a}=\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat a,k}\omega^k.\end{aligned}\qquad(17)$$

Равенства (17) для АС-32-структуры примут вид:

$$\begin{aligned}&1)\ \theta^a_{\hat b}=-B^{ab}\omega;\ 2)\ \theta^{\hat a}_b=-B_{ab}\omega;\\&3)\ \theta^a_0=\theta^{\hat a}_0=\theta^0_a=\theta^0_{\hat a}=0.\end{aligned}\qquad.(18)$$

Дифференцируя внешним образом (18), получим:

$$\begin{aligned}&1)\ d\theta^a_{\hat b}=B^{cb}\theta^a_c\wedge\omega+B^{ac}\theta^b_c\wedge\omega;\\&2)\ d\theta^{\hat a}_b=-B_{cb}\theta^c_a\wedge\omega-B_{ac}\theta^c_b\wedge\omega;\\&3)\ d\theta^a_0=d\theta^{\hat a}_0=d\theta^0_a=d\theta^0_{\hat a}=0.\end{aligned}\qquad(19)$$

Расписывая вторую группу структурных уравнений римановой связности [6]

$$d\theta^i_j+\theta^i_k\wedge\theta^k_j=\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,\qquad(20)$$

где $\{R^i_{jkl}\}$ – компоненты тензора Римана - Кристоффеля, на пространстве присоединенной G-структуры, получим:

$$1)\ R^a_{bc\hat d}=A^{ad}_{bc};\ 2)\ R^{\hat a}_{\hat b c\hat d}=-A^{bd}_{ac},\qquad(21)$$

а остальные компоненты нулевые.

Ковариантные компоненты тензора Риччи на пространстве расслоения реперов вычисляются по формуле $S_{ij} = -R^k_{ijk}$, которая на пространстве присоединенной G-структуры в силу (21) принимает вид:

$$S_{a\hat{b}} = S_{\hat{b}a} = A^{bc}_{ac}\ , \qquad (22)$$

остальные компоненты нулевые. В частности, скалярная кривизна c вычисляется по формуле $\chi = g^{ij}S_{ij} = 2A^{ab}_{ab}$.

Почти контактное метрическое многообразие M называется <u>многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны</u> c, если [8] $\forall X \in L \Rightarrow \langle R(X, \Phi X)X, \Phi X\rangle = c\|X\|^4$, где $c \in C^\infty(M)$. Если к тому же c=const, многообразие называется <u>многообразием глобально постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны</u>.

На пространстве присоединенной G-структуры это равенство запишется в виде:

$$4R_{\hat{a}bc\hat{d}}X^{\hat{a}}X^bX^cX^{\hat{d}} = -4cg_{\hat{a}b}g_{c\hat{d}}X^{\hat{a}}X^bX^cX^{\hat{d}}\ .$$

С учетом вида матриц структурного оператора и метрического тензора последнее равенство можно переписать в виде

$$\left(R_{\hat{a}bc\hat{d}} + c\delta^a_b\delta^d_c\right)X^{\hat{a}}X^bX^cX^{\hat{d}} = 0\ .$$

Поляризация этого соотношения приводит нас к следующему результату.

<u>Предложение 5</u> [9]. Почти контактное метрическое многообразие является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда

$$R^{(a}{}_{(bc)}{}^{d)} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\ , \qquad (23)$$

где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = \delta^a_b\delta^d_c - \delta^a_c\delta^d_b$.

Если M – AC-многообразие класса C_{11}, то с учетом (21) и (23) получим

<u>Теорема 1.</u> AC-многообразие класса C_{11} является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры

$$A^{ad}_{bc} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\ , \qquad (24)$$

где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = \delta^a_b\delta^d_c - \delta^a_c\delta^d_b$.

Продифференцируем с учетом (15) соотношение (24): $-\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}dc = A^{ad}_{bch}\omega^h + A^{adh}_{bc}\omega_h$. Пусть $dc = c_h\omega^h + c^h\omega_h$. Сравнивая с предыдущим соотношением, с учетом линейной независимости базисных форм получаем, что $\tilde{\delta}^{ad}_{bc}c_h = 2A^{ad}_{bch}$. Поскольку $A^{ad}_{bch} = A^{ad}_{bhc}$, имеем отсюда, что $\tilde{\delta}^{ad}_{bc}c_h = \tilde{\delta}^{ad}_{bh}c_c$. Свертывая это равенство сначала по индексам c и d, а затем по индексам a и b, получаем, что $(n^2-1)c_h = 0$, а значит, $c_h = 0, c^h = \bar{c}_h = 0$. Следовательно, $dc = 0$, т. е. c=const.

Таким образом, доказана следующая теорема, являющаяся контактным аналогом классической теоремы Шура для AC-многообразий класса C_{11}.

<u>Теорема 2.</u> Точечное постоянство Ф-голоморфной секционной кривизны AC-многообразий класса C_{11} размерности свыше трех равносильно глобальному постоянству его Ф-голоморфной секционной кривизны.

Согласно замечанию 5 [9] любое трехмерное почти контактное метрическое многообразие является многообразием точечно постоянной, но, вообще говоря, не глобально постоянной Ф-голоморфной кривизны.

Пусть M – AC-многообразие класса C_{11} постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны c. Первое фундаментальное тождество с учетом (24) запишется в виде $\frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ah}_{bc}B_{hd} = \frac{c}{2}\tilde{\delta}^{ah}_{bd}B_{hc}$. Свернем это равенство по индексам a и b, тогда $\frac{c}{2}(n+1)B_{cd} = \frac{c}{2}(n+1)B_{dc}$. Так как $B_{ab} = -B_{ba}$, то $c(n+1)B_{ab} = 0$. Поскольку ni1, то, либо c=0, либо $B_{ab} = 0$. Во втором случае согласно предложению 4 структура является косимплектической.

Как известно, косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [10], и с учетом известных классификаций комплексных пространственных форм [11] получаем полную классификацию AC-многообразий класса C_{11} ненулевой постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны.

<u>Теорема 3.</u> AC-многообразие класса C_{11} ненулевой постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий:

1) произведению комплексного евклидова пространства на вещественную прямую;

2) произведению комплексного проективного пространства на вещественную прямую;

3) произведению комплексного гиперболического пространства на вещественную прямую;

4) произведению двумерного многообразия на вещественную прямую.

12.05.2010

Список использованной литературы:
1. Chern S.S. Pseudogroupes continues infinis // Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. 1953. V. 52. P. 119-136.
2. Gray J.W. Some global properties of contact structures // Ann. Of Math. (2). 1959. V. 69. №2. P. 421-450.
3. Sasaki S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures. I // Tohoku Math. J. (2). 1960. V. 12. №3. P. 459-476.
4. Chinea D., Marrero J.C. Classification of almost contact metric structures //Rev. roum de math. pures et appl., 37, №3 (1992), 199-211.
5. Chinea D., Gonzalez C. Classification of almost contact metric structures // Annali di Matematica pura ed applicata (IV). V. CLVI. 1990. P. 15-36.
6. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – М., МПГУ, 2003. – 495 с.
7. Кириченко В.Ф., Дондукова Н.Н. Контактные геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. Т. 80, вып. 2, 2006, С. 209-219.
8. Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form // Kodai Math.J., 1979, v. 2, p. 171-182.
9. Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Математический сборник, т. 193, №8, 71-100.
10. Kiritchenko V.F. Sur le géométrie des variétés approximativement cosymplectiques // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1982. V. 295. P. 673-676.
11. Kirichenko V.F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geom. Dedicata. 1994. V. 52. P. 53-85.

Сведения об авторах:

Рустанов Алигаджи Рабаданович, доцент кафедры естественно-научных дисциплин Российского государственного университета туризма и сервиса, Институт сервиса (филиал), г. Москва, кандидат физико-математических наук

г. Москва, пр-т Вернадского, дом 88, корп. 1, ком. 1204, тел. 89262460821, e-mail: aligadzhi@yandex.ru.

Щипкова Нина Николаевна, доцент кафедры геометрии и топологии Оренбургского государственного университета, кандидат физико-математических наук

460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2534, тел. (3532)372532, e-mail: ningeom@pochtamt.ru.

Rustanov A.R., Shchipkova N.N.

The differential geometry of the almost contact metric varieties of the class S11. The work examined the new class of almost contact metric varieties, the generalizing class of cosimplect varieties. The authors got the complete classification of the AS- varieties of the class S11 of a constant F- holomorphic sectional curvature.

The key words: almost contact metric variety, cosimplect variety, the tensor of holomorphic sectional curvature.

Bibliography:
1. Chern S.S. Pseudogroupes continues infinis // Colloques Internat. Centre Nat. Rech.Sci. 1953. V.52. P. 119-136.
2. Gray J.W. Some global properties of contact structures // Ann. Of Math. (2). 1959. V.69. №2. P. 421-450.
3. Sasaki S. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures. I / / Tohoku Math. J. (2). 1960. V. 12. №3. P. 459-476.
4. Chinea D., Marrero J.C. Classification of almost contact metric structures.//Rev. roum de math. pures et appl., 37, №3 (1992), 199-211.
5. Chinea D., Gonzalez C. Classification of almost contact metric structures.// Annali di Matematica pura ed applicata (IV). V. CLVI. 1990. P. 15-36.
6. Kirichenko V. F. Differential geometric structures on manifolds. – M., MPSU, 2003. – 495 p.
7. Kirichenko V. F., Dondukova N. N.. Contact geodesic transformations of almost contact metric structures.// Mathematical notes. V.80, is.2, 2006, 209-219 p.
8. Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form //Kodai Math.J., 1979, v.2, p. 171-182.
9. Kirichenko V. F., Rustanov A. R. Differential geometry of quasi-Sasaki manifolds.// Mathematical collection, v. 193, №8, 71-100 p.
10. Kiritchenko V.F. Sur le gйomйtrie des variйtйs approximativement cosymplectiques // C.R. Acad. Sci. Paris. Sйr. I. Math. 1982. V.295. P. 673-676.
11. Kirichenko V.F. Generalizsd quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geom. Dedicata. 1994. V. 52. P. 53-85.