

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСКЛИНИВАНИЯ МАТЕРИАЛА С РАЗЛИЧНОЙ ДЛИНОЙ ОСНОВНОЙ И ЗИЯЮЩЕЙ ТРЕЩИНЫ

В статье представлено численное решение задачи развития расклинивающей трещины в сплошном материале с различной длиной основной и зияющей трещины. Решение задачи осуществлялось методом разрывных смещений.

**Ключевые слова:** расклинивание материала, зияющая трещина, коэффициент интенсивности напряжений I рода.

### Содержание задачи

Крепкие геоматериалы обладают прерывистой слоистостью с большой поверхностью соприкосновения и сравнительно небольшими пустыми или заполненными грунтом зияющими трещинами. Поэтому направленное хрупкое разрушение геоматериалов расклинивающими трещинами происходит по площадкам ослабления.

Задача о расклинивании плоскости полубесконечным разрезом, к берегам которого приложены постоянные разрывные смещения, с зияющей трещиной рассмотрена в работе [1]. В этом труде разработан коэффициент интенсивности напряжений, который зависит от нормальных смещений и длины зияющей трещины. При рассмотрении трещины конечной длины необходимо определять коэффициент интенсивности напряжений с учетом длины нагруженной и зияющей трещины. Поэтому целью настоящего исследования является разработка критерия разрушения плоскости расклиниванием с различной длиной основной и зияющей трещины.

Плоскодеформированное состояние упругой среды описывается в декартовой системе координат уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

уравнением совместности деформаций

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (2)$$

и законом Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты деформаций определяются выражениями

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (4)$$

В уравнениях использованы следующие обозначения:  $u_x, u_y$  – компоненты вектора перемещений;  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}$  – компоненты тензора деформаций;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга.

### Численный алгоритм

Для решения поставленной задачи разработан алгоритм, который включает в себя следующую последовательность операций.

1. Решение системы линейных уравнений с помощью метода разрывных смещений [2].

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, N};$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, M};$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{M+1, N}.$$

Здесь  $N$  – количество всех граничных элементов;  $M$  – количество граничных элементов, на которые разбивается основная трещина;  $D_n^j, D_s^j$  – компоненты разрывов смещений  $j$ -го отрезка трещины в нормальном и касательном направлениях соответственно;  $u_n^i$  – нормальные смещения  $i$ -го отрезка трещины соответственно;  $\sigma_s^i, \sigma_n^i$  – касательные и нормальные напряжения соответственно, заданные на участке ОВ;  $B_{ssij}, B_{snij}, B_{nsij}, B_{nnij}, A_{ssij}, A_{snij}, A_{nsij}, A_{nnij}$  – фундаментальные решения.

2. Построение аппроксимации нормально-го  $D_n$  раскрытия зияющей трещины в следующем виде:

Таблица 1. Результаты моделирования нормального раскрытия зияющей трещины

N	$x, 10^{-2} \text{ м}$	$D_n, 10^{-2} \text{ м}$			
		$b = 0,05 \text{ м}, L = 0,01 \text{ м}$		$b = 0,08 \text{ м}, L = 0,01 \text{ м}$	
		расчеты по формуле (7)	численное решение	расчеты по формуле (7)	численное решение
1	0,05	-0,0001978	-0,0001936	-0,0002036	-0,0001951
2	0,15	-0,0001725	-0,0001698	-0,0001775	-0,0001718
3	0,25	-0,0001539	-0,0001512	-0,0001585	-0,0001535
4	0,35	-0,0001378	-0,0001349	-0,0001419	-0,0001375
5	0,45	-0,0001228	-0,0001199	-0,0001255	-0,0001225
6	0,55	-0,0001081	-0,0001054	-0,0001113	-0,0001080
7	0,65	-0,0000931	-0,0000910	-0,0000958	-0,0000934
8	0,75	-0,0000769	-0,0000759	-0,0000793	-0,0000781
9	0,85	-0,0000585	-0,0000592	-0,0000602	-0,0000610
10	0,95	-0,0000332	-0,0000385	-0,0000341	-0,0000398

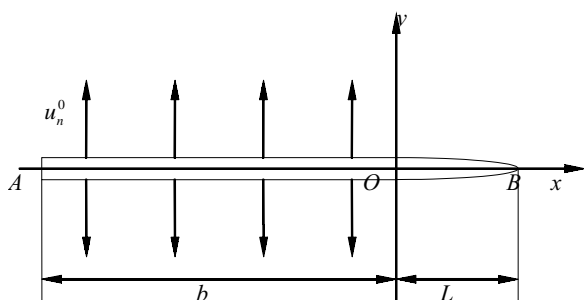


Рисунок 1. Схема, моделирующая развитие трещины нормального разрыва в сплошном материале

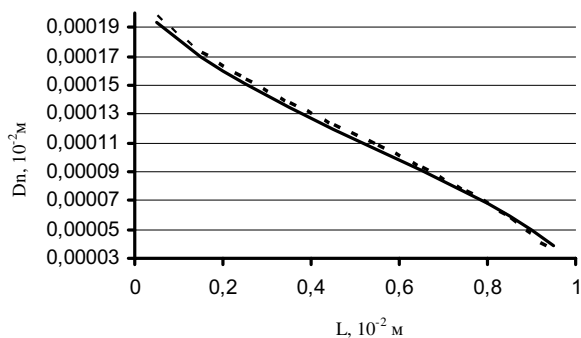


Рисунок 2. Нормальное раскрытие зияющей трещины, вычисленное: — — аналитически и — численно, при  $b = 0,05 \text{ м}, L = 0,01 \text{ м}$

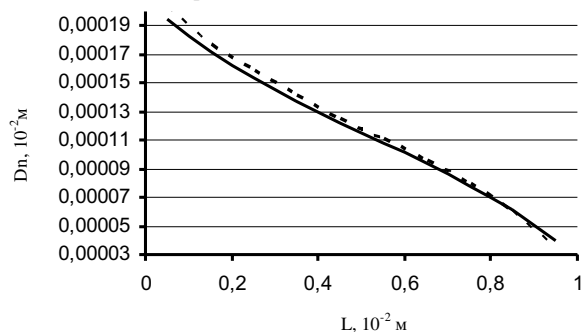


Рисунок 3. Нормальное раскрытие зияющей трещины, вычисленное: — — аналитически и — численно, при  $b = 0,08 \text{ м}, L = 0,01 \text{ м}$

$$D_n = \frac{-4u_n^0}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \cdot \left( c_0 + c_1 e^{c_2 \frac{b}{L}} \right) \quad (5)$$

Здесь постоянные коэффициенты  $c_i$  находятся с помощью метода наименьших квадратов.

3. Установление аналитического представления коэффициента интенсивности напряжений первого рода с помощью следующего соотношения [3]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_n}{\sqrt{L-x}}, \quad (6)$$

где  $K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений первого рода,  $H / \text{м}^{3/2}$ ;  $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$  — модуль сдвига,  $H / \text{м}^2$ ;  $D_n = u_n(x, 0_-) - u_n(x, 0_+)$  — нормальные раскрытия берегов зияющей трещины;  $u_n(x, 0_-)$ ;  $u_n(x, 0_+)$  — нормальные смещения нижнего и верхнего берегов трещины,  $\text{м}$ ;  $L$  — длина трещины  $OB$ ,  $\text{м}$ .

Подставляем полученную функциональную зависимость для нормального  $D_n$  раскрытия зияющей трещины (5) в критерий (6) и получаем аналитическое представление для коэффициента интенсивности напряжений первого рода:

$$K_I = \frac{G \cdot u_n^0 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{L} \cdot \pi \cdot (1-\nu)} \cdot \left( c_0 + c_1 e^{c_2 \frac{b}{L}} \right)$$

### Численное решение задачи

На рис. 1 приведена схема, моделирующая развитие расклинивающей трещины в сплошном материале при изменении длины нагружения  $b$  и длины расклинивающей трещины  $L$ . Зияющая трещина свободна от нормальных и касательных напряжений. Формирование расклинивающей трещины направлено в сторону  $OB$ .

Таблица 2. Результаты моделирования нормального раскрытия зияющей трещины

N	x, 10 <sup>-2</sup> м	D <sub>n</sub> , 10 <sup>-2</sup> м			
		b 0,15 м, L 0,05 м		b 0,2 м, L 0,05 м	
		расчеты по формуле (7)	численное решение	расчеты по формуле (7)	численное решение
1	0,25	-0,0001860	-0,0001912	-0,0001933	-0,0001927
2	0,75	-0,0001622	-0,0001663	-0,0001685	-0,0001684
3	1,25	-0,0001448	-0,0001472	-0,0001504	-0,0001496
4	1,75	-0,0001297	-0,0001307	-0,0001347	-0,0001333
5	2,25	-0,0001155	-0,0001157	-0,0001200	-0,0001183
6	2,75	-0,0001017	-0,0001014	-0,0001056	-0,0001039
7	3,25	-0,0000875	-0,0000871	-0,0000909	-0,0000895
8	3,75	-0,0000724	-0,0000724	-0,0000752	-0,0000745
9	4,25	-0,0000550	-0,0000563	-0,0000571	-0,0000581
10	4,75	-0,0000312	-0,0000366	-0,0000324	-0,0000378

Краевые условия имели следующий вид:

$$u_n^i = -u_n^0, \sigma_s^i = 0 \text{ при } y = 0, A \leq x \leq O;$$

$$\sigma_s^i = 0, \sigma_n^i = 0 \text{ при } y = 0, O \leq x \leq B,$$

где  $u_n^0$  – заданная величина.

Результаты численного решения задачи позволили установить следующую зависимость нормального раскрытия зияющей трещины ОВ:

$$D_n = \frac{-4u_n^0}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \cdot f(b, L), \quad (7)$$

$$\text{где } f(b, L) = \begin{cases} 1 - 0,3808 \cdot e^{-0,4631 \cdot \frac{b}{L}}, & \text{при } \frac{1}{3} \leq \frac{b}{L} \leq 15; \\ 1, & \text{при } \frac{b}{L} > 15. \end{cases} \quad (8)$$

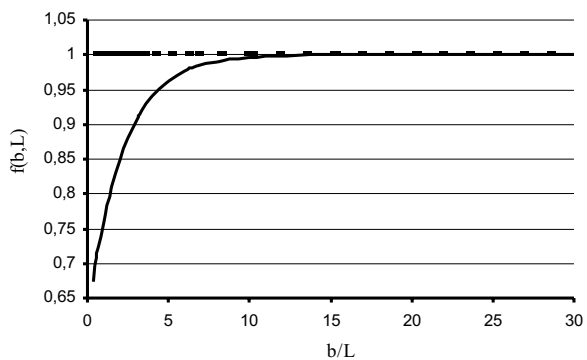
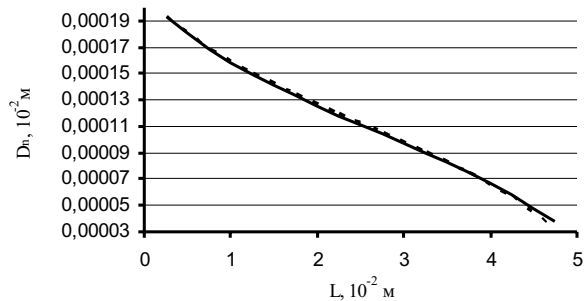
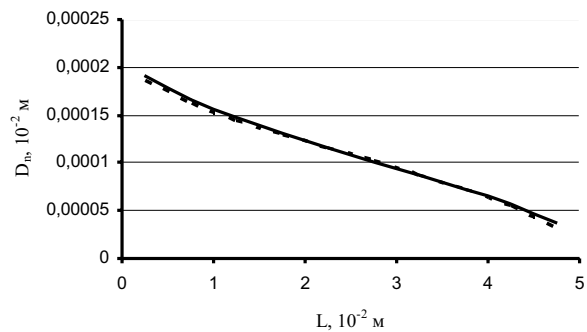
В таблице 1 и рис. 2, 3 приведены результаты сравнения расчетов раскрытия берегов трещины ОВ, вычисленные по формуле (7) и численно, при  $b=0,05$  и  $b=0,08$  м, а  $L=0,01$  м.

Результаты расчетов, приведенные в таблице 1, выполнялись при следующих входных значениях:  $u_n^0 = 1,2 \cdot 10^{-6}$  м;  $N$  – количество граничных элементов, на которые разбивалась зияющая трещина;  $\nu = 0,3$ ;  $E = 3 \cdot 10^4$  МПа.

Анализ результатов, приведенных в таблице 1, показал, что значения нормального раскрытия зияющей трещины в аналитических и численных решениях отличаются друг от друга в среднем на 4%.

Результаты сравнения численных и аналитических расчетов нормального раскрытия зияющей трещины для случаев, когда  $b=3L$  и  $b=4L$ , приведены в таблице 2 и рис. 4, 5.

Анализ результатов моделирования, приведенных в таблице 2, показал, что значения нормального раскрытия зияющей трещины в аналитических и численных решениях отличаются друг от друга в среднем на 2,6%.



На основании проведенного исследования был установлен коэффициент интенсивности напряжения первого рода:

$$K_I = \frac{G \cdot u_n^0 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{L \cdot \pi \cdot (1-\nu)}} \cdot \left( 1 - 0,3808 \cdot e^{-0,4631 \cdot \frac{b}{L}} \right).$$

На рис. 6 сплошной линией приведен график функции  $f(b, L)$ , а пунктирной линией – условия для полубесконечного разреза с зияющей трещиной. Данная графическая зависимость показывает, что как только длина нагруженной трещины в 15 раз превышает длину зияющей, основную трещину можно рассматривать как полубесконечный разрез, т. е. критерий роста расклинивающей трещины совпадает с формулой Г.П. Черепанова [1].

Таким образом, для описания процесса разрушения материалов при расклинивании в работе установлен критерий развития зияющей трещины с различной длиной основной и зияющей трещины.

#### **Выводы**

1. Разработан численный алгоритм образования трещины нормального разрыва с различной длиной основной и зияющей трещины.

2. Установлена количественная сопоставимость нормального раскрытия зияющей трещины в аналитических и численных решениях.

3. Разработан в аналитическом виде коэффициент интенсивности напряжения первого рода с различной длиной основной и зияющей трещины.

12.05.2010

#### **Список использованной литературы:**

1. Черепанов, Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения / Г.П. Черепанов. – М.: Недра, 1987. – 308 с.
2. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
3. Линьков, А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А.М. Линьков. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.

#### **Сведения об авторах:**

Полкунов Юрий Григорьевич, заведующий кафедрой математического анализа Оренбургского государственного университета, доктор технических наук, доцент 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2240а, тел. (3532) 372533, e-mail: matan@mail.osu.ru

Спиридонова Екатерина Владимировна, преподаватель кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, ауд. 2240, тел. (3532) 372533, e-mail: matan@mail.osu.ru

Polkunov Yu.G., Spiridonova E.V.

The mathematics model of unwedging material with different length of the basic and gaping crack  
The article represents the numerical solution of the task of the development of the wedging crack in the undivided material with different length of the basic and gaping crack. Solution of problem was achieved by the torn-tape system displacement.

The key words: unwedging material, the gaping crack, the coefficient of the intensity of the stresses of the I kind.

#### **Bibliography:**

1. Cherepanov G.P. Fracture mechanics of rocks during drilling / G.P. Cherepanov. – Moscow: Nedra, 1987. – 308 p.
2. Crouch S. Boundary element methods in mechanics of solid / S. Crouch, A. Starfield. – M.: Mir, 1987. – 328 p.
3. Linkov A.M. Complex method of boundary integral equations of the theory of elasticity / A.M/ Linkov. – SPb.: Nauka, 1999. – 382 p.