

## ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье рассматривается одна из важных проблем основы современной теории функций комплексных переменных и определения возможности их применения в экономике. Показывается построение и исследование линейных производственных функций комплексных переменных для выявления тех их свойств, которые могут применяться в планировании хозяйственной деятельности.

**Ключевые слова:** комплексная переменная, прогнозирование, динамика.

Были построены модели экономической динамики Хорезмской области Республики Узбекистан за 1997–2007 гг. Исходные данные, собранные по данным Госкомстата Узбекистана, приведены в таблице 1.

Для того чтобы построить модель экономической динамики, эти данные были приведены к безразмерным величинам.

Попытка построить производственную функцию Кобба–Дугласа на этих данных оказалась бессмысленной, поскольку модель, коэффициенты которой были найдены с помощью метода наименьших квадратов (МНК), имеет вид:

$$Q_t = 0,9471 K_t^{4,0021} L_t^{-3,0021}, \quad (1)$$

а показатели степени функции Кобба–Дугласа, как известно, лежат в пределах от нуля до единицы. Поэтому данная производственная функция для анализа экономической динамики применима быть не может.

Простая степенная производственная функция, коэффициенты которой также были найдены с помощью МНК по безразмерным данным таблицы 1, имеет такой вид:

$$Q_t = 0,87 K_t^{2,17766} L_t^{3,10876}. \quad (2)$$

Значит, эластичность использования капитальных ресурсов за 1997–2007 годы в Узбекистане составила 2,17766 единицы, а эластичность использования трудовых ресурсов – 3,10876 единицы. В соответствии с ранее полученными результатами

$$\Delta QR > \Delta RQ \rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta R} \frac{R}{Q} = \varepsilon_R > 1,$$

это говорит о том, что производственные мощности экономики Хорезмской области существенно недозагружены, поэтому увеличение любого ресурса – капитального или трудового – приведет к существенному росту эффективности производства.

Таблица 1. Данные экономического развития экономики Хорезмской области Узбекистана

Год	Инвестиции, млн. сум.	Валовой региональный продукт, млн. сум.	Основные фонды, млн. сум.	Численность занятых, тыс. чел.
1997	12 354,00	140,6	609663,0	442,00
1998	17 767,00	145,60	624370,7	449,00
1999	21 670,10	152,20	640747,5	456,00
2000	25 839,50	144,30	671715,9	467,20
2001	52 614,20	148,60	713787,1	468,30
2002	68 966,90	283,50	755740,8	478,30
2003	45 404,70	372,80	799915,6	490,40
2004	123 802,60	483,20	930449,0	506,60
2005	63 263,50	562,00	1010865,4	522,30
2006	113 406,30	930,20	1091063,0	538,00
2007	114 503,20	1 003,70	1230510,0	547,00

Для построения модели экономической динамики недостаточно иметь производственную функцию, необходимо описать и другие взаимосвязи этой модели. Поскольку ВРП используется на потребление и накопление, то по данным табл. 1 следует вычислить норму накопления  $s$ , которая отражает ту часть ВРП, которая идет на инвестиции. Эта доля оказалась чрезвычайно малой – всего 0,04. То есть величина инвестиций в год  $t$  определяется с помощью этой нормы накопления так:

$$I_t = 0,04Q_t. \quad (3)$$

Инвестиции способствуют приросту основных производственных фондов будущего года  $K_{t+1}$  и выражаются через устаревшие фонды  $K_t$  с учетом доли выбывших за год основных производственных фондов  $m$ . При вычислении этой доли мы столкнулись с неожиданностью, поскольку доля выбытия основных фондов оказалась... отрицательной и равна -0,0093. То есть фонды не выбывают, а наоборот, прирастают и прирост этот существенно превышает величину инвестиций. Этот парадоксальный результат может быть объяснен (исключая возможность статистической недостоверности данных государственной статистики) следующим образом.

После объявления республиками бывшего СССР независимости и разрыва как результата этой независимости основных хозяйственных связей между предприятиями республик многие производства либо перестали существовать, либо работали с очень малой загрузкой производственных фондов. В этих условиях часть основных фондов была выведена из статистического баланса как неиспользованная в хозяйственных целях, например пустующие помещения и тяжелые станки. Незначительные инвестиции в такие основные фонды способствовали их «реанимации», и поэтому прирост стоимос-

ти основных фондов оказался выше, чем инвестиции в основные фонды.

С учетом этой динамика капитального ресурса за рассматриваемый период описывается следующей моделью:

$$K_{t+1} = 1,0093 K_t + I_t. \quad (4)$$

Число занятых в экономике не принесло подобных сюрпризов. Прирост занятых составил 2% в год ( $n=0,02$ ), поэтому число занятых в экономике  $L_{t+1}$  определяется через число занятых в текущем году  $L_t$  с учетом годового темпа прироста числа занятых ( $n$ ) так:

$$L_{t+1} = 1,02L_t. \quad (5)$$

Уравнения (2) – (5) и составляют модель экономической динамики для Хорезмской области Узбекистана. Однако попытка использовать эту модель для прогнозирования экономического развития области потерпела неудачу. Как видно из данных таблицы 2, эта модель моделирует невиданный рост объемов производства. Очевидно, что ни одна из областей такими темпами развиваться не может, значит, модель содержит в себе ошибку.

Бурный рост валового регионального продукта в модели вызван тем, что показатель степени капитального ресурса в производственной функции (2) больше двух. Это означает, что увеличение капитального ресурса, например, в два раза приведет к росту производственного результата более чем в четыре раза. Следовательно, несмотря на то, что модель производственной функции неплохо описывает прошлую динамику, использовать ее в модели экономической динамики Хорезмской области нельзя.

В ряду производственных функций действительных переменных известна и производственная функция в аддитивной форме. Она довольно проста и не обладает теми замечательными теоретически выводимыми свойствами, которые присущи степенной производственной

Таблица 2. Траектория экономического развития Хорезмской области по модели со степенной производственной функцией

Год	Инвестиции, $I_t$	Величина основных фондов, $K_t$	Численность занятых, $L_t$	Валовой региональный продукт, $Q_t$
2008	0,462106	2,22	1,262308	11,55265
2009	0,955558	2,71	1,287554	23,88896
2010	3,102306	3,69	1,313305	77,55764
2011	34,31417	6,83	1,339571	857,8542
2012	43109,02	41,20	1,366362	1077726

функции. Поскольку основной задачей нашего исследования является построение модели экономической динамики Хорезмской области, пренебрегать возможностью использования этой модели нет смысла, тем более, что наиболее популярные производственные функции продемонстрировали свою неприемлемость.

Простая линейная модель производственной функции в аддитивной форме будет иметь вид:

$$Q_t = a + bK_t + cL_t \quad (6)$$

Метод наименьших квадратов позволяет оценить коэффициенты этой модели по данным Хорезмской области следующим образом:

$$Q_t = 3,9819K_t + 10,008L_t - 13,6114 \quad (7)$$

Используя эту модель и найденные ранее соотношения (3)–(5), можно использовать их вместе как модель экономической динамики и выполнить прогноз экономической динамики Хорезмской области на перспективу. Результаты этого прогноза приведены в таблице 3.

Полученные расчетные значения следует признать правдоподобными, поскольку экономический рост, описанный в таблице, вполне укладывается в рамки возможных траекторий. Таким образом, простая линейная модель производственной функции оказывается в рассматриваемом случае более пригодной для моделирования экономической динамики, нежели более сложные нелинейные модели.

Помимо производственных функций действительных переменных в моделях экономической динамики могут использоваться и производственные функции комплексных переменных. Из возможного многообразия этих функций оценим возможность использования производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами:

$$I_t + iC_t = a(K_t + iL_t)^b \quad (8)$$

О возможности использования этого вида модели производственной функции в модели экономической динамики можно судить по тому, как меняются ее коэффициенты во времени, ведь в отличие от степенной производственной функции действительных переменных, для точечной оценки коэффициентов которой необходимо иметь наблюдения за тремя временными моментами, коэффициенты модели (6) легко находятся по одному наблюдению. Действительно, прологарифмировав левые и правые

части (6), например, по натуральному основанию, получим:

$$\ln(I_t + iC_t) = \ln a + b \ln(K_t + iL_t). \quad (9)$$

Или, вспомнив свойства логарифма комплексного числа:

$$\ln R_{nt} + \varphi_t i = \ln a + b \ln R_{pt} + ib\theta_t, \quad (10)$$

$$\text{Здесь } R_{nt} = \sqrt{I_t^2 + C_t^2}, R_{pt} = \sqrt{K_t^2 + L_t^2}, \\ \varphi_t = \arctg \frac{C_t}{I_t}, \theta_t = \arctg \frac{L_t}{K_t}.$$

Поскольку два комплексных числа равны друг другу только тогда, когда равны друг другу действительные и мнимые части этих чисел, получается, что равенство (10) равносильно системе равенств:

$$\begin{cases} \ln R_{nt} = \ln a_0 + b \ln R_{pt}, \\ \varphi_t = b\theta_t. \end{cases} \quad (11)$$

Из второго равенства легко найти для каждого  $t$  величину коэффициента  $b$ , а из первого, зная это значение коэффициента, – найти коэффициент  $a$ . Анализируя изменение во времени этих коэффициентов, можно принять решение о пригодности или непригодности модели к реальному использованию. Если коэффициенты не будут претерпевать существенных изменений во времени, а будут оставаться примерно постоянными, то модель (6) может быть использована для моделирования реального процесса. В таблице 4 приведены расчеты коэффициентов  $a$  и  $b$ , осуществленные по формулам (11).

Легко убедиться в том, что каждый из коэффициентов комплекснозначной модели меняется во времени. При этом изменение каждого коэффициента не носит случайный характер, а наоборот, имеет ярко выраженную систематическую составляющую. Это говорит о том, что модель производственной функции комплексных переменных не может быть использована для решения поставленной задачи.

Рассмотрим возможность использования логарифмической комплекснозначной функции типа:

$$I_t + C_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1) \ln(K_t + iL_t). \quad (12)$$

И вновь для этой модели, как и для большинства моделей комплексных переменных, имеется возможность не только рассчитать коэффициенты моделей с помощью МНК, но и оценить значения каждого коэффициента для

каждого момента наблюдения, что является неоспоримым преимуществом комплекснозначных производственных функций. Если провести предварительное центрирование исходных переменных производственного результата относительно их средних арифметических, то можно получить такую систему двух уравнений с двумя неизвестными коэффициентами:

$$\begin{cases} I'_t = b_0 \ln R_t - b_1 \varphi_t \\ C'_t = b_1 \ln R_t + b_0 \varphi_t \end{cases} \quad (13)$$

Как видно, решая это уравнение, можно получить оценку комплексного коэффициента пропорциональности модели (12) в каждый момент наблюдения. Результаты расчета для Хорезмской области приведены в таблице 5.

И вновь можно убедиться в том, что коэффициенты модели меняются систематически, следовательно, логарифмическая комплекснозначная производственная функция не может использоваться для моделирования экономической динамики Хорезмской области.

Так же, как и в случае с производственными функциями действительных переменных, посмотрим, будет ли пригодна для моделирования Хорезмской области линейная комплекснозначная функция. Применительно к рассматриваемому случаю она имеет следующий вид:

$$I_t + C_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(K_t + iL_t). \quad (14)$$

Вновь рассмотрим возможность применения этой функции для описания динамики экономики Хорезмской области республики Узбекистан. Для этого рассмотрим динамику комплексного коэффициента пропорциональности на исходном отрезке времени. Если использовать центрированные переменные, то эти коэффициенты легко находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} I'_t = b_0 K'_t - b_1 L'_t \\ C'_t = b_0 L'_t + b_1 K'_t \end{cases} \quad (15)$$

Поэтому легко для каждого года наблюдений рассчитать соответствующую пару коэффициентов. Результаты вычислений сведены в таблицу 6.

По данным этой таблицы можно заметить, что как коэффициент  $b_0$ , так и коэффициент  $b_1$  не остаются неизменными. Однако ни тот, ни другой коэффициент не имеют ярко выражен-

Таблица 3. Траектория экономического развития Хорезмской области по модели с линейной производственной функцией

Год	$I_t$	$K_t$	$L_t$	$Q_t$
2008	0,280112	2,004324	1,262308	7,002793
2009	0,302909	2,084003	1,287554	7,572732
2010	0,328271	2,178512	1,313305	8,206774
2011	0,356373	2,288932	1,339571	8,909325
2012	0,387403	2,416412	1,366362	9,685066

Таблица 4. Коэффициенты степенной модели (6), рассчитанные по данным Хорезмской области

Год	a	b	Год	a	b
1997	0,49	1,97	2003	0,79	2,20
1998	0,49	1,97	2004	0,71	2,34
1999	0,49	1,98	2005	0,66	2,49
2000	0,42	2,00	2006	0,88	2,58
2001	0,39	2,01	2007	0,62	2,81
2002	0,67	2,11			

Таблица 5. Коэффициенты пропорциональности логарифмической модели (12), рассчитанные по данным Хорезмской области

Год	$b_1$	$b_0$	Год	$b_1$	$b_0$
1997	1,637915	-0,38874	2003	0,046316	0,00964
1998	1,524467	-0,30394	2004	-0,29692	4,210089
1999	1,392846	-0,224	2005	-0,96459	9,084506
2000	1,261594	-0,12783	2006	-4,24566	27,78288
2001	1,030879	-0,13834	2007	-8,70618	38,22332
2002	0,378361	-0,03935			

Таблица 6. Коэффициенты пропорциональности логарифмической модели (14), рассчитанные по данным Хорезмской области

Год	$b_1$	$b_0$
1997	4,485144	1,532588
1998	4,817213	1,490618
1999	5,2005	1,440646
2000	6,642619	1,446864
2001	9,049463	2,240542
2002	6,978283	1,175514
2003	3,557407	0,058516
2004	2,638015	1,260488
2005	3,597303	0,942233
2006	7,909553	2,264882
2007	6,083935	1,362086

ной тенденции к росту или падению или какой-либо иной тенденции. Это означает, что линейная комплекснозначная производственная функция может быть использована для расчета экономической динамики Хорезмской области. Используя МНК применительно к этой модели, получим такой вид модели:

$$I_t + iC_t = (+i) + (+i)(K_t + iL_t). \quad (16)$$

Таким образом, мы пришли к выводу о том, что из всего многообразия производственных функций действительных и комплексных переменных наиболее пригодными для моделирования экономической динамики Хорезмской области являются линейные функции. Естественно, что этот вывод нельзя распространить на все другие случаи, он применим для данной области и в рассматриваемый промежуток времени. Так как в нашем распоряжении имеются две линейные модели производственной функции (действительных и комплексных переменных), сравним результаты того, как они моделируют динамику развития Хорезмской области на перспективу для того, чтобы сделать выбор наилучшей модели из этих двух.

Первая модель экономической динамики Хорезмской области представляет собой модель действительных переменных следующего вида:

$$Q_t = 3,9819K_t + 10,008L_t - 13,6114 \quad (17)$$

$$I_t = 0,04Q_t \quad (18)$$

$$K_{t+1} = 1,0093K_t + I_t \quad (19)$$

$$L_{t+1} = 1,02L_t \quad (20)$$

Результаты расчета экономической динамики по этой модели представлены в таблице 3. Другая модель динамики Хорезмской области – модель экономической динамики с комплекснозначной линейной производственной функцией. Поскольку производственная функция (16) позволяет вычислять разделение валового продукта на потребление и накопление, модель имеет такой вид:

$$I_t + iC_t = (4,34 + i6,3) + (1,38 + i5,54)(K_t + iL_t). \quad (21)$$

$$K_{t+1} = 1,0093K_t + I_t \quad (22)$$

$$L_{t+1} = 1,02L_t \quad (23)$$

Сведем результаты расчетов экономической динамики Хорезмской области на перспективу до 2012 года в одну таблицу. Но предварительно необходимо заметить, что сумма двух пере-

менных производственного результата в левой части равенства (21) дает нам величину валового регионального продукта:

$$Q_t = I_t + C_t, \quad (24)$$

которая и включена нами в итоговую таблицу 7.

Сравнительный анализ траекторий развития Хорезмской области, полученных моделью с производственной функцией действительных переменных (17)–(20) и моделью с производственной функцией комплексных переменных (21)–(23), показывает следующее.

Модель с действительными переменными (17)–(20) демонстрирует уверенный рост валового регионального продукта с незначительным нелинейным приростом – для промежутка между 2009 и 2008 годом он составляет 0,57, а для промежутка между 2011 и 2012 годом он составляет уже 0,77. Такие результаты легко объяснить – модель продолжает тенденции, существовавшие в 1997–2007 годах, в том числе и рост капитала.

Напротив, модель экономической динамики с комплекснозначной линейной производственной функцией (21)–(23) вычисляет траекторию снижения объема валового регионального продукта (ВРП). Если в 2008 году эта модель вычисляет ВРП от 1997 года, взятого за базу, то уже в 2012 году вычисляет от 2008.

С учетом того, что современный мировой экономический кризис приводит к снижению объемов производства и объемов валовых продуктов всех стран и практически всех регионов, получается, что модель экономической динамики с комплекснозначной производственной функцией точнее описывает реальную ситуацию, нежели модель с производственной функцией комплексных переменных.

Таблица 7. Сравнительные траектории экономического развития Хорезмской области по разным моделям экономической динамики

Год	Модель действительных переменных			Модель комплексных переменных		
	$I_t$	$K_t$	$Q_t$	$I_t$	$K_t$	$Q_t$
2008	0,280112	2,004324	7,002793	0,27	2,00	6,824462
2009	0,302909	2,084003	7,572732	0,08	2,08	7,076012
2010	0,328271	2,178512	8,206774	-0,24	1,95	6,087403
2011	0,356373	2,288932	8,909325	-0,98	1,52	2,977268
2012	0,387403	2,416412	9,685066			

Для того чтобы использовать любую модель экономической динамики для целей социально-экономического прогнозирования, конечно, необходимо использовать адаптивные методы, которые позволяют так изменять коэффициенты модели экономической динамики, чтобы они учитывали текущую информацию в большей степени, чем предыдущую, а значит, адаптировали модель к изменениям в тенден-

циях развития. Но это – задача другого исследования. Данное исследование показало, что производственные функции комплексных переменных не только могут использоваться в качестве основных уравнений в моделях экономической динамики, но и в некоторых случаях с их помощью эта динамика моделируется лучше, нежели с помощью моделей действительных переменных.

29.03.2010

**Список использованной литературы:**

1. Борисов К.Ю., Фадеев В.Ю. Модель роста малой экономики с эндогенными коэффициентами дисконтирования // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. Вып. V. Анализ процессов глобализации. Сборник трудов Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН. – СПб.: Нестор-История, 2006. – С. 29–38.
2. Светульников С.Г., Светульников И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
3. Светульников С.Г. Эконометрия комплексных переменных. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008.

**Статья выполнена при поддержке РФФИ, грант №07-06-00151  
«Разработка основ экономико-математического моделирования  
с использованием комплексных переменных»**

## Сведения об авторах:

Светульников С.Г., заведующий кафедрой Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, доктор экономических наук, профессор  
Абдуллаев И.С., соискатель, Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, кандидат экономических наук, доцент  
Санкт-Петербург, ул. Садовая, 21, тел. 89522200316, e-mail: ilyos1970@mail.ru.

Svetunkov S.G., Abdullaev I.S.

Economic forecasting with help of line production function of complex variables

The authors of the article regard one of the important problems of the bases of modern theory of functions of complex variables and determination of possibility of their use in economy. Also they show construction and research of line production functions of complex variable for revealing of such their features which can be used at the planning of economic activity.

Key words: complex variable, forecasting, dynamics.

## Bibliography:

1. K.J.Borisov, V.J.Fadeev. Model of growth of small economy with эндогенными in discounting factors//Economic-mathematical researches: mathematical models and an information technology. Release V. The analysis of processes globalization. The collection of works of the St.-Petersburg economic-mathematical institute of the Russian Academy of Sciences. – SPb.: Nestor-history, 2006.
2. Svetunkov S.G., Svetunkov I.S. production function of complex variables.– M: Publishing house LKI, 2008.
3. Svetunkov S. G. Ekonometrija of complex variables. – SPb.: Publishing house SpbGuEf, 2008.