

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САПР ШНЕКОВЫХ ЭКСТРУДЕРОВ

**Показана необходимость создания системы автоматизации проектирования шнековых экструдеров. Описаны функции предполагаемой САПР. Рассмотрены математические модели движения перерабатываемого материала в экструдере. Для расчета напряженного состояния материала применены конечно-элементный подход и теория теплопроводности.**

**Ключевые слова:** шнековый экструдер, САПР, метод конечного элемента, уравнения равновесия.

Экструзионные технологии массово применяются в пищевой, химической и других отраслях промышленности ввиду их высокой производительности. Точный аналитический расчет шнековой пары – самого распространенного рабочего органа экструдера – затруднителен в связи с разнообразием сложных форм экструдеров и свойств перерабатываемого материала. Расчет шнековых экструдеров в настоящее время производится по приближенным, зачастую эмпирическим, формулам с большим количеством предположений.

Так в работе [1] распределение напряжений сдвига между корпусом экструдера и валом шнека полагается линейным. В работе [2] приводятся основанные на опытных данных аналитические зависимости давления аномально вязкой среды от скорости движения, угловой скорости вращения от производительности экструдера и т. п. В работе [3] даются практические рекомендации по выбору шага винтовой нарезки шнека, глубины винтового канала, приводится эмпирическая формула для расчета критической частоты вращения шнека, а также других величин, таких как максимальный прогиб, максимальные касательные напряжения, производительность.

Создание автоматизированного инструмента проектирования шнековых устройств, предоставляющего возможность проведения теоретически обоснованных кинематических, прочностных расчетов, расчетов износоустойчивости, расчетов напряженного состояния в различных точках перерабатываемого материала, позволит повысить качество принимаемых проектных решений при их синтезе, увеличит точность расчета и информативность его для проектировщика. Создание новых конструктивных решений с применением методов вирту-

альной инженерии позволяет экономить время и средства, связанные с проектированием, за счет применения компьютерного моделирования [4].

Предлагаемая система автоматизации проектирования шнековых экструдеров включает в себя следующие функции:

1. Структурный синтез конструкции. Используя заданные примитивы элементов экструдера, инженер-пользователь системы составляет его структурную схему. На этом этапе возможен выбор различной геометрии (плоские или гофрированные стенки, цилиндрическая или конусоидальная форма корпуса и т. п.). База данных примитивов, необходимая для этой функции, содержит данные, предопределенные разработчиком системы. Результаты структурного синтеза отображаются на экране и могут быть сохранены в базе данных конструкций.

2. Редактирование существующих решений. Элементы экструдера, выбранные в процессе структурного синтеза, как правило, имеют настраиваемые параметры, такие как наклон винтовой линии, толщина лопастей и т. п. Система позволяет инженеру-пользователю варьировать эти параметры в допустимых с точки зрения выполнимости конструкции пределах. Результаты регистрируются в базе данных конструкций.

3. Инженерные расчеты. Система автоматизации проектирования выполняет необходимые расчеты, исходя из заданных инженером-пользователем структуры, параметров конструкции, параметров технологического режима (рабочее давление перед матрицей, скорость вращения шнека и т. п.), свойств перерабатываемого материала. Система должна обеспечивать возможность таких видов расчетов, как тепловые, прочностные, расчеты напряженного состояния в различных точках перерабатываемого материала и расчеты износоустойчи-

ности. Результаты расчетов выводятся на экран в виде графиков зависимостей, а также могут быть выведены на печать.

4. Анализ влияния параметров. Система автоматизации проектирования позволяет отобразить графики зависимостей выбранных параметров в соответствии с результатами инженерного расчета (например, зависимость момента от угловой скорости вращения или от наклона винтовой линии).

5. Моделирование технологического процесса. В результате возникновения в процессе производства нештатных ситуаций, таких как внезапное увеличение или уменьшение давления, предельные температурные условия, применение установки для нового материала с принципиально иными свойствами, показатели эффективности экструдера могут меняться скачкообразно. Система автоматизации проектирования позволяет инженеру-пользователю смоделировать поведение проектируемого решения в нештатных ситуациях.

6. Разработка документации. В соответствии с выбранными инженером-пользователем стандартами изготовления конструкторской документации система производит проектные чертежи, необходимые для выполнения спроектированного решения, и пояснительные записки к ним.

Основу системы автоматизации проектирования шнековых экструдеров составляет математическое обеспечение инженерных расчетов.

Анализ поведения перерабатываемого материала в различных точках рабочего пространства экструдера позволил выявить несколько зон с различными математическими моделями. В качестве основных выделяются следующие зоны: жидкотекучести, смешивания и прессования, уплотнения и заполнения.

В непосредственной близости к матрице материал находится в достаточно перемешанном состоянии, близком к сплошной среде в классическом ее понимании [5]. Давление, обусловленное сопротивлением матрицы выпрессовыванию продукта, с одной стороны, и напором поступающего в эту зону под действием вращающегося шнека материала, с другой, – передается во всех направлениях без изменений в соответствии с законом Паскаля. Движение материала описывается уравнениями Навье – Стокса и уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \mu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f},$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

где  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $t$  – время,  $\mu$  – ньютоновская вязкость материала,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  – векторное поле скоростей,  $\vec{f}$  – векторное поле массовых сил.

В связи с цилиндрической формой корпуса, эти уравнения удобно использовать в цилиндрической системе координат ( $\vec{v} = (v_r, v_\phi, v_z)$ ).

В силу стационарности течения в экструдере производные скорости по времени равны нулю. В связи с тем, что гравитационная сила незначительна по сравнению с внутренними силами в слоях материала, соответствующими слагаемыми можно пренебречь.

В качестве граничного условия выступает условие «прилипания» к цилиндру (скорость в тонком слое около цилиндра равна нулю). По той же причине в области материала, граничащей со шнеком, скорость равна скорости вращения шнека:  $v_\phi = \omega r$ ,  $v_r = v_z = 0$ . Начальные условия ввиду стационарности процесса отсутствуют.

В зоне смешивания и прессования перемешивание еще не завершено, а давление мало по сравнению с предыдущей зоной; материал проявляет свойства псевдопластического тела. Механические свойства материала представляются реологическим уравнением, связывающим напряжение сдвига со скоростью сдвига материала.

Условием согласования с предыдущей зоной является равенство давления в зоне жидкотекучести нормальному напряжению в зоне смешивания и прессования.

В зоне уплотнения происходит интенсивное вытеснение подмешанного при заполнении воздуха и уплотнение перерабатываемого материала. В силу этого касательное напряжение на корпусе экструдера меняет направление по отношению к зоне смешивания и прессования.

Условием согласования с зоной смешивания и прессования, следовательно, можно выбрать равенство нулю касательных и нормальных напряжений. Расчетная модель движения перерабатываемого материала аналогична модели для предыдущей зоны, за исключением уравнения неразрывности, из-за сжимаемости материала.

В зоне заполнения в экструдер поступает исходный материал. Обычно это происходит

под действием силы тяжести, но возможно и поддавливание материала предыдущим смешивающим устройством. Присутствует проблема непрерывности подачи.

Условием согласования с зоной уплотнения является возникновение нормальных напряжений, параллельных оси экструдера.

В этой зоне для количественного анализа может быть применен статистический подход с исследованием таких величин, как средний размер воздушных пустот и их количество на единицу объема материала.

Для проведения инженерных расчетов наиболее подходящим представляется конечно-элементный подход [6], успешно применяемый в различных отраслях промышленности.

Адекватный с технологической и вычислительной точек зрения способ разбиения рабочего пространства шнекового экструдера на конечные элементы показан на рисунке 1.

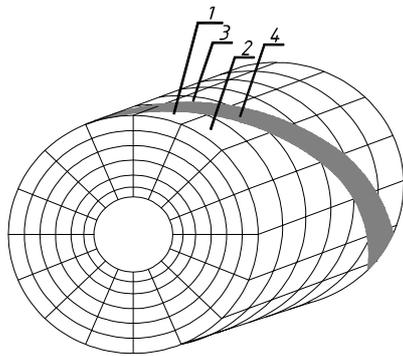


Рисунок 1. Разбиение рабочего пространства на конечные элементы

- 1 – элемент, соседствующий с лопастью;
- 2 – элемент, не соседствующий с лопастью;
- 3 – элемент, завершающий кольцо;
- 4 – лопасть.

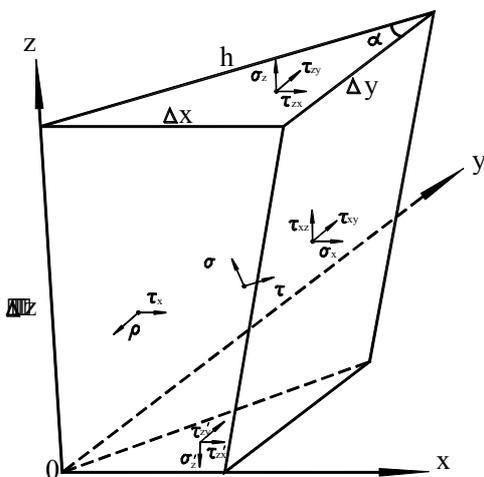


Рисунок 2. Модель элемента вида 1

Рабочее пространство экструдера разбивается на конечные элементы в трех направлениях. Плоскостями, перпендикулярными оси шнека, рабочее пространство разбивается на диски. Диски, в свою очередь, разбиваются на кольца при помощи цилиндрических поверхностей, ось которых совпадает с осью шнека. Рассекая кольца радиальными плоскостями, получаем секторные доли.

В каждом кольце по признаку соседства с лопастью шнека выделим:

- элемент вида 1, соседствующий с лопастью и испытывающий сообщаемое ей напряжение, геометрически аппроксимируемый треугольной призмой;

- элементы вида 2, не соседствующие с лопастью, геометрически аппроксимируемые прямоугольными параллелепипедами;

- элемент вида 3, завершающий кольцо и являющийся зеркальным отражением элемента вида 1 относительно лопасти.

Динамическое равновесие элементов видов 1, 2 и 3 определяется совокупным действием сил, показанных на рисунках 2, 3 и 4 соответственно.

Для силового расчета ось x направим в окружном направлении, ось y – параллельно оси шнека, ось z – в направлении от вала шнека к цилиндрическому корпусу.

Приравняв суммарную силу и суммарный момент сил нулю, составим уравнения равновесия для элемента вида 2 (для элементов вида 1 и 3 уравнения составляются аналогичным образом):

$$\begin{aligned}
 &(\tau_x + \tau_x') \cdot \Delta x \Delta z + (\sigma_x' - \sigma_x) \cdot \Delta y \Delta z + (\tau_{zx} + \tau_{zx}') \cdot \Delta x \Delta y = 0, \\
 &(p' - p) \cdot \Delta x \Delta z + (\tau_{xy} + \tau_{xy}') \cdot \Delta y \Delta z + (\tau_{zy} + \tau_{zy}') \cdot \Delta x \Delta y = 0, \\
 &(\tau_{xz} + \tau_{xz}') \cdot \Delta y \Delta z + (\sigma_z - \sigma_z') \cdot \Delta x \Delta y = 0, \\
 &(\sigma_z - \sigma_z') \Delta x \Delta y \frac{\Delta y}{2} - \tau_{zy} \Delta x \Delta y \Delta z + (p - p') \Delta x \Delta z \frac{\Delta z}{2} + \\
 &+ (\tau_{xz} + \tau_{xz}') \Delta y \Delta z \frac{\Delta y}{2} - (\tau_{xy} + \tau_{xy}') \Delta y \Delta z \frac{\Delta z}{2} = 0, \\
 &(\sigma_x' - \sigma_x) \Delta y \Delta z \frac{\Delta z}{2} + (\sigma_z' - \sigma_z) \Delta x \Delta y \frac{\Delta x}{2} + \\
 &+ \tau_{zx} \Delta x \Delta y \Delta z + (\tau_x + \tau_x') \Delta x \Delta z \frac{\Delta z}{2} - \\
 &- \tau_{xz}' \Delta y \Delta z \Delta x = 0, \\
 &(p' - p) \Delta x \Delta z \frac{\Delta x}{2} + (\sigma_x - \sigma_x') \Delta y \Delta z \frac{\Delta y}{2} - (\tau_{zx} + \tau_{zx}') \Delta x \Delta y \frac{\Delta y}{2} + \\
 &+ (\tau_{zy} + \tau_{zy}') \Delta x \Delta y \frac{\Delta x}{2} - \tau_x' \Delta x \Delta z \Delta y + \tau_{xy}' \Delta x \Delta z \Delta y = 0.
 \end{aligned}$$

Для однозначного разрешения данной системы уравнений относительно неизвестных

$\rho', \tau_x', \sigma_z', \tau_{zx}', \tau_{zy}', \tau_{xz}', \tau_{xy}'$  необходимо дополнительное уравнение. Для его составления обратимся к теории теплопроводности и составим уравнение энергетического баланса в среде материала.

Механические и термодинамические характеристики не изменяются во времени ввиду стационарности рассматриваемого процесса. Следовательно, работа сил вязкого трения равна количеству теплоты, отводимому от слоя материала. Распределение температур в направлении от корпуса к валу шнека будем считать известным, а изменение температуры материала по мере обработки – пренебрежимо малым.

Согласно закону теплопроводности Фурье, в установившемся режиме мощность тепловых потерь пропорциональна градиенту температуры [5]:

$$|P_1| = kS |\text{grad}(T)|,$$

где  $P_1$  – полная мощность тепловых потерь,  $S$  – площадь, через которую проходит тепло,  $\text{grad}(T)$  – скорость изменения температуры вдоль нормальной оси,  $k$  – коэффициент теплопроводности.

Работа сил вязкого трения  $dA$  в бесконечно малой области объемом  $dV$  для случая постоянной плотности материала определяется уравнением [5]:

$$\frac{dA}{dV dt} = -\tau \dot{\gamma}.$$

Будем рассматривать работу сил трения в слоях материала в плоскостях, параллельных  $x0y, y0z, x0z$ , независимо друг от друга:

$$x0y: |P_2| = \int_{\Delta V} \tau \dot{\gamma} dV = \Delta x \Delta y \int_0^{\Delta z} \tau \dot{\gamma} dz,$$

$$y0z: |P_3| = \int_{\Delta V} \tau \dot{\gamma} dV = \Delta y \Delta z \int_0^{\Delta x} \tau \dot{\gamma} dx,$$

$$x0z: |P_4| = \int_{\Delta V} \tau \dot{\gamma} dV = \Delta x \Delta z \int_0^{\Delta y} \tau \dot{\gamma} dy,$$

где  $\tau$  под  $\dot{\gamma}$  и понимаются векторные суммы напряжений или скоростей сдвига, действующих в направлениях, параллельных указанной плоскости, внутри элемента, зависящие от переменной интегрирования.

Запишем уравнение энергетического баланса:

$$|P_1| = |P_2| + |P_3| + |P_4|.$$

С помощью реологического закона скорость сдвига  $\dot{\gamma}$  может быть выражена через на-

пряжение  $\tau$ , и таким образом исключена из приведенных выше интегралов. В реологический закон также может входить и температура. В случае, когда температура задана лишь на границах конечных элементов, внутренние значения можно аппроксимировать линейно, учитывая граничные значения  $T_0$  и  $T_1$ :

$$T = \psi(T_1 - T_0) + T_0,$$

где  $\psi$  – безразмерная координата, находящаяся в отрезке  $[0; 1]$ .

В пределах небольшого конечного элемента внутреннее распределение напряжений  $\tau$  вдоль оси можно также считать приближенно линейным, т. е. определенным граничными значениями  $\tau_0$  и  $\tau_1$ :

$$\tau = \psi(\tau_1 - \tau_0) + \tau_0.$$

Переходя к интегрированию по безразмерной координате, получаем:

$$\int_0^{\Delta x} \tau \dot{\gamma} dx = \Delta x \int_0^1 \tau \dot{\gamma} d\psi, \quad \int_0^{\Delta y} \tau \dot{\gamma} dy = \Delta y \int_0^1 \tau \dot{\gamma} d\psi, \quad \int_0^{\Delta z} \tau \dot{\gamma} dz = \Delta z \int_0^1 \tau \dot{\gamma} d\psi.$$

Данные интегралы можно разрешить относительно величин на противоположных гра-

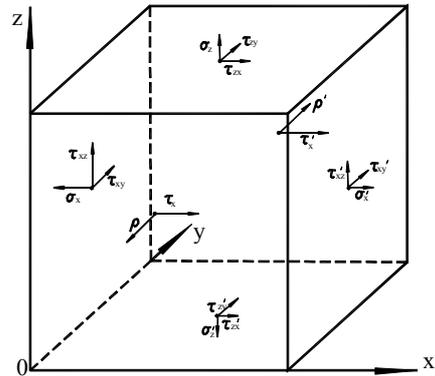


Рисунок 3. Модель элемента вида 2

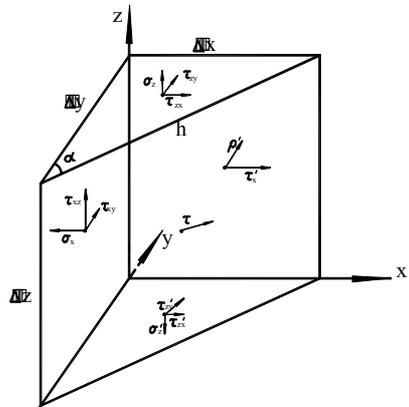


Рисунок 4. Модель элемента вида 3

нях элемента  $\tau_0$  и  $\tau_1$ , с использованием реологического закона перерабатываемого материала.

Так, например, для реологического уравнения  $\tau = \tau^* + \mu_n \dot{\gamma} \exp(a(T - T_n))$ , где  $\tau^*$  – предел текучести,  $\mu_n$  – вязкость при нормальной температуре  $T_n$ ,  $a$  – коэффициент температурной чувствительности вязкости, интеграл разрешается как

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau \dot{\gamma} d\psi &= \int_0^1 \tau \frac{\tau - \tau^*}{\mu_n \exp(a(\psi(T_1 - T_0) + T_0 - T_n))} d\psi = \\ &= \int_0^1 \frac{(\psi(\tau_1 - \tau_0) + \tau_0)(\psi(\tau_1 - \tau_0) + \tau_0 - \tau^*)}{\mu_n \exp(a(\psi(T_1 - T_0) + T_0 - T_n))} d\psi = \\ &= \frac{1}{\mu_n} \int_0^1 (\psi^2 (\tau_1 - \tau_0)^2 + \psi(\tau_1 - \tau_0)\tau_0 + \\ &+ \psi(\tau_1 - \tau_0)(\tau_0 - \tau^*) + \tau_0(\tau_0 - \tau^*)) e(\psi) d\psi = \\ &= \frac{(\tau_1 - \tau_0)^2}{\mu_n} \int_0^1 \psi^2 e(\psi) d\psi + \frac{(\tau_1 - \tau_0)(2\tau_0 - \tau^*)}{\mu_n} \int_0^1 \psi e(\psi) d\psi + \\ &+ \frac{\tau_0(\tau_0 - \tau^*)}{\mu_n} \int_0^1 e(\psi) d\psi = \\ &= \frac{(\tau_1 - \tau_0)^2}{\mu_n} \frac{(b^2 - 2b + 2)\exp(b+c) - 2\exp(c)}{b^3} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{(\tau_1 - \tau_0)(2\tau_0 - \tau^*)}{\mu_n} \frac{(b-1)\exp(b+c) + \exp(c)}{b^2} + \\ &+ \frac{\tau_0(\tau_0 - \tau^*)}{\mu_n} \frac{\exp(b+c) - \exp(c)}{b}, \end{aligned}$$

где для краткости обозначено  $e(\psi) = \exp(b\psi + c)$ ,  $b = a(T_0 - T_1)$ ,  $c = T_n - T_0$ .

Подставив разрешенные относительно  $\tau_0$  и  $\tau_1$  интегралы в уравнение энергетического баланса, можно получить замыкающее приведенную систему уравнение и рассчитать данный элемент.

Таким образом, в основу расчета шнековых экструдеров положен конечно-элементный подход. Его достоинством является универсальность в использования в широком диапазоне свойств перерабатываемого материала и конструкций шнековых экструдеров. Дальнейшие исследования должны быть сосредоточены на дальнейшем выявлении типовых конечных элементов и расчетных схем для других конструкций, расчете скоростей сдвига в перерабатываемом материале и разработке соответствующего алгоритмического обеспечения.

#### Список использованной литературы:

1. Полищук, В.Ю. Проектирование экструдеров для отраслей АПК [Текст] / В.Ю. Полищук. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 201 с.
2. Абрамов, О.В. Научное обеспечение процесса экструзии модельных сред на основе крахмалосодержащего сырья и разработка высокоэффективного оборудования для его реализации [Текст]: Автореферат дисс. ... д.т.н. – Воронеж, 2009. – 45 с.
3. Соколов, М.В. Автоматизированное проектирование и расчет шнековых машин [Текст] / М.В. Соколов, А.С. Клинов, О.В. Ефремов, П.С. Беляев, В.Г. Однолько. – М.: «Издательство Машиностроение-1», 2004. – 248 с.
4. Ли, К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) [Текст] / К. Ли. – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
5. Седов, Л.И. Механика сплошной среды [Текст]. В 2 т. Т. 1 / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1970. – 492 с.
6. Сабоннадьер, Ж.-К. Метод конечных элементов и САПР [Текст] / Ж.-К. Сабоннадьер, Ж.-Л. Кулон; пер. с франц. – М.: Мир, 1989. – 190 с.

Сведения об авторе: Шевченко Максим Николаевич, аспирант кафедры системного анализа и управления Оренбургского государственного университета, г. Оренбург, Шарлыкское шоссе, 5, тел. (3532)372557, [electromax85@mail.ru](mailto:electromax85@mail.ru)

Shevchenko M.N.

Screw extruder CAD/CAE system. Mathematical models

The necessity of a computer-aided screw extruder design and engineering system is demonstrated. System's functions are described. Mathematical models of processed material's movement are observed. Finite element approach is applied to material's stress calculation problem, along with thermal conductivity theory.

Key words: screw extruder, CAD, CAE, finite element method, balance equations.

#### Bibliography:

1. Polischuk, V. U. Design of extruders for agrarian industry / V. U. Polischuk. – Yekaterinburg: UrO RAN, 2003. – 201 p.
2. Abramov, O.V. Scientific support for extrusion process of model media based on starch-containing material and development of high-efficient equipment for its realization: author's abstract of dissertaion ... d.t.n. – Voronezh, 2009. – 45 p.
3. Sokolov, M. V. Computer-aided design and calculations of screw machines / M. V. Sokolov, A. S. Klinkov, O. V. Yefremov, P. S. Belyaev, V. G. Odnolko. – M.: «Izdatelstvo Mashinostroenie-1», 2004. – 248 p.
4. Li, K. Basis of CAD/CAM/CAE / K. Li. – SPb.: Piter, 2004. – 560 p.
5. Sedov, L. I. Continuum mechanics. In 2 v. V. 1 / L. I. Sedov. – M.: Nauka, 1970. – 492 p.
6. Sabonnadyer, G.-K. Finite element method and CAE / G.-K. Sabonnadyer, G.-L. Kulon; translation from French. – M.: Mir, 1989. – 190 p.