

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ГЕОМАТЕРИАЛОВ В СМЕШАННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В статье представлены соотношения, которые устанавливают связь между напряжениями и смещениями с коэффициентами интенсивности напряжений первого и второго рода и описывают механизм формирования трещины отрыва при смешанном типе нагружения трещины.

Ключевые слова: зияющая трещина, смешанные краевые условия, коэффициенты интенсивности напряжений I и II рода.

Введение

Поведение скального массива часто определяется наличием в нем нарушений сплошности. К таким нарушениям относятся разломы, плоскости напластования, пустые или заполненные грунтом зияющие трещины. Эти ослабления определяют направление возможного разрыва или взаимного скольжения частей массива.

Экспериментальные данные показали, что при сжатии и сдвиге в зияющих трещинах горного массива возникают нормальные раскрытия и сдвиги по берегам трещины. Подобные задачи вызывают огромный интерес и находят свое большое практическое приложение при сдвигении горных пластов, устойчивости бортов карьеров и выработок, поиске и разработке полезных ископаемых, оценке последствий горных ударов и землетрясений. Для описания данного процесса были предложены модель пилообразной трещины [1, 4–6], модели Р. Гудмана [1–3], дилатансионная модель [1, 4, 7], вязко-пластические модели [8], модель Е. Андерсона [9, 10], модели М. Чиннэри [9, 11–13] и Т. Маруямы [9, 14].

Данные модели рассматривают только случаи, когда к берегам основной трещины приложены напряжения, и устанавливают связь между напряжением и раскрытием зияющей трещины.

Коэффициенты интенсивности напряжений в конце трещины являются основными критериями в линейной механике разрушения по оценке роста и развития трещин. Поэтому для объективной оценки механизма формирования трещины разрыва при сжатии и сдвиге возникает необходимость в установлении связи между напряжениями и смещениями с коэффициентами интенсивности напряжений.

В настоящее время разрывные смещения породы определяются в основном с помощью периодически возобновляемых геодезических

измерений. Данные эксперименты проводят для контроля сдвигения земной поверхности, для обеспечения безопасной работы газо- и нефтепроводов, реакторов АЭС, железных дорог, туннелей, плотин, мостов, линий электропередачи и других инженерных сооружений и коммуникаций.

Целью данного исследования является разработка аналитических представлений коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго рода для трещины, к берегам которой приложены сжимающие и сдвиговые смещения и напряжения.

Постановка задачи

Плоскодеформированное состояние упругой среды описывается в декартовой системе координат уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

уравнением совместности деформаций

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (2)$$

и законом Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты деформаций определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях использованы следующие обозначения: u_x, u_y – компоненты вектора перемещений; $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ – компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}$ – компоненты тензора деформаций; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга.

Следуя работе [5], введем понятие основной трещины для того участка трещины, на котором заданы смещения, а зияющей трещины – на той части трещины, где заданы напряжения.

Численный алгоритм

Для решения поставленной задачи проводим вычислительный эксперимент, который включает в себя следующую последовательность действий.

1. Решение системы линейных уравнений методом разрывных смещений [15].

Система линейных уравнений имеет следующий вид:

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, M};$$

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{M+1, N};$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, M};$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{M+1, N}.$$

Здесь N – количество всех граничных элементов; M – количество граничных элементов, на которые разбивается основная трещина; D_n^j, D_s^j – компоненты разрывов смещений j -го отрезка трещины в нормальном и касательном направлениях соответственно; u_s^i, u_n^i – касательные и нормальные смещения i -го отрезка трещины соответственно; σ_s^i, σ_n^i – касательные и нормальные напряжения соответственно, заданные на участке OB ; $B_{ssij}, B_{snij}, B_{nsij}, B_{nnij}, A_{ssij}, A_{snij}, A_{nsij}, A_{nnij}$ – фундаментальные решения.

2. Построение аппроксимаций нормально-го D_n и сдвигового D_s раскрытия зияющей трещины в следующем виде:

$$D_n = \frac{-4u_n^0}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \cdot \left(a_0 + a_1 \frac{u_s^0}{u_n^0} + a_2 \left(\frac{u_s^0}{u_n^0} \right)^2 + \dots \right) +$$

$$+ \frac{2(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)} \sigma_n^0 \left(b_0 + b_1 \frac{\sigma_s^0}{\sigma_n^0} + b_2 \left(\frac{\sigma_s^0}{\sigma_n^0} \right)^2 + \dots \right);$$

$$D_s = \frac{-4u_s^0}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \cdot$$

$$\left(d_0 + d_1 \frac{u_n^0}{u_s^0} + d_2 \left(\frac{u_n^0}{u_s^0} \right)^2 + \dots \right) +$$

$$+ \frac{2(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)} \sigma_s^0 \left(c_0 + c_1 \frac{\sigma_n^0}{\sigma_s^0} + c_2 \left(\frac{\sigma_n^0}{\sigma_s^0} \right)^2 + \dots \right).$$

3. Определение аналитических представлений коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго рода, необходимо использовать следующие соотношения [16]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_n}{\sqrt{L-x}}, \quad (5)$$

$$K_{II} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow L} \frac{D_s}{\sqrt{L-x}}, \quad (6)$$

где K_I, K_{II} – коэффициенты интенсивности напряжений первого и второго рода соответственно, $H / m^{3/2}$; $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$ – модуль сдвига, H / m^2 ; $D_n = u_n(x, 0_-) - u_n(x, 0_+)$ – нормальные раскрытия берегов зияющей трещины; $D_s = u_s(x, 0_-) - u_s(x, 0_+)$ – сдвиговые раскрытия берегов зияющей трещины; $u_n(x, 0_-); u_n(x, 0_+)$ – нормальные смещения нижнего и верхнего берегов трещины, m ; $u_s(x, 0_-); u_s(x, 0_+)$ – сдвиговые смещения нижнего и верхнего берегов трещины, m ; L – длина трещины OB, m .

Результаты расчетов

На рисунке 1 приведена схема, по условиям которой основная трещина находится под действием сжимающих и касательных смещений, а зияющая трещина – под действием сжимающих и касательных напряжений.

Краевые условия для данной задачи имели следующий вид:

$$u_s^i = -u_s^0, \quad u_n^i = u_n^0 \quad \text{при } y = 0, A \leq x \leq O;$$

$$\sigma_s^i = -p, \quad \sigma_n^i = q \quad \text{при } y = 0, O \leq x \leq B.$$

Здесь u_n^0, u_s^0, p, q – заданные величины.

Таблица 1. Результаты моделирования сдвигового раскрытия зияющей трещины

К	х, см	D _s , см	
		расчеты по формуле (8)	численное решение
1	0,05	-0,0002572	-0,0002465
2	0,15	-0,0002236	-0,0002179
3	0,25	-0,0001991	-0,0001955
4	0,35	-0,0001779	-0,0001757
5	0,45	-0,0001583	-0,0001572
6	0,55	-0,0001390	-0,0001391
7	0,65	-0,0001195	-0,0001208
8	0,75	-0,0000987	-0,0001014
9	0,85	-0,0000748	-0,0000795
10	0,95	-0,0000424	-0,0000521

Таблица 2. Результаты моделирования нормального раскрытия зияющей трещины

N	х, см	D _n , см	
		расчеты по формуле (7)	численное решение
1	0,05	-0,0002422	-0,0002989
2	0,15	-0,0002119	-0,0002489
3	0,25	-0,0001896	-0,0002040
4	0,35	-0,0001702	-0,0001734
5	0,45	-0,0001519	-0,0001477
6	0,55	-0,0001339	-0,0001249
7	0,65	-0,0001155	-0,0001040
8	0,75	-0,0000957	-0,0000839
9	0,85	-0,0000728	-0,0000635
10	0,95	-0,0000414	-0,0000401

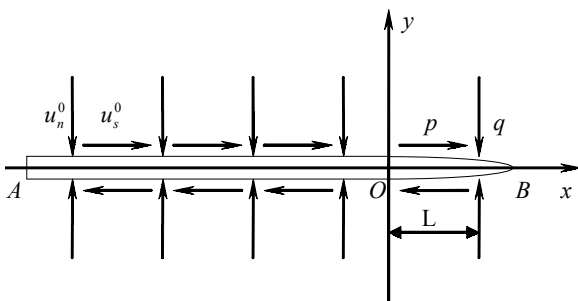


Рисунок 1. Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной отрыва и сдвига

Согласно предложенному алгоритму были построены следующие функциональные зависимости нормального и сдвигового раскрытия зияющей трещины:

$$D_n = \frac{-4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \varphi(u_s^0, u_n^0) + \frac{2(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)} (0,0343q - 0,9244p); \quad (7)$$

$$D_s = \frac{-4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \psi(u_s^0, u_n^0) +$$

$$+ \frac{2(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)} (0,9244p - 0,0343q). \quad (8)$$

Здесь $\varphi(u_s^0, u_n^0) = 0,2209 \frac{u_s^0}{u_n^0} - 1,035$;

$$\psi(u_s^0, u_n^0) = 1,035 + 0,2209 \frac{u_n^0}{u_s^0}.$$

В таблице 1 и на рис. 2 приведены результаты сравнения расчетов раскрытия берегов трещины ОВ, вычисленные по формуле (8) и численно, при следующих входных значениях: $L = 0,01$ м; $u_s^0 = u_n^0 = 1,2 \cdot 10^{-6}$ м; $K = 10$ – количество граничных элементов, на которые разбивается зияющая трещина ОВ; $p = q = 9,8 \cdot 10^4$ Н/м²; $\nu = 0,3$; $E = 3 \cdot 10^4$ МПа.

Коэффициенты интенсивности напряжений, когда берега разреза находились под действием нормальных и сдвиговых смещений, определялись по формулам (5) и (6).

В таблице 2 и на рис. 3 представлены результаты сопоставления численных расчетов и расчетов нормального раскрытия зияющей трещины, выполненных на основе соотношения (7) для случая, когда $u_s^0 = 10u_n^0$, при тех же входных данных.

Для примера была рассмотрена небольшая разбивка зияющей трещины $K = 10$, но даже при такой разбивке выбранный алгоритм решения задачи является достаточно устойчивым, что и показывают результаты численных расчетов. Так относительная погрешность решений, приведенных в таблице 1, составляет в среднем 4%, а в таблице 2 – 9%.

На основании разработанного алгоритма были получены коэффициенты интенсивности напряжения первого и второго рода:

$$K_I = \frac{G \cdot u_n^0 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{L \cdot \pi} \cdot (1-\nu)} \cdot (0,2209 \frac{u_s^0}{u_n^0} - 1,035) + \sqrt{\frac{\pi \cdot L}{2}} \cdot (0,0343q - 0,9244p), \quad (9)$$

$$K_{II} = \frac{G \cdot u_s^0 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{L \cdot \pi} \cdot (1-\nu)} \cdot (1,035 + 0,2209 \frac{u_n^0}{u_s^0}) + \sqrt{\frac{\pi \cdot L}{2}} \cdot (0,9244p - 0,0343q).$$

Формула (9) справедлива, когда $u_s^0 \geq 4,7u_n^0$.

Таким образом, для описания физических процессов, которые протекают в трещиноватых горных массивах, в работе установлены крите-

рии развития зияющей трещины, к берегам которой приложены сжимающие и сдвиговые смещения и напряжения.

Выводы

1. Сформулирована новая математическая модель, которая в отличие от моделей, приведенных другими исследователями, описывает формирование трещины нормального разрыва под действием и смещений и напряжений.

2. Разработан численный алгоритм образования трещины нормального разрыва, когда к берегам разреза приложены смешанные краевые условия.

3. Разработаны новые аналитические представления коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго рода, которые описывают новый механизм развития трещины отрыва при сжатии и сдвиге.

4. Установлены прямо пропорциональные линейные зависимости коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго рода, от сжимающих и сдвиговых смещений точек берегов основной трещины.

5. Установлена связь между сдвиговыми и нормальными смещениями, при которой осуществляется нормальное раскрытие берегов зияющей трещины.

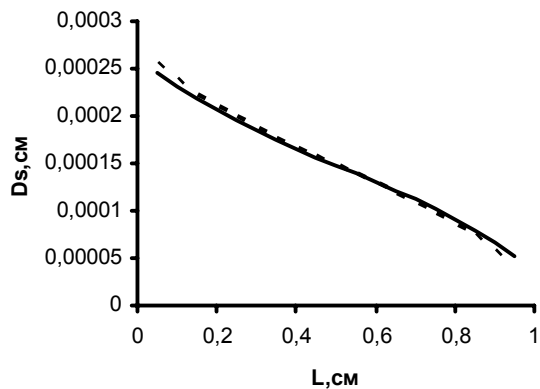


Рисунок 2. Сдвиговое раскрытие зияющей трещины, вычисленное:
— — аналитически и — численно

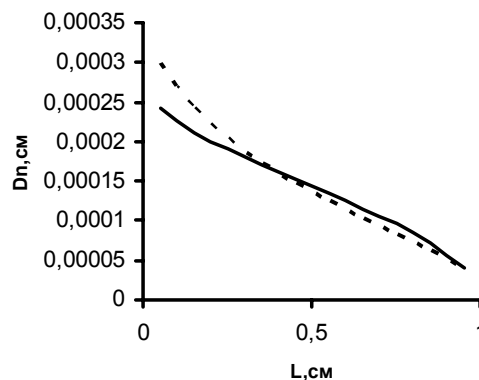


Рисунок 3. Нормальное раскрытие зияющей трещины, вычисленное:
— — аналитически и — численно

Список использованной литературы:

1. Введение в механику скальных пород / Д.Х. Троллоп, Х. Бок, Б.С. Бест, К. Уоллес и др. – М.: Мир, 1983. – 276 с.
2. Goodman, R.E. Methods of geological engineering in discontinuous rocks / R.E. Goodman. – St. Paul West Publish. Co., 1976. – 472 pp.
3. Goodman, R. E. A model for the mechanics of jointed rock / R. E. Goodman, R. L. Taylor, T. L. Brekke. – J. soil Mech. Found. Div. ASCE, 94, 1968. – P. 637 – 659.
4. Гудман, Р. Механика скальных пород / Р. Гудман. – М.: Стройиздат, 1987. – 232 с.
5. Черепанов, Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения / Г.П. Черепанов. – М.: Недра, 1987. – 308с.
6. Patton, F.D. Multiple modes of shear failure in rock / F.D. Patton. – Proc. 1–st Congr. Int. Soc. Rock Mech., Lisbon, 1966. – p. 509–513.
7. Николаевский, В.Н. Механика деформаций и разрушения горных пород / В.Н. Николаевский. – М.: Недра, 1984.
8. Кашников, Ю.А. Деформирование скального массива по системам трещин / Ю.А. Кашников, Е.М. Якушина, С.Г. Яшихмин // Известия вузов. Горный журнал. – 1992. – №3. – С. 75–80.
9. Стоянов, С.С. Механика формирования разрывных зон / С.С. Стоянов. – М.: Недра, 1977. – 144 с.
10. Anderson, E.M. The Dynamics of Faulting / E. M. Anderson. – Edinburg, 1951. – 206 pp.
11. Chinnery, M.A. The dynamics of the strike slip fault / M.A. Chinnery. – Ph. D. Thesis. Univ. of Toronto, 1962. – 138 pp.
12. Chinnery, M.A. The stress changes that accompany strike slip faulting / M. A. Chinnery. – «Bull. Seism. Soc. Am.», 1963, vol. 53, №5. – p. 921 – 932.
13. Chinnery, M.A. The dislocation fault model with a variable discontinuity / M. A. Chinnery, J. A. Petrak. – «Tectonophysics», 1968, vol. 5, №6. – P. 513– 529.
14. Maruyama, T. Stress fields in the neighborhood of a crack / T. Maruyama. – «Bull. Earthqu. Res. Inst.», 1969, vol. 47, №1. – p. 1–29.
15. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
16. Линьков, А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А.М. Линьков. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.

Сведения об авторах: Полкунов Юрий Григорьевич, заведующий кафедрой математического анализа Оренбургского государственного университета, доктор технических наук, доцент
тел. (3532)775941, e-mail: matan@mail.osu.ru

Спиридонова Екатерина Владимировна, преподаватель кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета, e-mail: www.skatyusha@ Rambler.ru