УДК 517.988.6

Павленко А.Н.
Оренбургский государственный университет
E-mail: pavlenko-a-n@mail.ru

О РЕШЕНИЯХ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ $u = KW(u,\lambda)$

В статье устанавливается существование не менее двух решений у операторного уравнения $u = KW(u,\lambda)$, что является обобщением уже полученных результатов для операторного уравнения $u = \lambda KW(u)$ и для его некоторых конкретизаций.

Ключевые слова: операторное уравнение, конус, вращение вполне непрерывного векторного поля, гомотопные векторные поля, индекс особой точки.

В работах [1-5] установлено существование нетривиальных решений у операторного уравнения

$$u = \lambda KW(u). \qquad (1)$$

Было показано, что кроме ожидаемого решения u_λ, для которого при $\lambda \to 0$ выполняется $\|u_\lambda\| \to 0$, уравнение (1) имеет еще и нетривиальное решение U_λ $\|U_\lambda\| \to \infty$ (при $\lambda \to 0$).

В ряде приложений [6] может быть получено операторное уравнение

$$u = KW(u,\lambda), \qquad (2)$$

являющиеся естественным обобщением уравнения (1).

В данной статье показывается, что и в этом случае устанавливается существование у уравнения (2) не менее двух решений при некоторой модификации условий, налагаемых на операторы K и W.

В дальнейшем будем требовать:

1) $\lambda > 0$;

2) K – линейный непрерывный оператор, действующий из банахова пространства E в банахово пространство E_1;

3) $W : E_1 \to E$ – нелинейный вполне непрерывный оператор при любом $\lambda > 0$;

4) $E_1 \subset E$ – компактное вложение;

Пусть E_+ – нормальный конус в E и существует $P : E \to E_+$ – непрерывный оператор $P(u) \ge u$ для всех $u \in E$. Из того, что E_+ – нормальный конус, следует, что E_+^* является воспроизводящим конусом [7, с. 33].

На уравнение (2) накладываются следующие ограничения.

$У_1$. Существует нормированное пространство $E_0 \supset E_1$ и функционалы $\Lambda_0, \Lambda_1 \in E_+^* \setminus \{0\}$ и положительные числа k_1, k_2 и k_3, такие, что для всех $v \in E_+ \setminus \{0\}$ выполняются неравенства:

$$1)\ \Lambda_1(P(Kv)) \ge k_1 \Lambda_0(v), \qquad (3)$$

$$2)\ \Lambda_0(v) \ge k_2 \Lambda_1(v), \qquad (4)$$

$$3)\ \Lambda_0(v) \ge k_3 \|Kv; E_0\| > 0. \qquad (5)$$

$У_2$. Оператор W является положительным на E_1.

$У_3$. Существует такая положительная функция $\beta(t)$, определенная на R_+, что для всех $a > 0$ справедливо неравенство

$$\Lambda_0(W(u,\lambda)) \ge \lambda(a\Lambda_1(P(u)) - \beta(a))(u \in E_1). (6)$$

$У_4$. Для решений семейства операторных уравнений

$$u = (1-t)KW(u,\lambda) + taKP(u)\ (0 \le t \le 1) \ (7)$$

верна оценка

$$\|u; E_1\| < V(\|u; E_0\| + a + \lambda), \qquad (8)$$

где $V : R_+ \to R_+$ – возрастающая функция.

$У_5$. Существует $k_4 > 0$ такое, что для всех $\lambda > 0$ верно неравенство

$$\|KW(u,\lambda); E_1\| \le k_4 \lambda \|u; E_1\|\ (u \in E_1), \ (9)$$

Теорема 1. Пусть выполнены приведенные выше требования к E, E_1, E_+, K, W, P, а также условия $У_1$-$У_5$, тогда существует такое $\lambda_0 > 0$, что для всех $\lambda \in (0, \lambda_0)$ существуют два решения u_λ и U_λ уравнения (2), такие, что $\|u_\lambda; E_1\| \to 0$, а $\|U_\lambda; E_1\| \to \infty$ при $\lambda \to 0$.

Доказательство.

1. Введем обозначение

$$W_t(u) = (1-t)W(u,\lambda) + taP(u).$$

Зафиксируем $\lambda \in (0, k_2)$. Оператор $W_t(u): E_1 \times [0;1] \to E$ является вполне непрерывным при любом $\lambda \in (0, k_2)$. Действительно, оператор W вполне непрерывен при любом $\lambda > 0$, а полная непрерывность оператора $P : E_1 \to E$ следует из компактности вложения $E_1 \subset E$ и непрерывности оператора $P : E \to E$.

Пусть u – решение операторного уравнения (7). Тогда будем иметь

$$\Lambda_1(P(u)) = \Lambda_1(P(KW_t(u))) \overset{(3)}{\geq} k_1\Lambda_0(W_t(u)) =$$
$$k_1\Lambda_0((1-t)W(u,\lambda) + taP(u)) =$$
$$= k_1(1-t)\Lambda_0(W(u,\lambda)) + k_1ta\Lambda_0(P(u)) \overset{(6),(4)}{\geq}$$
$$k_1(1-t)\lambda(a\Lambda_1(P(u)) - \beta(a)) + k_1k_2ta\Lambda_1(P(u)) =$$
$$k_1(1-t)\lambda a\Lambda_1(P(u)) - k_1(1-t)\lambda\beta(a) +$$
$$k_1k_2ta\Lambda_1(P(u)) = (k_1(1-t)\lambda a + k_1k_2ta)\Lambda_1(P(u)) -$$
$$k_1(1-t)\lambda\beta(a) = (k_1\lambda a - k_1t\lambda a +$$
$$+ k_1k_2ta)\Lambda_1(P(u)) - k_1(1-t)\lambda\beta(a) =$$
$$= (k_1\lambda a + k_1ta(k_2 - \lambda))\Lambda_1(P(u)) - k_1(1-t)\lambda\beta(a).$$

Так как $\lambda \in (0, k_2)$, то тогда верно неравенство $k_1ta(k_2 - \lambda) > 0$. Тогда получим

$$(k_1\lambda a + k_1ta(k_2 - \lambda))\Lambda_1(P(u)) -$$
$$k_1(1-t)\lambda\beta(a) \geq k_1\lambda a\Lambda_1(P(u)) - k_1\lambda\beta(a).$$

Выберем a настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $k_1\lambda a \geq 2$.

Таким образом, получили, что $\Lambda_1(P(u)) \geq 2\Lambda_1(P(u)) - k_1\lambda\beta(a)$. Отсюда верно неравенство $\Lambda_1(P(u)) \leq k_1\lambda\beta(a)$, что влечет

$$k_1\lambda\beta(a) \geq \Lambda_1(P(u)) = \Lambda_1(P(KW_t(u))) \overset{(3)}{\geq}$$
$$k_1\Lambda_0(W_t(u)) \overset{(5)}{\geq} k_1k_3\|KW_t(u); E_0\| =$$

$= k_1k_3\|u; E_0\|$, и тогда $\|u; E_0\| \leq \dfrac{\lambda\beta(a)}{k_3}$.

Отсюда из условия $У_4$ имеем для решений операторного уравнения (7) оценку

$$\|u; E_1\| < R_1, \qquad (10)$$

где $R_1 = V(\|u; E_0\| + a + \lambda)$.

2. Теперь рассмотрим сферу

$$\omega(0, R_1) = \{u \in E_1 \mid \|u; E_1\| = R_1\}.$$

Из неравенства (10) следует, что векторные поля $\Phi_t = I - KW_t$ на сфере $\omega(0, R_1)$ не вырождаются. Отсюда следует, что векторные поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны на сфере $\omega(0, R_1)$ и имеют на ней одинаковые вращения [8, с. 128, 137].

3. Вращение векторного поля $\Phi_1 = I - aKP$ на сфере $\omega(0, R_1)$ равно 0, так как поле Φ_1 на этой сфере выпускает направление, отвечающее лучу $\sigma K(v_0)$. Здесь $\sigma > 0$, $v_0 \in E_+ \setminus \{0\}$ [8, с. 142].

Действительно, предположив, что существует $u_0 \in E_1$, для которого верно равенство $\Phi_1(u_0) = \sigma K(v_0)$, будем иметь

$$u_0 - aKP(u_0) = \sigma K(u_0),\ u_0 = K(aP(u_0 + \sigma v_0)).$$

Рассмотрим

$$\Lambda_1(P(u_0)) = \Lambda_1(PK(aP(u_0) + \sigma v_0)) \overset{(3)}{\geq}$$
$$k_1\Lambda_0(aP(u_0) + \sigma v_0) = k_1a\Lambda_0(P(u_0)) +$$
$$+ k_1\sigma\Lambda_0(v_0) > k_1a\Lambda_0(P(u_0)) \overset{(4)}{\geq} k_1k_2a\Lambda_1(P(u_0)).$$

Выберем a настолько большим, чтобы было верно неравенство $k_1k_2a \geq 2$. Тогда получим противоречие

$$\Lambda_1(P(u_0)) > 2\Lambda_1(P(u_0)).$$

В силу того, что векторные поля Φ_0 и Φ_1 на сфере $\omega(0, R_1)$ имеют одинаковые вращения, делаем вывод, что вращение векторного поля Φ_0 на сферах достаточно больших радиусов равно 0.

4. Зафиксируем $R_2 > 0$. Покажем, что при достаточно малых $\lambda > 0$ векторное поле Φ_0 не вырождается на сфере $\omega(0, R_2) = \{u \in E_1 \mid \|u; E_1\| = R_2\}$.

Действительно,

$$\|\Phi_0(u); E_1\| = \|u - KW(u,\lambda); E_1\| \geq$$
$$\|u; E_1\| - \|KW(u,\lambda); E_1\| \overset{(9)}{\geq} \|u; E_1\| - k_4\lambda\|u; E_1\| =$$
$$(1 - k_4\lambda)\|u; E_1\| = (1 - k_4\lambda)R_2.$$

Отсюда при $\lambda \in \left(0; \min\left\{\lambda_1, \dfrac{1}{k_4}\right\}\right)$ получаем, что $\|\Phi_0(u); E_1\| > 0$, что влечет $\Phi_0(u) \neq 0$ – векторное поле Φ_0 не вырождается на сфере $\omega(0, R_2)$.

Из того, что при $\lambda \in \left(0; \min\left\{\lambda_1, \dfrac{1}{k_4}\right\}\right)$ на сфере $\omega(0, R_2)$ выполняется неравенство

$$\|KW(u,\lambda); E_1\| \leq k_4\lambda\|u; E_1\| < \|u; E_1\|,$$

следует [8, с. 129], что вращения векторных полей Φ_0 и I совпадают на сфере $\omega(0, R_2)$, и тогда $\gamma(\Phi_0, \omega(0; R_2)) = 1$.

5. Так как $\gamma(\Phi_0, \omega(0; R_1)) = 0$ и $\gamma(\Phi_0, \omega(0; R_2)) = 1$, то согласно теореме об алгебраическом числе особых точек [8, с. 139] имеем, что у векторного поля Φ_0 существуют хотя бы две особые точки u_λ и U_λ, причем особая точка u_λ принадлежит шару $S(0, R_2) = \{u \in E_1 \mid \|u; E_1\| < R_2\}$, а особая точка U_λ принадлежит внешности шара $S(0, R_2)$.

6. Рассмотрим поведение решений u_λ и U_λ при $\lambda \to 0$.

6.1. Решение $u_\lambda \in S(0, R_2)$.

$$\|u_\lambda; E_1\| = \|KW(u_\lambda,\lambda); E_1\| \overset{(9)}{\leq} k_4\lambda\|u_\lambda; E_1\| < k_4\lambda R_2.$$

Отсюда следует, что при $\lambda \to 0$ выполняется $\|u_\lambda; E_1\| \to 0$.

6.2. Решение $U_\lambda \notin \overline{S}(0, R_2)$.

$$R_0 < \|U_\lambda; E_1\| = \|KW(U_\lambda, \lambda); E_1\| \overset{(9)}{\le} k_4 \lambda \|U_\lambda; E_1\|.$$

Отсюда следует, что $\|U_\lambda; E_1\| > \dfrac{R_0}{k_4 \lambda}$, и при $\lambda \to 0$ выполняется $\|U_\lambda; E_1\| \to \infty$.

Теорема доказана.

Условие малости параметра $\lambda > 0$ существенно для справедливости теоремы; при достаточно больших значениях параметра уравнение (2) может не иметь ненулевых решений.

Пусть, например, выполняется неравенство

$$\Lambda_0(W(u,\lambda)) \ge \lambda \Lambda_1(P(u)). \qquad (11)$$

Тогда, если $u \ne 0$ – решение уравнения (2), то получим

$$\Lambda_0(W(u,\lambda)) \ge \lambda \Lambda_1(P(u))$$

$$= \lambda \Lambda_1(P(KW(u,\lambda))) \overset{(3)}{\ge} \lambda k_1 \Lambda_0(W(u,\lambda)). \qquad (12)$$

Выбрав λ достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство $\lambda k_4 \ge 2$, получим $\Lambda_0(W(u,\lambda)) \ge 2\Lambda_0(W(u,\lambda))$, что невозможно в силу неравенства (5).

При усилении требований к оператору W уравнение (1) может иметь не менее двух решений при любом $\lambda > 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, за исключением условия $У_5$, при любом $\lambda > 0$ выполняются $W(0,\lambda) = 0$, и оператор W дифференцируем по Фреше в точке 0.

Тогда при любом $\lambda > 0$ уравнение (1) имеет не менее двух решений.

Доказательство.

1. Из того, что при любом $\lambda > 0$ выполняется $W(0,\lambda) = 0$, а оператор K является линейным, следует, что 0 является решением уравнения (2) и особой точкой векторного поля Φ_0.

2. Фиксируем $\lambda > 0$, и пусть $h \in E_1$, $\Lambda \in E_+^*$.

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \Lambda(W(th, \lambda))$. Очевидно, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) \ge 0$ при любом t. Отсюда имеем $\varphi'(0) = 0$. Что в свою очередь влечет $\Lambda(W'(0,\lambda)) = 0$ при всех $\Lambda \in E_+^*$. Тогда, учитывая, что конус E_+^* является воспроизводящим, получим $W'(0,\lambda) = 0$.

3. Получили, что оператор $KW : E_1 \to E_1$ дифференцируем по Фреше в точке 0 и его производная в этой точке равняется 0. Согласно теореме Лере-Шаудера [8, с. 148], 0 является изолированной особой точкой векторного поля Φ_0, причем $\mathrm{ind}(0; \Phi_0) = 1$.

Из доказательства теоремы 1 имеем, что вращение векторного поля Φ_0 на сферах с достаточно большим радиусом равно 0. Отсюда согласно теореме об алгебраическом числе особых точек следует, что существует ненулевое решение U_λ уравнения (2).

Теорема доказана.

Пусть справедливы непрерывные вложения $E_1 \subset H \subset E_0$, где H – некоторое банахово пространство. Будем говорить, что ненулевые решения уравнения (2) образуют в пространстве H непрерывную ветвь бесконечной длины, если для любой ограниченной области $D \subset H$, содержащей 0, существует такая пара (λ, U), что $\lambda > 0$, а U – решение уравнения (2), причем $U \in \partial D$.

Теорема 3. Пусть выполнены приведенные выше требования к E, E_1, E_+, K, W, P, H, неравенства (11) и $k_4 \ge k_1$, а также условия $У_1$, $У_2$, $У_4$ и $У_5$. Тогда ненулевые решения уравнения (2) образуют в пространстве H непрерывную ветвь бесконечной длины.

Доказательство.

1. Пусть u – ненулевое решение уравнения (2) при некотором $\lambda > 0$. Тогда из неравенства (12) следует, что уравнение (2) может иметь ненулевые решения только при $\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{k_1}\right]$.

2. Рассмотрим ограниченную область $D \subset H$, содержащую 0.

Так как вложение $H \subset E_0$ непрерывно, а $\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{k_1}\right]$, то из условия $У_4$ следует для решений уравнения (2) следующая оценка

$$\|u; E_1\| < R, \qquad (13)$$

где R не зависит от λ.

Из неравенства (13) следует, что вполне непрерывное векторное поле $\Psi_\lambda(u) = u - KW(u,\lambda)$ не вырождается на границе области $D_R = D \cap S(0,R)$, и тогда определено вращение $\gamma(\Psi_\lambda, \partial D_R)$.

3. При $\lambda > \dfrac{1}{k_1}$ вращение $\gamma(\Psi_\lambda, \partial D_R) = 0$. Это следует из того, что при $\lambda > \dfrac{1}{k_1}$ векторное поле Ψ_λ на ∂D_R выпускает направление $\sigma K(v_0)$ $(\sigma > 0,\ v_0 \in E_1 \setminus \{0\})$.

Действительно, предположив противное, то есть что при некотором $u_0 \in \partial D_R$ верно равенство $\Psi_\lambda(u_0)=\sigma K(v_0)$, мы получим $u_0 - KW(u_0,\lambda)=\sigma K(v_0)$, и тогда

$$u_0 = KW(u_0,\lambda)+\sigma K(v_0)= K(W(u_0,\lambda)+\sigma v_0).$$

Теперь рассмотрим

$$\Lambda_1(P(u_0)) = \Lambda_1(PK(W(u_0,\lambda)+\sigma v_0))\overset{(3)}{\geq}$$

$$k_1\Lambda_0(W(u_0,\lambda)+\sigma v_0)= k_1\Lambda_0(W(u_0,\lambda))+$$

$$k_1\sigma\Lambda_0(v_0)\overset{(5)}{>} k_1\Lambda_0(W(u_0,\lambda))\overset{(11)}{\geq} k_1\lambda\Lambda_1(P(u_0))>$$

$> \Lambda_1(P(u_0))$ – получили противоречие.

Таким образом, векторное поле Ψ_λ на ∂D_R выпускает направление $\sigma K(v_0)$.

4. Найдем вращение векторного поля Ψ_λ на ∂D_R при малых $\lambda > 0$. Из условия $У_5$ следует, что при $\lambda \in \left(0,\frac{1}{k_4}\right]$ будет верно неравенство $\|KW(u,\lambda);E_1\| \leq \|u;E_1\|$. Так как векторные поля I и Ψ_λ не вырождаются на ∂D_R, то последнее неравенство влечет гомотопность этих полей на ∂D_R. Тогда, учитывая, что $0\in \partial D_R$, получим $\gamma(I,\partial D_R)=\gamma(\Psi_\lambda,\partial D_R)=1$.

5. Получили, что при $\lambda \in \left(0,\frac{1}{k_4}\right]$ верно равенство $\gamma(\Psi_\lambda,\partial D_R)=1$, а при $\lambda > \frac{1}{k_1}$ вращение $\gamma(\Psi_\lambda,\partial D_R)=0$. Тогда векторные поля $\Psi_{\lambda_1}\left(\lambda_1 \in \left(0,\frac{1}{k_4}\right]\right)$ и $\Psi_{\lambda_2}\left(\lambda_2 \in \left(\frac{1}{k_1},+\infty\right)\right)$ не являются гомотопными на ∂D_R, но тогда должна существовать пара (λ,U), где $\lambda \in \left(\frac{1}{k_4},\frac{1}{k_1}\right]$ и $U \in \partial D_R$, причем $\Psi_\lambda(U)=0$. Отсюда следует, что U – решение уравнения (1), что влечет выполнимость для U неравенства (13). Тогда из того, что $U \in \partial D_R$ следует, что $U \in \partial D$.

Теорема доказана.

Следует отметить, что отличительной особенностью доказанных теорем является отсутствие требования положительности оператора *K*. Если же оператор *K* положителен, то можно ослабить требования к оператору *W*.

Список использованной литературы:

1. Климов, В.С. Одномерные краевые задачи с двумя решениями // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Вып. 3. Ярославль, 1978. – С. 90-111.
2. Климов, В.С., Павленко, А.Н. Нетривиальные решения краевых задач с сильными нелинейностями // Дифференциальные уравнения, 1997, т. 30. С. 1676-1682.
3. Павленко, А. Н. Обратные функциональные неравенства и их приложения. Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Воронеж: ВГУ, 1998. – 117 с.
4. Климов, В.С., Павленко, А.Н. Обратные функциональные неравенства и их приложения к нелинейным эллиптическим краевым задачам // Сибирский мат. журнал. Июль-август 2001. Том 42, №4. С. 781-795.
5. Павленко, А.Н. Обратные функциональные неравенства для вектор-функций скалярного аргумента и их приложения к нелинейным граничным задачам // Вестник Оренбургского государственного университета. Октябрь 2008. №10 (92). С. 128-134.
6. Функциональный анализ (серия «Справочная математическая литература») / под ред. С.Г. Крейна. изд. 2. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
7. Красносельский, М.А. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов / М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А.В. Соболев. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
8. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа. / М.А. Красносельский, П. П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 510 с.

Сведения об авторе: Павленко Алексей Николаевич, доцент кафедры математического анализа Оренбургский государственный университет, математический факультет, кандидат физико-математических наук, 460035, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, кафедра математического анализа, тел. (3532)372533
e-mail: matan@mail.osu.ru, pavlenko-a-n@mail.ru

Pavlenko A.N.

ABOUT SOLUTIONS OF OPERATOR EQUATION $u = KW(u,\lambda)$

In this article we prove existence no less two solutions of operator equation $u = KW(u,\lambda)$, that is the generalization of the results got for operator equation $u = \lambda KW(u)$ and for its several individualizings.

Key words: operator equation, cone, rotation of fully continuous vector field, homotopic vector fields, index of singular point.