

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

В статье представлены подходы к моделированию функции принадлежности и реализация этих подходов на примере задачи оценки рыночной стоимости предприятия нефтяной промышленности.

Ключевые слова: лингвистическая переменная, функция принадлежности, терм-множество, рыночная стоимость, случайный процесс.

В работе [1] приводится достаточно обширный параметрический набор одномерных функций принадлежности, используемых при построении систем нечеткого вывода. При этом предполагают, что носитель нечеткого множества \tilde{X} определен. К примеру, это промежуток $[d_1; d_2]$, на котором функция принадлежности $\mu_{\tilde{X}}(x) \neq 0$, $\mu_{\tilde{X}}(x) \in (0; 1)$. На практике d_1 , d_2 и функция принадлежности $\mu_{\tilde{X}}(x)$ неизвестны. В работе [2] реализован (в частном случае) следующий подход, предложенный Реннером А.Г., к определению границ изменения уровней показателей и построения функции принадлежности $\mu_{\tilde{X}}(x)$. Например, для построения левого ребра функции принадлежности $\mu^{(1)}(x)$:

1) по результатам высказываний экспертов о значениях анализируемого параметра x строим на промежутке $[x_{\min}; x_{\max}]$ интервальный ряд частот k_i , относительных частот p_i^* , плотности относительных частот f_i^* и строим «гистограмму»;

2) в каком-либо классе подбираем и методом наименьших квадратов оцениваем функцию $\varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$, сглаживающую «гистограмму»:

$$\sum_{i=1}^m (f_i^* - \varphi(x_i^*, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l))^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – параметры оцениваемой функции; x_i^* – представитель разряда.

3) Из уравнения, характеризующего практическую достоверность высказываний экспертов

$$\int_{\hat{m}-\Delta}^{\hat{m}+\Delta} \varphi_1(x, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_l) dx = \gamma, \quad (2)$$

где γ – число, близкое к единице, а \hat{m} – средневзвешенное высказывание экспертов, находим $\hat{\Delta}$.

4) Строим левое ребро функции принадлежности, полагая $\hat{d}_1 = \hat{m} - \hat{\Delta}$, $\hat{d}_2 = \hat{m} + \hat{\Delta}$:

$$\mu_{[d_1; d_2]}^{(1)}(x) = \int_{d_1}^x \varphi_1(t, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_l) dt, \quad x \in [d_1; d_2]. \quad (3)$$

Проводя аналогичные рассуждения относительно границ изменения следующего уровня показателя находим d_3, d_4 и строим правостороннее ребро функции принадлежности $\mu_{[d_3; d_4]}^{(2)}(x)$:

$$\mu_{[d_3; d_4]}^{(2)}(x) = \int_x^{d_4} \varphi_2(t, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_s) dt, \quad x \in [d_3; d_4]. \quad (4)$$

Однако вычислительные эксперименты показали, что в общем случае возможна ситуация, когда уравнение (2) не имеет решение при γ близких к 1. В связи с этим предлагается уточнить процедуру оценивания функции φ_1 на втором этапе как решение задачи на условный экстремум:

$$\sum_{i=1}^m (f_i^* - \varphi_1(x_i^*, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l))^2 \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \varphi_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) dx = 1. \quad (6)$$

Продемонстрируем данный подход на примере задачи оценки рыночной стоимости предприятия нефтяной промышленности ОАО «Южуралнефтегаз».

Среди российских оценщиков стоимости предприятия наибольшей популярностью пользуется модель Блэка-Шоулза, разработанная для оценки стоимости акций на фондовом рынке. Модель опирается на оценку стоимости предприятия как оценку некоего колл-опциона, включающего в себя стоимость активов компании и величину ее совокупных долговых обязательств.

Основное предположение модели состоит в том, что цена базового актива изменяется во времени случайно, образуя случайный процесс, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dS_t = S_t \cdot (\mu dt + \sigma dW_t); \quad (7)$$

с начальным условием $S(0) = S_0$,

где t – момент времени, $t \in [0; T]$;

T – период наблюдений, то есть диапазон времени от начала наблюдения в момент времени $t=0$ до момента остановки $t=T$;

S_t – уровень активов компании к моменту времени t ;

μ – коэффициент дрейфа;

σ – волатильность;

W_t – стандартный винеровский процесс (броуновское движение) с коэффициентом сноса 0 и коэффициентом диффузии 1.

При определенных предположениях стоимость колл-опциона рассчитывается следующим образом:

$$C_T = S_0 \cdot \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + r \cdot t + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}} \right) - e^{-rt} \times \\ \times K \cdot \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + r \cdot t - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}} \right), \quad (8)$$

где C_T – цена стандартного европейского колл-опциона на момент его предъявления;

S_0 – текущая стоимость базового актива;

r – безрисковая процентная ставка, начисляемая по формуле сложного процента;

t – время, оставшееся до исполнения опциона (дюрация долга);

K – цена исполнения опциона;

σ^2 – дисперсия стоимости базового актива;

$\Phi(z)$ – интегральная функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (11)$$

Применение данной модели для оценки стоимости предприятия основано на допущении, что под ценой актива понимается текущая стоимость оцениваемой компании, а под стоимостью исполнения опциона – номинальная сто-

имость долга. При этом под исполнением опциона понимается гипотетическая ликвидация компании с погашением всей имеющейся задолженности за счет имеющихся у нее активов [4].

Таким образом, стоимость предприятия является функцией пяти переменных: стоимости базового актива S_0 , цены исполнения опциона K , безрисковой ставки r , дюрации долга t и стоимости базового актива σ^2 .

В качестве параметров опционной модели использовались входные данные, указанные на дату оценки (конец IV квартала 2009 года):

1) стоимость базового актива S_{0n} принималась равной суммарной стоимости активов предприятия (2 909 370 тыс. руб.).

2) цена исполнения опциона K принималась равной номиналу долгов предприятия: обязательства ОАО «Юуралнефтегаз» по долгосрочным и краткосрочным кредитам и займам составила 831 866 тыс. руб.;

3) безрисковая процентная ставка принималась равной эффективной доходности облигаций федерального займа (государственные облигации). По состоянию на дату оценки ее величина колеблется от 6 до 9% годовых в зависимости от надежности банка-эмитента. При этом продолжительность долга t составляет от 1,5 до 2 лет соответственно. (Расчеты произведены на основе депозитных ставок банков высшей категории надежности по данным сайта <http://www.rusbonds.ru>)

4) дисперсия базового актива σ^2 принималась равной 30-40%, исходя из колебаний доходностей акций аналогичных предприятий нефтяной промышленности.

После подстановки указанных значений в (8), получим следующие выводы о рыночной стоимости оцениваемого предприятия:

1) вероятность того, что стоимость активов ОАО «Южуралнефтегаз» в период до даты погашения имеющейся задолженности будет не ниже величины задолженности, т. е. предприятие не будет в положении банкротства, равна 99%

$$\text{(так как } \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + r t + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma \sqrt{t}} \right) = 0,99);$$

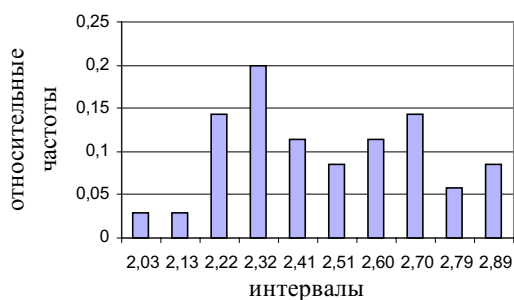
2) стоимость предприятия с учетом стандартного нормального распределения вероят-

ностей на дату оценки находится в пределах от 2 157 194 до 2 909 370 тыс. руб.

Для того чтобы определить к какому уровню относится полученная оценка стоимости рассмотрим данный показатель как лингвистическую переменную «Рыночная стоимость предприятия» с терм-множеством значений «Низкий уровень», «Средний уровень», «Высокий уровень».

Для получения информации о границах перехода терм-множеств формируется группа экспертов, перед которыми ставится задача указать возможную границу изменения рассматриваемого показателя (рыночной стоимости предприятия C_T) в каждом уровне. Фрагмент результатов их опроса приведен в таблице 1.

Определим интервалы, в которых мнения всей экспертной группы совпадают. В данном случае, для рассматриваемого показателя такими диапазонами будут являться интервалы [1,49; 2,05] для низкого уровня, [2,97; 3,05] для среднего уровня и [3,99; 4,07] для высокого уровня. Аналогично трапециoidalной функции принадлежности на этих интервалах функция принадлежности будет принимать значение, равное 1. Оставшиеся интервалы формируют зону неуверенности эксперта в принятой классификации уровней показателей. Осуществим интервальное разбиение этих областей на отрезки и построим «гистограммы» (рис. 1).



а)

Таблица 1. Результаты опроса экспертов показателя «Рыночная стоимость предприятия, млн. руб.»

Номер эксперта	Границы уровней показателя C_T , млрд. руб.					
	Низкий		Средний		Высокий	
	d_1	d_2	d_2	d_3	d_3	d_4
1	<2,06	2,06	2,06	3,86	3,86	>3,86
2	<2,64	2,64	2,64	3,33	3,33	>4,57
3	<2,28	2,28	2,28	3,31	3,31	>4,72
4	<2,51	2,51	2,51	3,11	3,11	>4,51
5	<2,41	2,41	2,41	3,99	3,99	>4,82
6	<2,69	2,69	2,69	3,38	3,38	>4,84
7	<2,75	2,75	2,75	3,50	3,50	>4,14
...
35	<2,75	2,75	2,75	3,45	3,45	>4,27

На основании вида «гистограмм» для аппроксимации плотности относительных частот мнений экспертов f_i^* подбираем функцию вида:

$$\varphi(x, A, \alpha, \beta) = A^2 \cdot e^{-\alpha^2(x-\beta)^2}, \quad (7)$$

где A, α, β – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Решая задачу (5-6) находим параметры функции A, α, β ; задавшись уровнем надежности $\gamma = 0,95$, находим $\hat{\Delta}$ из уравнения вида (2). Результаты расчетов и границы перехода уровня $[\hat{\beta} - \hat{\Delta}; \hat{\beta} + \hat{\Delta}]$ представлены в таблице 2.

Таким образом, функция принадлежности показателя «Рыночная стоимость предприятия, млн. руб.» для низкого, среднего и высокого уровня может быть записана следующим образом:



б)

Рисунок 1. Гистограммы показателя «Рыночная стоимость предприятия, млн. руб.» для границ перехода уровней а) «низкий-средний» б) «средний-высокий»

Таблица 2. Результаты расчетов параметров функций принадлежности и границ перехода уровня

Границы перехода уровней показателя	Оценки параметров						Границы перехода уровней	
	A	α	β	Δ	x_{\min}	x_{\max}	$\beta - \Delta$	$\beta + \Delta$
«низкий-средний»	1,172	2,018	2,533	0,437	2,040	3	2,096	2,97
«средний-высокий»	1,443	-3,464	3,397	0,327	3,08	4	3,069	3,724

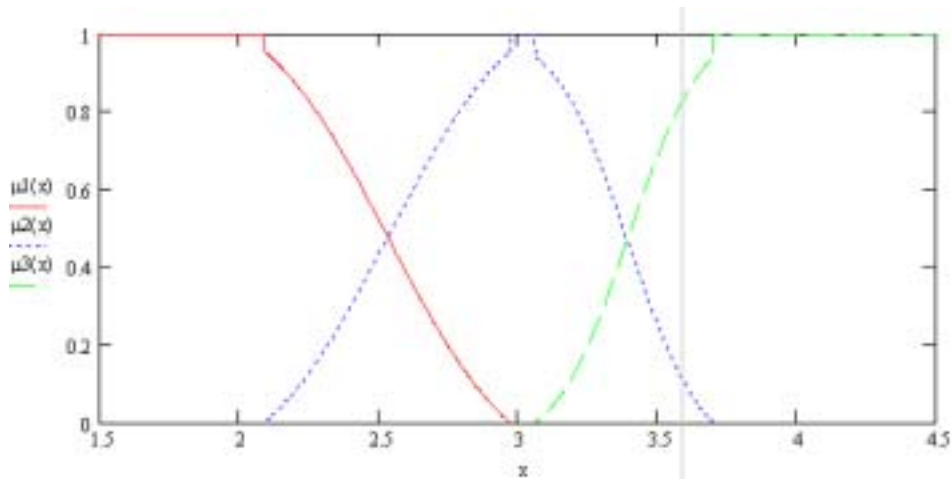


Рисунок 2. Функция принадлежности показателя «Рыночная стоимость предприятия, млн. руб.»

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0; 2,09) \\ \int_{2,09}^x 1,172^2 \cdot e^{-2,018^2(x-2,533)^2} dx & x \in [2,09; 2,97], \\ 0 & x \in (2,97; \infty) \end{cases} \quad (8)$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0; 2,09) \\ \int_{2,09}^x 1,172^2 \cdot e^{-2,018^2(x-2,533)^2} dx & x \in [2,09; 2,97] \\ 1 & x \in (2,09; 2,97) \\ \int_{3,06}^x 1,443^2 \cdot e^{-3,464^2(x-3,397)^2} dx & x \in [3,06; 3,7] \\ x & \\ 0 & x \in (3,7; \infty) \end{cases} \quad (9)$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0; 3,06) \\ \int_{3,06}^x 1,443^2 \cdot e^{-3,464^2(x-3,397)^2} dx & x \in [3,06; 3,7]. \\ 3,06 & \\ 1 & x \in (3,7; \infty) \end{cases} \quad (10)$$

Ее графическое отображение представлено на рисунке 2.

На основе построенной функции принадлежности можно распознать уровня показателя «Рыночная стоимость предприятия, млн. руб.». Таким образом, интервал рыночной стоимости предприятия ОАО «Южуралнефтегаз» [2 157 194; 2 909 370] тыс. руб. воспринимается как промежуточное значение между низким и

средним. При этом левая граница интервала оценивается с возможностью 0,9 как «низкая» стоимость и 0,1 как «средняя», а правая граница интервала оценивается с возможностью 0,1 как «низкая» стоимость и 0,1 как «низкая», а правая с возможностью 0,9 как «средняя». В таких условиях предприятие является недооцененным.

7.12.2010

Список литературы:

1. Халов, Е. А. Одномерные многопараметрические функции принадлежности в задачах нечеткого моделирования и управления / Е. А. Халов // Мехатроника, автоматизация, управление, 2007. – N 4. – С. 54.
2. Ольховая, О. Н. Моделирование риска банкротства инфокоммуникационной компании [Текст]: дис.... канд. экон. наук: 08.00.13 / О. Н. Ольховая; гос. образоват. учреждение высш. проф. образования «Поволж. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики». – Самара, 2010. – 160 с.: ил. – Библиогр.: с. 125-130. – Прил.: с. 132-160.
3. Недосекин А.О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний [Текст]: дис. док. экон. наук: 08.00.13 / А.О. Недосекин; Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования «Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов». – СПб, 2003. – 280 с.: ил. – Библиогр.: с. 211-226. – Прил.: с. 226-280.
4. Оценка бизнеса / под ред. А. Г. Грязновой, М. А. Федотовой; Финансовая акад. при Правительстве РФ, Ин-т проф. оценки. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2009. – 736 с.
5. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики: Факты. Модели. – Том 1. – М.: Фазис, 1998. – 512с.

Сведения об авторах:

Реннер Ю.А., инженер-программист 1 категории, главное управление банка России по Оренбургской области, региональный центр информатизации, кафедра математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы 13, ауд. 6106, e-mail: mme@mail.osu.ru

Ольховая Ольга Николаевна, старший преподаватель кафедры информационных систем в экономике Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики
443010, г. Самара, ул. Льва Толстого, 23, ауд. 302, тел. (846) 2280051, e-mail: olhovaya@inbox.ru

Шаяхметова Роза Минулловна, ассистент кафедры математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы 13, ауд. 6106, тел. (3532) 372444, e-mail: fiz.mme.rosa@rambler.ru

Яркова Ольга Николаевна, доцент кафедры математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета
460018, г. Оренбург, пр-т Победы 13, ауд. 6106, тел. (3532) 372444, e-mail: yarkova_on@mail.ru

UDC 519.862.5: 657.421.32

**Renner Y.A., Olhovaya O.N., Shajahmetova R.M., Yarkova O.N.
TO THE QUESTION ON MODELING OF FUNCTION OF THE ACCESSORY**

In article results approaches to modeling of function of an accessory and realization of these approaches on an example of a problem of an estimation of market cost of the enterprise of petroleum industry are presented. Keywords: a linguistic variable, accessory function, a term-set, market cost, casual process.

References:

1. Halov, E. I. One-dimensional multiple parameter functions of an accessory in problems of indistinct modeling and management / E.A.Halov//Mehatronika, automation, management, 2007. – N 4. – With. 54.
2. Olhovaja, O.N. Modelirovanie of risk of bankruptcy инфокоммуникационной the companies [Text]: дис.... канд. экон. Sciences: 08.00.13 / O.N.Olhovaja; The state educational institution of the higher vocational training «Povolzh. state educational university un a telecommunications and computer science». – Samara, 2010. – 160 with.: silt. – Bibliogr.: with. 125-130. – Enc.: with. 132-160.
3. Nedosekin A.O. methodological of a basis of modeling of financial activity with use of is indistinct-plural descriptions [Text]: diss. the doctor of Economics: 08.00.13 / A.O.nedosekin; The state educational institution of the higher vocational training «the St.-Petersburg state university of economy and the finance». – SPb, 2003. – 280 with.: silt. – Bibliogr.: with. 211-226. – Enc.: with. 226-280.
4. An estimation of business [Text]: textbook for high schools / under the editorship of A. G.Grjaznojov, M.A.Fedotovoj; financial academy at the Government of the Russian Federation, institute of prof. estimation. – secnd edition., the processed and added. – M: the Finance and statistics, 2009. – 736 with.
5. Shiriaev, A.N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. – M.: World Scientific Publishing Company, 1999. – 688 with.