УДК 519.862.4

Реннер А.Г.
Оренбургский государственный университет
E-mail: mme@mail.osu.ru

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ И АНАЛИЗЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

В рамках определенных допущений о динамике занятости строится и анализируется односекторная стохастическая модель экономики.

Ключевые слова: фондовооруженность, народнохозяйственная производительность, формула Ито, стохастическое дифференциальное уравнение.

Рассмотрим модель замкнутой односекторной экономической системы, в которой производится «один универсальный продукт», который потребляется и инвестируется. В момент времени t состояние экономики характеризуется показателями:

X_t – валовый внутренний продукт;

C_t – фонд производственного потребления;

I_t – инвестиции;

L_t – число занятий;

K_t – основные фонды.

В работах [1], [2] предполагались положительные темпы прироста числа занятых n и изменение числа занятых согласно закону

$$L_t = L_0 e^{\nu t}, \qquad (1)$$

где L_0 – число занятых в начальный момент времени, что считалось вполне оправданным на «небольшом» промежутке времени (до 2030-2040 г.). Однако современные реалии требуют более естественных допущений, к примеру, мы предлагаем считать, что эволюция L_t описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \dfrac{dL_t}{dt} = -\nu\left(L(0) - l_0\right)e^{-\nu t} \\ L\big|_{t=0} = L(0) \end{cases}, \qquad (2)$$

или

$$L_t = \left(L(0) - l_0\right)e^{-\nu t} + l_0, \qquad (3)$$

где ν – темпы падения числа занятых;

$L(0)$ – число занятых в начальный момент времени;

l_0 – число занятых при достаточно больших t.

Отметим, что переписав (3) в виде:

$$L_t = e^{-\nu t}L(0) + \left(1 - e^{-\nu t}\right)l_0, \qquad (3^*)$$

мы можем интерпретировать число занятых на момент времени t, как экспоненциально-взвешенное значение $L(0)$ и l_0 с весами

$$P_1 = e^{-\nu t},\ \ P_1 = \left(1 - e^{-\nu t}\right).$$

Пусть μ – доля выбывших за год производственных фондов, r – норма накопления, а валовый внутренний продукт определяется линейно-однородной неоклассической производственной функцией $X_t = F(K_t, L_t)$. Тогда износ и инвестиции в расчете на год равны μK_t и $I_t = \rho X_t = \rho F(K_t, L_t)$ соответственно. Следовательно, прирост фондов составляет $dK_t = -\mu K_t + I_t dt$ или

$$dK_t = \left(-\mu K_t + \rho F(K_t, L_t)\right)dt. \qquad (4)$$

Для учета влияния на динамику фондов случайных факторов и свойств F, построим модель в форме (5)

$$\frac{dK_t}{K_t} = \left(-\mu + \rho F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right)\right)dt + \sigma dW_t, \qquad (5)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс,

а σ – коэффициент диффузии, характеризующий изменчивость прироста фондов.

Перейдем к относительным (экспоненциально-взвешенным) показателям:

$k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$ – фондовооруженность;

$x_t = \dfrac{X_t}{L_t}$ – народнохозяйственная производительность;

$i_t = \dfrac{I_t}{L_t}$ – удельные инвестиции на одного занятого;

$c_t = \dfrac{C_t}{L_t}$ – среднедушевое потребление.

На основании формулы Ито для фондовооруженности $k(t)$ получим стохастическое дифференциальное уравнение.

$$dk_t = \left(-\left(\mu + \frac{(\nu L(0) - \nu l_0)e^{-\nu t}}{e^{-\nu t}L(0) + (1 - e^{-\nu t})l_0}\right)k_t + \rho F(k_t, 1)\right)dt + \\ + \sigma k_t dW_t .$$

Положив

$$\lambda(t) = \mu + (\nu L(0) - \nu l_0)e^{-\nu t} / \left(e^{-\nu t}L(0) + (1 - e^{-\nu t})l_0\right),$$
$$f(k_t) = F(k_t, 1),$$

получаем окончательно односекторную стохастическую динамическую модель экономики

$$\begin{cases} dk_t = (-\lambda(t)k_t + \rho f(k_t))dt + \sigma k_t dW_t \\ k(0) = K_0 / L(0) \\ x_t = f(k_t),\ i_t = \rho f(k_t),\ c_t = (1-\rho)k_t . \end{cases} \quad (6)$$

Соответствующая детерминированная модель (аналог модели Солоу)

$$\begin{cases} dk_t = (-\lambda(t)k_t + \rho f(k_t))dt \\ k(0) = K_0 / L(0) \\ x_t = f(k_t),\ i_t = \rho f(k_t),\ c_t = (1-\rho)f(k_t). \end{cases} \quad (7)$$

Рассматривая в качестве производственной функцию Кобба-Дугласа

$$F(K_t, L_t) = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha},\ f(k_t) = Ak_t^{\alpha},$$

перепишем модель (6) в виде:

$$\begin{cases} dk_t = \left(-\lambda(t)k_t + \rho A\left(k_t^{\alpha}\right)\right)dt + \sigma k_t dW_t \\ k_0 = K_0 / L(0) \\ x_t = A\left(k_t^{\alpha}\right),\ i_t = \rho A\left(k_t^{\alpha}\right),\ c_t = (1-\rho)Ak_t^{\alpha} . \end{cases} \quad (8)$$

Для построения решения задачи (8) преобразуем ее, заменив $u_t = k_t^{1-\alpha}$. С помощью формулы дифференцирования Ито получим из (8)

$$du_t = \left[-(1-\alpha)\left(\lambda(t) + 0{,}5\alpha\sigma^2\right)u_t + (1-\alpha)\rho A\right]dt + \\ + (1-\alpha)\sigma u_t dW_t . \quad (9)$$

Решением уравнения (9), как легко проверить с помощью формулы Ито является функция

$$u_t = S_t\left(u_0 + (1-\alpha)\rho A\int_0^t \frac{d\tau}{S_\tau}\right), \quad (10)$$

где

$$S_t = S_0 e^{-(1-\alpha)\left[\left(0{,}5\alpha\sigma^2 + 0{,}5(1-\alpha)\sigma^2\right)t + \int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right] + \sigma(1-\alpha)W_t} \quad (11)$$

Проведя обратную замену, найдем

$$k_t = u_t^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left\{S_t\left(k_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\rho A\int_0^t \frac{d\tau}{\rho_t}\right)\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (12)$$

и далее x_t, i_t, c_t. Сопоставляя (12) и решение детерминированной задачи (7) найдем $S_0 = 1$.

Перейдем к оценке характеристик рассматриваемых показателей. Для оценки математического ожидания k_t, предварительно преобразуем модель (8) с помощью замены $u_t = k_t^{1-\alpha}$ к виду (9). Взяв математическое ожидание от левой и правой частей (9), с учетом свойств винеровского процесса, сформируем задачу Коши

$$\frac{d}{dt}Mu_t = -(1-\alpha)\left(\lambda(t) + 0{,}5\alpha\sigma^2\right)u_t + (1-\alpha)\rho u$$
$$Mu_t\big|_{t=0} = k_0^{1-\alpha} \quad (13)$$

решение которой

$$Mu_t = e^{-(1-\alpha)\mu t}\left(\frac{e^{-\nu t}(L(0) - l_0) + l_0}{L(0)}\right)^{1-\alpha} \times \\ \times e^{-0{,}5(1-\alpha)\alpha\sigma^2 t} \cdot k_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\rho A \times \\ \times \left(\frac{e^{-\nu t}(L(0) - l_0) + l_0}{L(0)}\right)^{1-\alpha} \int_0^t e^{-(1-\alpha)\mu(t-\tau)} \times \\ \times e^{-0{,}5(1-\alpha)\alpha\sigma^2(t-\tau)} \times \\ \times \left(\frac{e^{-\nu\tau}(L(0) - l_0) + l_0}{L(0)}\right)^{-(1-\alpha)} d\tau. \quad (14)$$

Из неравенства Йенсена $Mg(u_t) \ge g(Mu_t)$, справедливого в силу выпуклости вниз функции $g(x) = x^{1/(1-\alpha)}$

$$Mk_t = M\left(u_t^{1/(1-\alpha)}\right) \ge (Mu_t)^{1/1-\alpha} \quad (15)$$

при любой эластичности выпуска по фондам. Так как функция $x^{\alpha/(1-\alpha)}$ выпукла вниз при $\alpha \in (0{,}5;1)$ и выпукла вверх при $\alpha \in (0;0{,}5)$, то если эластичность выпуска по фондам $\alpha \in (0{,}5;\ 1)$, то

$$Mx_t \ge A(Mu_t)^{\alpha/1-\alpha} \quad (16)$$

$$Mi_t \ge \rho A(Mu_t)^{\alpha/1-\alpha} \quad (17)$$

$$Mc_t \ge (1-\rho)A(Mu_t)^{\alpha/1-\alpha}, \quad (18)$$

а при $\alpha \in (0;0{,}5)$ знаки неравенств меняются на противоположные.

Анализируя поведение x_t, i_t, c_t при больших t видим, что при эластичности выпуска по фондам $\alpha \in (0;0,5)$, они ограничены сверху

$$Mx_t \le A(1-\alpha)\rho A\left(\frac{l_0}{L(0)}\right)^{1-\alpha} G_0, \qquad (19)$$

$$Mi_t \le \rho A(1-\alpha)\rho A\left(\frac{l_0}{L(0)}\right)^{1-\alpha} G_0, \qquad (20)$$

$$Mc_t \le (1-\rho)A(1-\alpha)\rho A\left(\frac{l_0}{L(0)}\right)^{1-\alpha} G_0, (21)$$

где G_0 – некоторая константа, определяемая сходящимся интегралом в (14).

Если проанализировать и поведение дисперсий, то оказывается [2], что дисперсии всех упомянутых показателей остаются положительными при $t \to \infty$ и, в рассматриваемом случае, имеют минимум при минимальной занятости l_0. Все сказанное позволяет утверждать, что при управлении экономикой как одним сектором (к примеру, в условиях глобализации) невозможно избавиться от неопределенности, а следовательно, риска. Это означает, что в рамках закрытой односекторной экономики невозможно предложить способ страхования от глобальных рисков, так как передавать риск некому, к тому же при указанном характере изменения занятости определенном уровне а имеет место стагнация экономики.

7.12.2010

Список литературы:

1. Соловьев В.И. Стохастические методы в экономике и финансах. – М.: ГУУ, 2000.
2. Соловьев В.И. Неопределенность состояния экономики страны при управлении ей как одним сектором// Вестник Университета (ГУУ), 2000.

Сведения об авторе: **Реннер Александр Георгиевич,** заведующий кафедрой математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета, доцент, кандидат технических наук

460018, г. Оренбург, пр.Победы 13, ауд. 6106, тел. (3532) 372444, e-mail: mme@mail.osu.ru

УДК 519.862.4

Renner A.G.

TO THE QUESTION ON CONSTRUCTION AND THE ANALYSIS OF ONE-SECTOR MODEL OF ECONOMY

Within the limits of certain assumptions about dynamics of employment the one-sector stochastic model of economy is under construction and analyzed.

Keywords: endowment fund, economic productivity, the formula of Ito, the stochastic differential equation.

References:

1. Soloviev V.I. Stochastic methods in economy and the finance. – M: ГУУ, 2000.
2. Soloviev V.I. Neopredelennost's nightingales of state of the economy of the country at management to it as one sector// the University Bulletin (ГУУ), 2000.