

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА И ЕЕ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Представлена математическая модель и программа расчета поверхностного стока с учетом особенностей рельефа поверхности. Модель основана на разбиении поверхности на элементарные площадки, расчете стока для каждой из них и затем интегрального поверхностного стока.

**Ключевые слова:** паводковый сток, поверхностный сток, математическое моделирование стока, прогнозирование водного стока, расчет поверхностного стока.

Формирование поверхностного стока – сложный многофакторный процесс. Он зависит от большого числа процессов и параметров, локализованных в границах водосбора и в своей совокупности определяющих гидрологический режим территории. Важнейшими факторами являются сумма атмосферных осадков; радиационный баланс; дефицит влажности воздуха; максимальные запасы воды в снеге и дополнительные осадки, приходящиеся на данную территорию за период снеготаяния; механический состав почво-грунтов в подзоне активного водообмена; литологическое строение зоны аэрации; экспозиция склона; тип растительности; уровень грунтовых вод [1, 2, 3].

### Балансовая модель поверхностного стока с учетом рельефа поверхности

Известные математические модели В.Е. Водогрецкого [1], Ю.Б. Виноградова [2], Л.С. Кучмента [4] и др. решают проблему расчета поверхностного стока с разной степенью детализации, однако они не учитывают особенности мезорельефа поверхности, моделируя формирование поверхностного стока для всей поверхности в целом.

В связи с этим нами построена математическая модель формирования стока с учетом рельефа склона и создана его компьютерная реализация. Компьютерная модель позволяет рассчитывать расходные статьи водного баланса и изменение запаса влаги в подзоне активного водообмена (ПЗАВ).

Задача расчета поверхностного стока решается за 3 этапа:

- разбиение поверхностей различных типов на элементарные площадки;
- расчет стока на элементарных площадках;

– расчет интегрального поверхностного стока.

### Моделирование формирования стока на элементарных площадках

В реальной ситуации склон редко бывает прямоугольный в плане и чаще всего, данные по рельефу местности задаются с помощью карты горизонталей. Поэтому первоочередная задача – разбить исходную произвольную поверхность на множество типовых площадок. Алгоритм разбиения определяется набором типовых (элементарных) площадок.

Метод решения задачи расчета стока для прямоугольной и унимодальной поверхностей основан на следующих исходных данных:

1. Карта изолиний исследуемой территории.
2. Карта типов почв (поверхностей) исследуемой территории.
3. Вспомогательные таблицы инфильтрации, испарения в зависимости от типов почв (поверхностей).

### Расчет стока для прямоугольной поверхности

Для решения задачи расчета стока для прямоугольной поверхности (рис. 1) используется уравнение баланса поверхностного стока [5]:

$$Y_{\text{пр}} + A_3 + A_B = \Phi_{\text{п}} + E + Y_{\text{от}}, \quad (1)$$

где:  $A_3$  – слой зимних осадков (м);

$A_B$  – слой осадков за время снеготаяния (м);

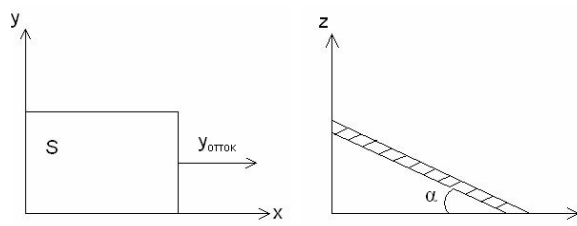


Рисунок 1. Прямоугольная в плане поверхность стока

$\Phi_{\Pi}$  – слой инфильтрационной воды (м) – вычисляется по формуле  $\Phi_{\Pi} = K_{\Phi} * T$ , где  $K_{\Phi}$  – коэффициент инфильтрации,  $T$  – время инфильтрации;

$E$  – слой суммарного испарения с поверхности (м) – вычисляется по формуле  $E = K_{И} * T$ , где  $K_{И}$  – коэффициент испарения,  $T$  – время испарения;

$Y_{OT}$  – слой стока (оттока) воды с площадки (м);

$Y_{ПР}$  – слой притока воды на площадку (в случае площадки, ограниченной водоразделом,  $Y_{ПР} = 0$ );

Также используется формула

$$M_{A1} = M_{A2} + \Phi_{\Pi}, \quad (2)$$

где  $M_{A2}$  – слой влаги в ПЗАВ (м) в конце расчетного периода – то есть по прошествии времени  $T$ .

$M_{A1}$  – слой влаги в ПЗАВ (м) в начале расчетного периода.

Исходя из заданных ( $A_3, A_B, M_{A2}, M_{A1}, K_{\Phi}, K_{И}, T$ ) и рассчитанных ( $\Phi_{\Pi}, T$ ) величин определяем:

$Y_{OT} = A_3 + A_B - \Phi_{\Pi} - E$  – отток (сток) с площадки (3).

$M_{A2} - M_{A1}$  – изменение запасов влаги в ПЗАВ.

*Расчет стока для прямоугольного в плане склона, разбитого на n площадок*

Каждая стоковая площадка  $S_i, i = 1, 2, \dots, n$  приближается стандартным прямоугольником и расположена под углом наклона  $\beta_i$ . Нормальный вектор каждой стоковой площадки лежит в плоскости, ортогональной горизонтальной плоскости – следовательно, боковой приток (сток) отсутствует.

Для каждой стоковой площадки  $S_i$  проводится соответствующий расчет:

$$Y_{ПРi} + A_{3i} + A_{Bi} = \Phi_{\Pi i} + E_i + Y_{OTi} \quad (4)$$

$$M_{A2i} = M_{A1i} + \Phi_{\Pi i} \quad (5)$$

$$Y_{OTi} = Y_{ПР(i+1)}, \quad (6)$$

где  $Y_{ПРi}$  – слой притока воды на площадку  $S_i$  с вышележащей площадки  $S_{i-1}$ .

Величины  $M_{A2i}, M_{A1i}, K_{\Phi i}, K_{И i}, E_i, A_{3i}, A_{Bi}, \Phi_{\Pi i}$  имеют тот же самый смысл, что и в алгоритме для соответствующего прямоугольника (стоковой площадки)  $S_i$ . Дополнительное соотношение

$Y_{OTi} = Y_{ПР(i+1)}$  означает, что отток с площадки  $S_i$  есть приток на площадку  $S_{i+1}$ . Отток с последней площадки и есть результирующий сток с прямоугольного в плане склона.

Дальнейший расчет стока со всего склона и интегральные показатели расходных статей баланса, а также изменение запасов влаги в ПЗАВ выполняется аналогично методике, изложенной выше.

Обобщим эту методику на унимодальную осесимметричную поверхность. Данная поверхность на карте изолиний может быть аппроксимирована последовательностью концентрических эллипсов (рис. 2).

Соотношение  $Y_{OTi} = Y_{ПР(i+1)}$  верно тогда, когда площадь всех стоковых площадок одинакова. Исходя из этого, разобьем поверхность в плане на  $n$  концентрических эллипсов равной площади (рис. 2).

Разобьем данную поверхность на  $m$  секторов с равными углами (рис. 3). Тогда в пределах каждого сектора получим  $n$  участков одинаковой площади.

Согласно допущению об отсутствии бокового притока (стока) каждая площадка не имеет потерь слоя оттока воды, то есть равенство  $Y_{OTi} = Y_{ПР(i+1)}$  верно для любых  $i$ , при условии, что площади стоковых площадок равны между

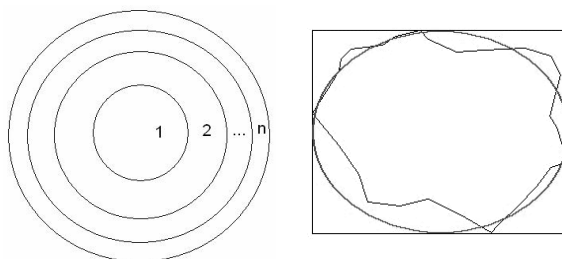


Рисунок 2. Унимодальная осесимметричная поверхность и ее аппроксимация

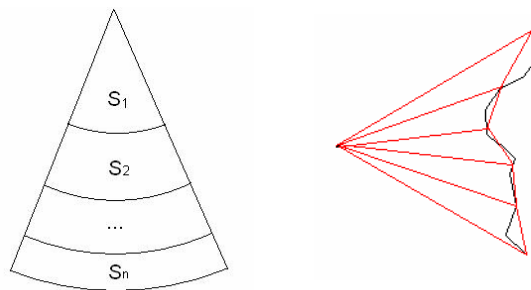


Рисунок 3. Сектор унимодальной осесимметричной поверхности и его аппроксимация

собой. Следовательно, форма стоковых площадок не имеет значения. Принципиальное значение для решения поставленной задачи имеет лишь их площадь. Исходя из этого, для случая с унимодальной осесимметричной поверхностью также справедливы уравнения (4, 5, 6).

Для каждой стоковой площадки проводится расчет, аналогичный рассмотренному выше. Площади  $S_i$  легко подсчитать, зная количество секторов  $m$  и количество концентрических эллипсов  $n$ .

Для того, чтобы вычислить сток воды со всей унимодальной осесимметричной поверхности, нужно повторить эти вычисления для каждого сектора.

Рассмотренные методики расчета модуля стока, расходных статей водного баланса и изменения запаса влаги в ПЗАВ подразумевают обобщение на поверхность произвольной формы за счет дифференциации участков и сведения их к типовым (элементарным) – прямоугольник, треугольник и эллипс.

#### *Алгоритмы расчета стока на элементарных площадках*

Для расчета стока с элементарной площадки – прямоугольник используется балансовое уравнение стока (1).

Разбиение произвольной поверхности на эллипсы применяется в том случае, если водораздел поверхности представляет собой замкнутую изолинию, с которой происходит сток. В этом случае изолиния, задающая водораздел, приближается эллипсом. Делается это следующим образом:

1. Выбираются 4 крайние точки из изолинии, 2 из которых имеют минимальные координаты  $x$  и  $y$  соответственно, а другие 2 имеют максимальные координаты  $x$  и  $y$  соответственно.

2. Задается центр эллипса, координаты которого по  $x$  и  $y$  равны среднему значению соответствующих координат выбранных на предыдущем шаге точек.

3. Строится прямоугольник по 2-м точкам. Одна из точек имеет максимальную координату по  $x$  и минимальную по  $y$ , другая – максимальную по  $x$  и минимальную по  $y$ .

4. Искомый эллипс вписывается в прямоугольник. Рассчитывается площадь эллипса по формуле  $S=\pi ab$ , где  $a$ ,  $b$  – большая и малая полуоси эллипса.

#### *Алгоритмы разбиения*

Существующие универсальные алгоритмы, как правило, производят разбиение на треугольники (триангуляция), поэтому необходимо разработать специальный алгоритм разбиения поверхности на три типа элементарных площадок – прямоугольник, треугольник и эллипс. Пусть поверхность задается набором изолиний уровня, информация о которых содержится в файле. Каждая изолиния имеет собственную высоту, координаты образующих ее точек, и может быть либо замкнутой, либо нет.

Рассмотрены изолинии следующего вида:

1. Все изолинии уровня являются замкнутыми, то есть представляют собой некоторую возвышенность, с вершины которой стекают осадки.

2. Все изолинии представляют собой незамкнутые кривые, то есть задают, таким образом, участок склона, с которого стекают осадки.

3. Смешанный вариант 1 и 2. То есть поверхность имеет водораздел, заданный замкнутой изолинией. Поверхностный сток начинается на унимодальной поверхности и далее переходит в сток со склона.

#### *Алгоритм разбиения для замкнутых изолиний*

1. Изолиния, имеющая наибольшую высоту и, следовательно, являющаяся водоразделом поверхности, приближается эллипсом.

2. Из центра эллипса опускаются лучи по всем направлениям с заданной точностью до пересечения с последней изолинией данной поверхности. Рассмотрим этот шаг более подробно.

Предварительно задается точность предстоящего разбиения. Она выражается в максимальном расстоянии между точками разбиения на последней изолинии. Строится отрезок, соединяющий центр эллипса с первой точкой последней изолинии, которая становится текущей точкой разбиения. Проверяется расстояние между ней и следующей точкой изолинии.

Если расстояние больше заданного то строится окружность с центром в текущей точке разбиения и радиусом равным заданной точности и находится пересечение этой окружности с отрезком, соединяющим текущую точку разбиения и следующую точку изолинии. Найденная точка пересечения становится текущей точкой разбиения.

Иначе переходим к следующей точке изолинии и сравниваем расстояние с заданным. Так поступаем до тех пор, пока оно не станет больше заданного. Когда это произойдет, текущей точкой разбиения становится предыдущая точка изолинии.

Для нахождения очередной точки разбиения и построения отрезка из центра эллипса до этой точки проверяется угол между отрезками, построенными на текущем и предыдущем шаге. Если он меньше определенного значения, то текущий отрезок не строится, а продолжается проверка точек изолинии, следующих далее.

3. Осуществляется обход по всем остальным изолиниям, находящимся между последней из них и водоразделом, и по всем отрезкам разбиения. Парно перебираются все точки изолинии, пока не будет найдена такая пара, точки которой расположены в разных полуплоскостях от текущего отрезка разбиения. Затем находится точка пересечения между ним и отрезком, соединяющим эту пару вершин. Найденная точка заносится в базу как очередная точка разбиения для текущей изолинии.

*Алгоритм разбиения для незамкнутых изолиний с постоянным числом линий разбиения*

Для работы алгоритма необходимо задать шаг разбиения, самую высокую и самую низкую точки поверхности. Шаг разбиения измеряется в долях расстояния между соседними линиями разбиения на самой высокой изолинии от общей ее длины.

1. Из заданной наивысшей точки с заданным шагом опускаются лучи до пересечения с самой высокой изолинией. Этот шаг аналогичен шагу 2 алгоритма разбиения поверхности первого вида. Результат этого шага – полученные точки разбиения для первой изолинии, первая и последняя из которых совпадает соответственно с первой и последней точками данной изолинии.

2. Далее в цикле от второй до последней изолинии распределяем точки разбиения равномерно по длине текущей изолинии и соединяем каждую из них с соответствующей ей точке на предыдущей изолинии, при этом количество точек разбиения совпадает с полученным для первой изолинии, а первая и последняя точки разбиения всегда совпадают с первой и последней точками текущей изолинии. Находится

длина изолинии и делится на количество точек разбиения – таким образом, мы узнаем расстояние между соседними точками разбиения. За текущую точку мы принимаем первую точку изолинии, которая также является и первой точкой разбиения. Далее идет перебор по порядку всех точек изолинии, начиная со второй, пока не встретится последняя, при этом из каждой из них опускается перпендикуляр на опорный отрезок, находится их точка пересечения и расстояние между ней и текущей опорной точкой. Если это расстояние меньше найденного ранее расстояния между соседними точками разбиения, то продолжаем перебор. Если оно равно, то текущая точка изолинии становится также следующей точкой разбиения, точка пересечения опущенного из нее перпендикуляра с опорным отрезком становится текущей опорной точкой и перебор продолжается. Если же расстояние больше, то следуют такие действия:

Находим точку на опорном отрезке, на нужном расстоянии от текущей опорной точки. Ищем точку пересечения перпендикуляра, опущенного из этой точки к опорному отрезку и отрезка, соединяющего текущую точку изолинии с предыдущей. Найденная точка пересечения добавляется к точкам изолинии, если не совпадает ни с одной из них, и отмечается также как следующая точка разбиения

3. Точки разбиения последней изолинии соединяются с самой низкой точкой разбиения, заданной пользователем.

*Алгоритм разбиения для незамкнутых изолиний с переменным числом линий разбиения*

Отличие от алгоритма для незамкнутых изолиний с постоянным числом разбиений состоит в том, что по мере перебора изолиний, проводится проверка расширения или сужения склона. На основании этого принимается решение, стоит ли добавить или убрать линии разбиения и сколько. Рассмотрим подробнее механизм проверки. Строится отрезок, соединяющий самую высокую и самую низкую точки разбиения, заданные пользователем. Этот отрезок выступает в роли рассекающего стоковую площадку на две равные части. Назовем их условно верхней и нижней частью. Проверка на необходимость добавления/удаления линий разбиения проводится для каждой из двух частей.

Для каждой заводится текущая точка, являющаяся либо первой, либо последней точкой первой изолинии, в зависимости от того, какая часть площадки проходит проверку. Для каждой изолинии, начиная со второй, сравниваются расстояния от первой точки изолинии до секущего отрезка и от текущей точки верхней части до секущего отрезка. Если разница между этими расстояниями больше определенного значения, то добавляется новая линия разбиения между первой и второй линиями, и текущей точкой становится первая точка текущей изолинии. Если разница расстояний меньше определенного значения, то удаляется вторая линия разбиения и текущей точкой становится первая точка текущей изолинии. Аналогично и для нижней части площадки, только для нее рассматриваются последние точки изолиний и новая изолиния добавляется между последней, и предпоследней линиями, а удаляется предпоследняя линия разбиения. При этом расстояние между точками разбиения корректируются для нового их количества.

Все точки разбиения поверхности хранятся в двумерном массиве, первый номер которого – номер изолинии, а второй – номер луча разбиения.

*Алгоритм разбиения поверхности имеющей водораздел, заданный замкнутой изолинией, с которой происходит поверхностный сток, переходящий далее в сток со склона*

Алгоритм аналогичен рассмотренному выше алгоритму разбиения для замкнутых изолиний. Единственное различие состоит в том, что при опускании лучей происходит проверка не только на пересечение последней изолинии, но и достижения края площадки.

Таким образом, в результате процедуры разбиения получено множество точек разбиения на всей поверхности, каждая из которых будет использоваться для последующего расчета поверхностного стока. Сток рассчитывается отдельно для каждого сектора, образованного парой лучей разбиения. Каждый такой сектор, начинающийся с вершины склона и заканчива-

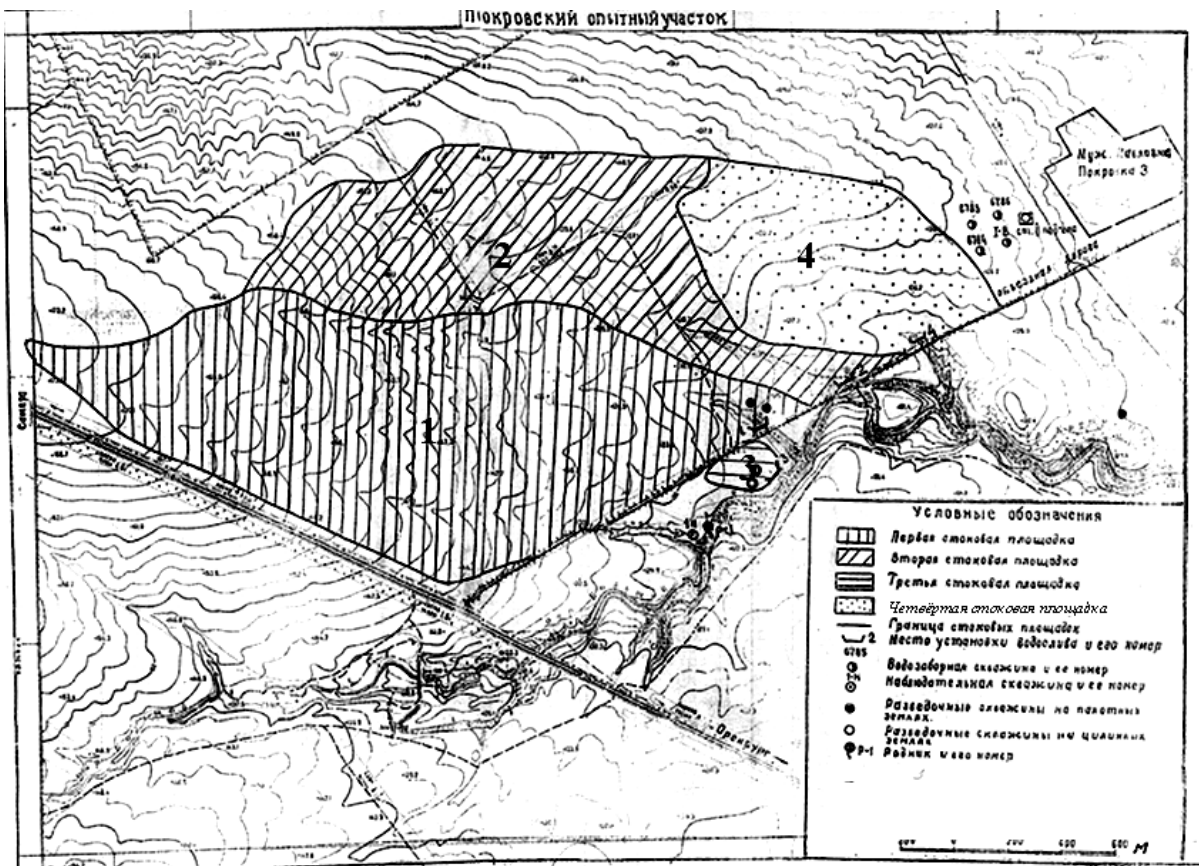


Рисунок 4. Покровский опытный участок

ющийся на последней изолинии поверхности, делится изолиниями поперечно, образуя множество прямоугольников, поэтому сток будет рассчитываться для прямоугольника.

Для проверки адекватности разработанной системы проведено сравнение расчетных значений с данными, полученными в результате полевых измерений на примере Покровского опытного участка (рис. 4). Для этого была оцифрована первая стоковая площадка.

Из рисунка видно, что первая стоковая площадка имеет переменную ширину и поэтому для

ее разбиения на элементарные площадки воспользуемся алгоритмом *разбиения для незамкнутых изолиний с переменным числом линий разбиения* (рис. 5).

По введенным исходным данным можно получить значение расходной статьи водного баланса – слоя стока. Посуточное изменение интенсивностей приходных и расходных статей водного баланса представлено на рис. 6.

Сравним теоретически рассчитанный сток с данными полевых измерений поверхностного стока, представленными на рис. 7.

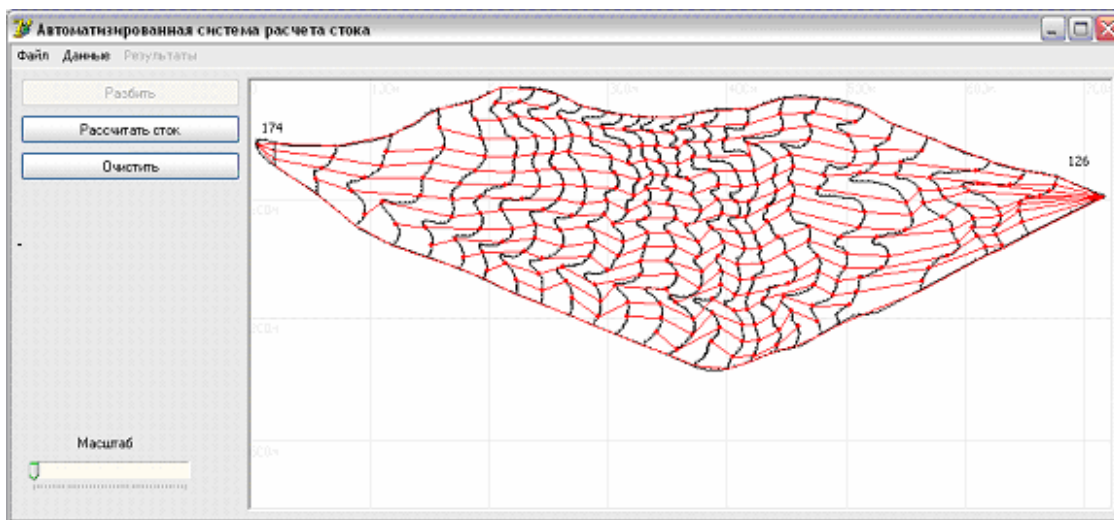


Рисунок 5. Результат разбиения первой стоковой площадки Покровского опытного участка с переменным числом линий

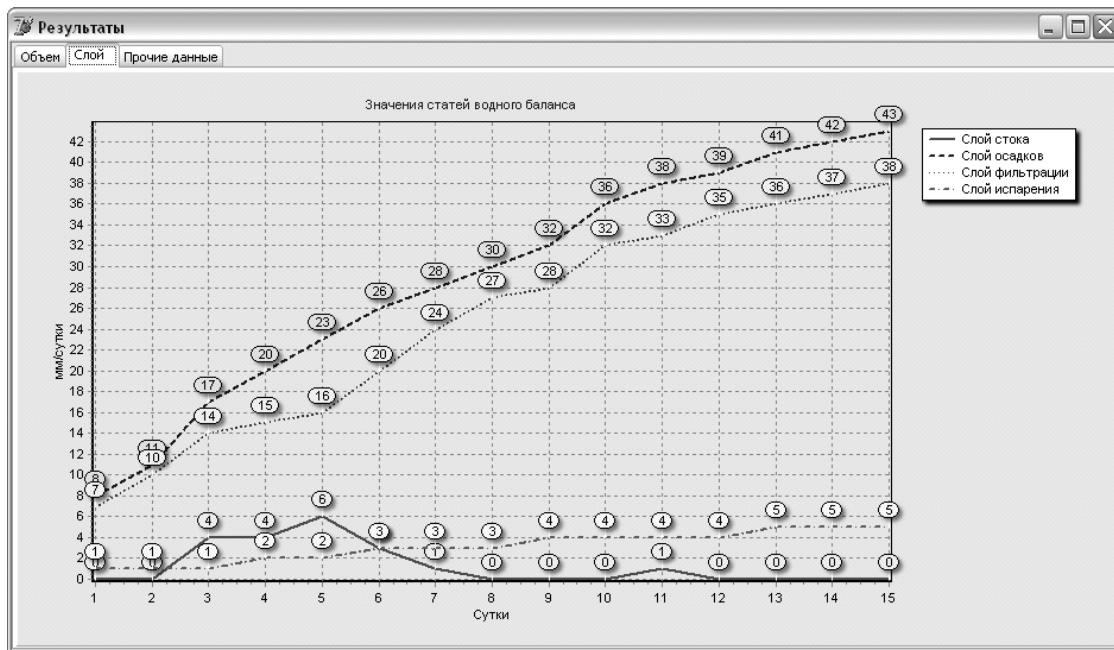


Рисунок 6. Посуточное изменение интенсивностей статей водного баланса

Из рисунка видно, что различия в значениях поверхностного стока не значительны, а начиная с пятых суток паводка, совпадают.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях стабильной гидрологической обстановки определяющим фактором формирования поверхностного стока становится рельеф поверхности. Входными данными, позволяющими учитывать рельеф, являются карты изолиний изучаемой поверхности. В работе представлена следующая последовательность учета рельефа поверхности: создаются алгоритмы расчета поверхностного стока с различных типов элементарных площадок – прямоугольников, эллипсов, секторов; реальные поверхности аппроксимируются набором элементарных площадок – таким путем описаны склоны с переменной в плане геометрией, а также унимодальные поверхности. В совокупности с измеренными или рассчитанными теоретически гидрологическими параметрами (коэффициентами инфильтрации и испарения, интенсивностью сне-

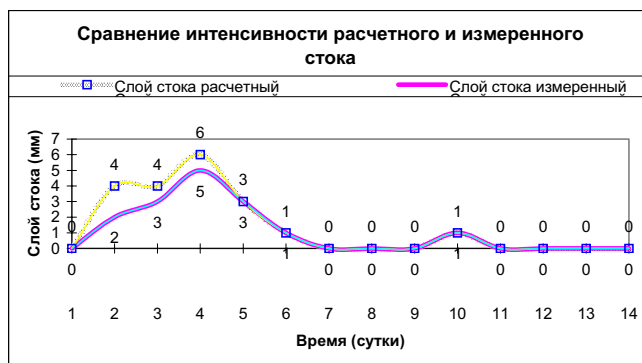


Рисунок 7. Сравнение значений расчетного и измеренного поверхностного стока

готаяния и осадков) для каждой элементарной площадки удастся рассчитать интенсивность поверхностного стока как с элементарных, так и интегральных площадок. Адекватность модельных и измеренных значений поверхностного стока указывает на то, что учет рельефа поверхности при гидрологических расчетах позволяет значительно повысить точность прогнозных расчетов поверхностного стока.

9.08.2010 г.

### Список литературы:

1. Водогреткий В.Е. Влияние агролесомелиораций на годовой сток. – Л.: Гидрометеоздат, 1979. – 181 с. – 2000 экз.
2. Виноградов Ю. Б. Математическое моделирование процессов формирования стока [Текст] : монография. – Л.: Гидрометеоздат, 1988. – 312 с. – 1150 экз. – ISBN 5-286-00017-7.
3. Гельфан А. Н. Динамико-стохастическое моделирование формирования талого стока [Текст] : монография А. Н. Гельфан. – М.: Наука, 2007. – 279 с.
4. Кучмент Л.С. Математическое моделирование речного стока. – Л.: Гидрометеоздат, 1972.
5. Нестеренко Ю.М. Водная компонента аридных зон. – Екатеринбург. Уральский центр академического обслуживания. – 2006. – 286 с.

### Сведения об авторах:

Нестеренко Юрий Михайлович, зав. Отделом геоэкологии Оренбургского научного центра УрО РАН, доктор географических наук, доцент

460014, ул. Набережная, 29, тел. (3532) 770660, e-mail: geocol-onc@mail.ru

Нестеренко Максим Юрьевич доцент кафедры МОИС Оренбургского государственного университета, ведущий научный сотрудник Отдела геоэкологии

Оренбургского научного центра УрО РАН, кандидат технических наук, доцент

460018, пр-т Победы, 14, тел. (3532) 372534, e-mail: nesteren@mail.osu.ru

Влацкий Валерий Викторович, научный сотрудник Отдела геоэкологии Оренбургского научного центра УрО РАН 460014, ул. Набережная, 29, тел. (3532) 770660

Nesterenko Y.M., Bondarenko I.I., Nesterenko M.Y., Vlatsky V.V.

MATHEMATICAL MODEL OF SURFACE RUNOFF AND ITS SOFTWARE IMPLEMENTATION

The mathematic model and the program for calculating water runoff, taking into account the surface topography are developed. The mathematic model based on partition of the surface of the elementary area, runoff modeling on all elementary areas and calculating of integral water runoff parameters.

Keywords: spring water runoff, surface runoff, mathematical modeling of runoff, forecasting water runoff, surface runoff calculating