

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С УЧЕТОМ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ВЛОЖЕНИЙ И ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

В работе выявлена связь между параметрами процесса риска и платежеспособностью страховой компании в условиях диверсификации вложений, с учетом которой сформирована стратегия инвестирования; построена зависимость между объемом собственного удержания и вероятностью неразорения в различных условиях инвестирования, анализ которой позволяет выработать подходящие условия перестрахования.

Ключевые слова: вероятность неразорения страховой компании, диверсификация вложений, перестрахование.

Усиливающаяся конкуренция, о которой свидетельствует снижение доли ведущих страховых компаний в совокупном объеме собранных премий, и увеличение финансовых рисков в условиях кризиса порождают высокие требования к объективной оценке не только платежеспособности страховых компаний, под которой понимается положительность процесса риска, но и инструментов, влияющих на нее. Одним из инструментов, позволяющих влиять на платежеспособность, является собственный капитал страховой компании, увеличение которого возможно за счет инвестирования.

Пусть страховая компания инвестирует свободные средства в соотношении $\beta : \alpha$, соответственно в безрисковые активы с доходнос-

тью $r \geq 0$, и в рисковый актив, цены S_t которого удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению [1, с. 10]

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad (1)$$

где μ и σ – доходность и волатильность цены рискового актива,
 W_t – винеровский процесс.

Капитал страховой компании, характеризующий процесс риска, согласно [2, с. 426], удовлетворяет уравнению

$$dY_t = ((r\beta + \alpha\mu)dt + \alpha\sigma dW_t)Y_t + cdt - d\left(\sum_{i=0}^{N(t)} X_i\right) \quad (2)$$

$$Y_0 = u, \quad 0 \leq \alpha + \beta \leq 1,$$

где Y_t – капитал страховой компании в момент времени t ;

u – начальный капитал компании;
 c – интенсивность поступления страховых премий;

$N(t)$ – число поступивших исков за время $[0, t]$, которое является пуассоновским случайным процессом с параметром λt ;

$\{X_i\}$ – размеры выплат по искам страховой компании – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с неизвестной плотностью распределения вероятностей $f(x)$.

В качестве меры платежеспособности возьмем вероятность неразорения $\varphi(u) = P\{Y_t \geq 0, Y_0 = u, t \geq 0\}$, которая, в предположении о пуассоновском процессе поступления исков с учетом инвестирования в рисковый и безрисковый актив, может быть найдена, как показано в работе [2, с. 427], как решение задачи:

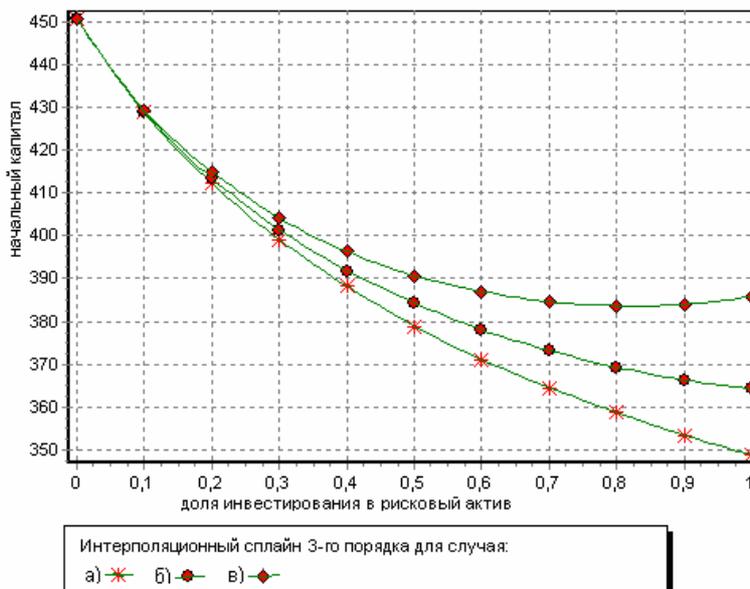


Рисунок 1. Зависимости между начальным капиталом (тыс. руб.) и долей инвестирования только в рисковый актив с доходностью 0.4 и волатильностью цен а) 0.15, б) 0.2, в) 0.25, при $\lambda = 3.82$ исков/день, $\bar{c} = 196.5$ тыс. руб/день, $\varphi = 0.95, \beta = 0$

$$\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2u^2\varphi''(u) + (c + (\beta r + \alpha\mu)u)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda\int_0^u\varphi(u-y)f(y)dy = 0, \quad \varphi(\infty) = 1, \quad \mu > \sigma^2/2. \quad (3)$$

Поставим задачу определения стратегии инвестирования, основанную на принципе диверсификации вложений в рисковые и безрисковые активы. Используя разработанный программный комплекс, построили численное решение задачи (3), для договоров КАСКО, при фиксированных значениях параметров процесса риска ($\lambda, c, \mu, \sigma, r$), предварительно аппроксимировав $f(x)$ с помощью отрезка обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных полиномов Чебышева, что позволило построить:

– зависимость между необходимым начальным капиталом и долей инвестирования только в рисковый актив, при фиксированном значении вероятности неразорения, которая представлена на рисунке 1;

– зависимость между вероятностью неразорения страховой компании с заданным начальным капиталом и долей инвестирования только в рисковый актив, которая представлена на рисунке 2;

– зависимость между начальным капиталом и долей инвестирования в рисковый актив, с учетом диверсификации вложений в рисковые и безрисковые активы, при фиксированном значении вероятности неразорения, которая представлена на рисунке 3;

– зависимость между вероятностью неразорения страховой компании с заданным начальным капиталом и долей инвестирования в рисковый актив, с учетом диверсификации вложений в рисковые и безрисковые активы, которая представлена на рисунке 4.

Зависимости подобного рода позволяют сформировать стратегию инвестирования. К примеру:

страховой компании с начальным капиталом 384 тыс. руб. для обеспечения вероятности неразорения 0.95 необходимо инвестировать от 70% до 90% свободных средств в рисковые активы с доходностью 0.4 и волатильностью 0.25; для страховой компании с начальным капиталом 373 тыс. руб. для обеспечения вероятности неразорения 0.95 необходимо инвестировать 60% свободного капитала в рисковые активы с

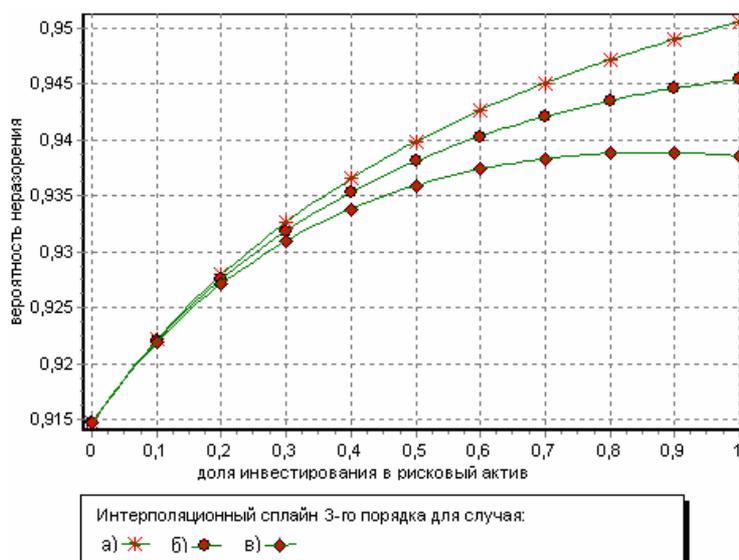


Рисунок 2. Зависимости между вероятностью неразорения и долей инвестирования только в рисковый актив с доходностью 0.4 и волатильностью цен а) 0.15, б) 0.20, в) 0.25, при $\lambda = 3.82$ исков/день, $\hat{c} = 196.5$ тыс.руб/день, $u = 350$ тыс.руб., $\beta = 0$

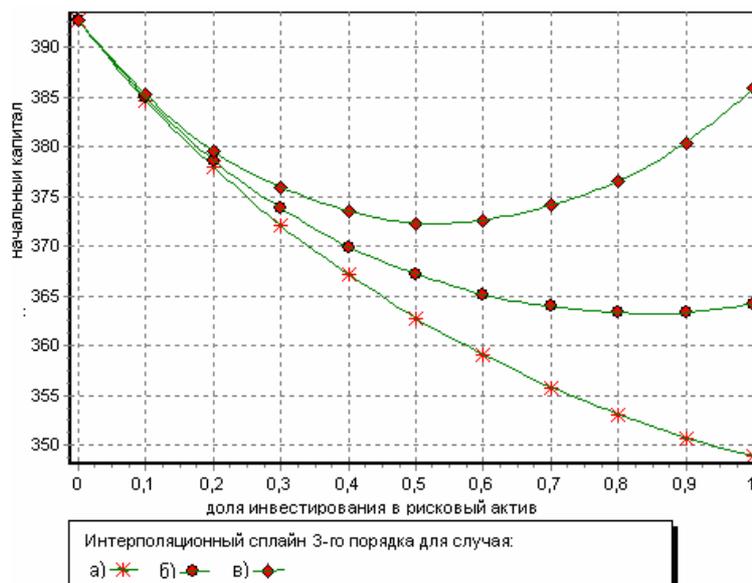


Рисунок 3. Зависимости между начальным капиталом (тыс. руб.) и долей инвестирования в рисковый актив с доходностью $\mu = 0.4$ и волатильностью а) 0.15; б) 0.2; в) 0.25; при $\beta = 1 - \alpha$, $r = 0.13$, $\lambda = 3.82$ исков/день, $\hat{c} = 196.5$ тыс.руб/день, $\varphi = 0.95$.

доходностью 0.4 и волатильностью цен 0.25 и 40% свободных средств в безрисковые активы с доходностью 0.13.

Для определения области значений начального капитала, при которых вложения в рисковый и безрисковый актив в соотношении $\alpha : \beta$ соответственно обеспечивают более высокий уровень вероятности неразорения, чем вложения только в безрисковый актив, определим точку инвестиционного равновесия из соотношения

$$\varphi^{\mu, \sigma, \alpha, r, \beta}(u^*) = \varphi^r(u^*) = \varphi^*$$

где (u^*, φ^*) – точка инвестиционного равновесия;

u^* – равновесный капитал;

φ^* – равновесная вероятность.

Численное решение задачи (3) для различных значений волатильности цен рискового актива при фиксированных значениях доходности рискового и безрискового актива и доли инвестирования в рисковый актив позволило

построить зависимости:

– между равновесной вероятностью и волатильностью цен рискового актива для различных значений доли инвестирования, которые представлены на рисунке 5;

– между равновесной вероятностью и волатильностью цен рискового актива для различных значений доли инвестирования, которые представлены на рисунке 6.

Полученные результаты позволяют сформировать стратегию инвестирования в зависимости от условий диверсификации и положения начального капитала относительно точки инвестиционного равновесия. Так, например, для заданных параметров процесса риска ($r^{1-\alpha} = 0.13$, $\mu = 0.4$, $\alpha = 0.5$, $r = 0.13$): при $\sigma \leq 32$ вложение на условиях диверсификации в рисковый и безрисковый актив дает более высокие значения вероятности неразорения, при любых значениях начального капитала; для $\sigma \geq 47$ более высокий уровень неразорения обеспечивает инвестирование только в безрисковые активы; при $32 < \sigma < 47$ зависимость между равновесным капиталом и волатильностью цен рискового актива приведена на рисунке 5. Точка (35,449) на графике означает, что при $u < 449$ тыс. руб. лучше инвестировать 50% свободных средств в рисковые активы с доходностью $\mu = 0.4$ и волатильностью $\sigma = 0.35$ и 50% средств в безрисковые активы с доходностью 0.13, а при $u > 449$ тыс. руб. инвестирование в безрисковые активы с доходностью

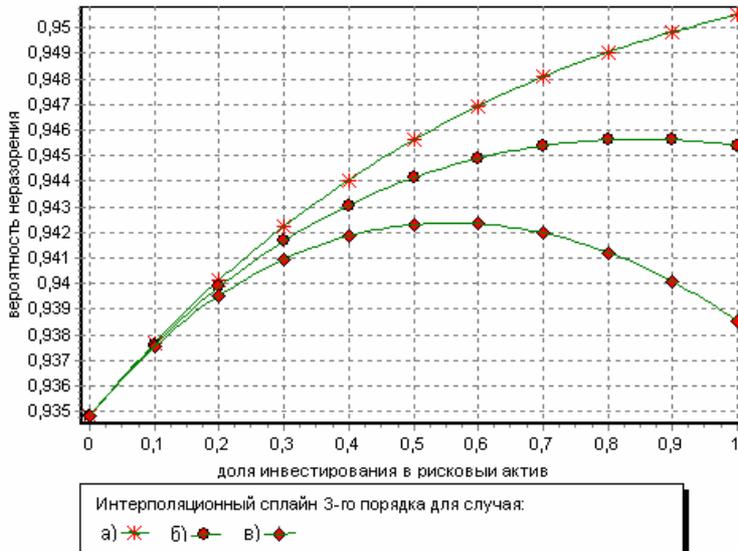


Рисунок 4. Зависимость между вероятностью неразорения и долей инвестирования в рисковый актив с доходностью 0.4 и волатильностью цен а) 0.15, б) 0.2, в) 0.25; при $\beta = 1 - \alpha$, $r = 0.13$, $\lambda = 3.82$ *исков/день*, $\hat{c} = 196.5$ *тыс.руб/день*, $u = 350$ *тыс.руб*.

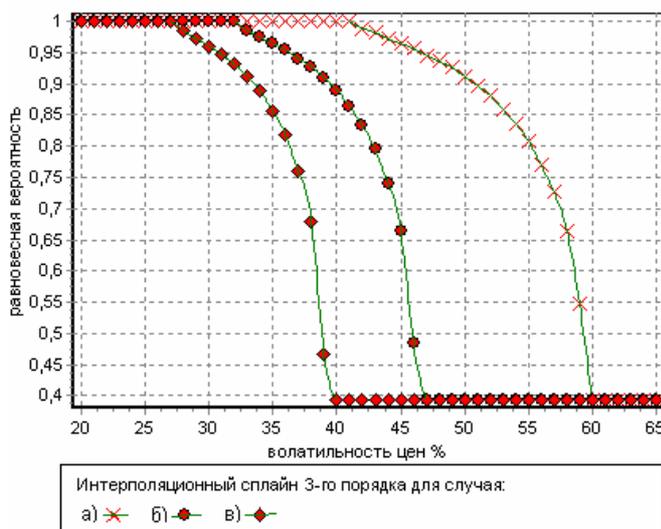


Рисунок 5. Зависимости между равновесной вероятностью и волатильностью цен рискового актива, при инвестировании а) $\alpha = 0.3$, б) $\alpha = 0.5$, в) $\alpha = 0.7$ свободных средств в рисковый актив с доходностью 0.4 и $1 - \alpha$ в безрисковый актив с доходностью 0.13, $\lambda = 3.82$ *исков/день*, $\hat{c} = 196.5$ *тыс.руб/день*, $r = 0.13$

$r = 0.13$ обеспечит более высокие значения вероятности неразорения.

С целью обеспечения платежеспособности страховщик может также воспользоваться пропорциональным перестрахованием. Интенсивность поступления премий цедента после оплаты премии перестраховщику будет равна

$$c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot m - (1 + \xi) \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot m,$$

где $\theta \geq 0$ – относительная рисковая надбавка

цедента;

$\xi \geq 0$ – относительная рисковая надбавка перестраховщика;

m – математическое ожидание размеров выплат по искам X_i ;

$\gamma : 0 \leq \gamma \leq 1$ – доля перестрахования;

$(1 - \gamma)$ – объем собственного удержания.

По известным размерам выплат по искам X_i можно определить выплаты цедента $x_i^{цед} = (1 - \gamma)X_i$ и аппроксимировать плотность распределения размеров выплат цедента $f^{цед}(x)$. Тогда задача (3) для определения вероятности неразорения страховой компании с учетом перестрахования, как известно [2, с. 427], примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2 u^2 \varphi''(u) + ((1 + \theta) \cdot \lambda \cdot m - \\ & - (1 + \xi) \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot m + (\beta r + \alpha \mu) u) \varphi'(u) - \\ & - \lambda \varphi(u) + \lambda \int_0^u \varphi(u - y) f^{цед}(y) dy = 0, \\ & \varphi(\infty) = 1, \quad \mu > \sigma^2/2. \end{aligned} \quad (4)$$

Проанализируем, как влияет объем собственного удержания, при пропорциональном перестраховании, на платежеспособность страховой компании, при наличии статистической информации о размерах выплат.

Зависимости между начальным капиталом и объемом собственного удержания для случаев с инвестированием и без инвестирования, при фиксированном значении вероятности неразорения, представлены на рисунке 7.

Построенные зависимости позволяют выбрать приемлемые для страховщика объемы перестрахования с уче-

том характеристик инвестиционного процесса. Например, для обеспечения вероятности неразорения 0.95 страховой компании с начальным капиталом 300 тыс. руб. необходимо инвестировать 40% свободных средств в рисковые активы с доходностью 0.4 и волатильностью цен 0.25, 60% свободных средств – в безрисковые активы с доходностью 0.13 и отдать на перестрахование 15% рисков.

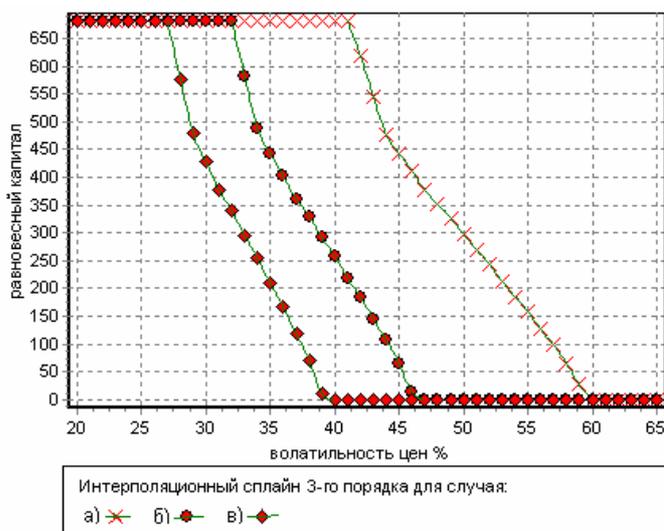


Рисунок 6. Зависимость между равновесным капиталом и волатильностью цен рискового актива при инвестировании а) $\alpha = 0.3$, б) $\alpha = 0.5$, в) $\alpha = 0.7$ свободных средств в рисковый актив с доходностью 0.4 и $1 - \alpha$ в безрисковый актив с доходностью 0.13, $\lambda = 3.82$ исков/день, $\hat{c} = 196.5$ тыс. руб/день, $r = 0.13$

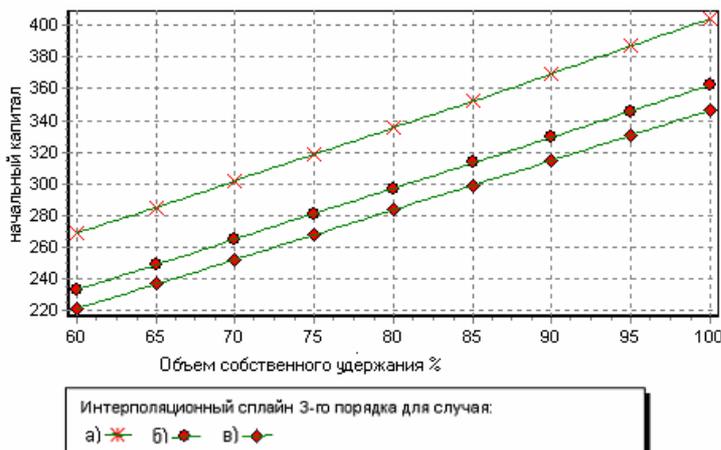


Рисунок 7. Зависимость между начальным капиталом (тыс. руб.) и объемом собственного удержания для случаев: а) без инвестирования, б) с инвестированием в безрисковые активы $r = 0.13$, в) $\mu = 0.4$, $\sigma = 0.16$, $\alpha = 0.4$, $r = 0.13$, $\beta = 0.6$; $\lambda = 3.82$ исков/день, $\theta = 0.6$, $\xi = 0.8$, $\varphi = 0.95$.

Список использованной литературы:

1. Мельников, А.В., Волков, С.Н., Нечаев, М.Л. Математика финансовых обязательств / Мельников, А.В., Волков, С.Н., Нечаев, М.Л. М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.
2. Paulsen, J., Ruin models with investment income/ Paulsen, J.//Probability Surveys Vol. 5, 2008, 416-434 с.

Yarkova O.N.

STUDY OF PROBABILITY OF NON-BANKRUPTCY OF AN INSURANCE COMPANY SUBJECT TO DIVERSIFICATION OF INVESTMENT AND REINSURANCE

The article reveals relation between parameters of a risk process and solvency of an insurance company, under diversification of investment, according to which investment strategy was established; author shows dependency between retention volume and probability of non-bankruptcy under different conditions of investment, analysis of which allows to work out appropriate terms of reinsurance.

Key words: probability of non-bankruptcy of an insurance company, diversification of investment, reinsurance.

Информация об авторе:

Яркова О.Н., старший преподаватель кафедры математических методов и моделей в экономике
ГОУ ВПО «Оренбургский государственный университет», 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13,
к. 6106, тел.: (3532) 372444, 89619141072, e-mail: yarkovaon@yandex.ru